声学习题集

◆何祚镛/主编

哈尔滨工程大学出版社

声学习题集

何祚镛　主编

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

声学习题集/何祚镛主编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2003

ISBN 7-81073-521-7

Ⅰ.声… Ⅱ.何… Ⅲ.声学—高等学校—习题 Ⅳ.042-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 076745 号

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)82519328 邮编:150001
新华书店经销
肇东粮食印刷厂印刷

*

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 8.5 字数 203 千字
2003 年 10 月第 1 版 2003 年 10 月第 1 次印刷
印数:1—2 000 册
定价:14.00 元

编者说明

这是一本以习题为主的声学参考书，包括声学基础部分习题和声学分科部分习题，如电声、超声、海洋声、建声与噪声、语声、心理与生理声等。本书可作为大学本科生教学选题之用，也有一些综合补充题供考研复习参考。在附录部分还提供有关声学参数、特殊函数的图表。为便于自学者学习，在习题集前面对声学理论先作了概述。

本习题集由哈尔滨工程大学何祚镛、赵玉芳，北京大学栾桂冬、王仁乾，青岛海洋大学王恕铨等人联合编写和验算。何祚镛为主编。

此书早在1986年12月列入原中国船舶工业总公司高校教材编著计划，于1990年编写完成，并敦请北京大学杜连耀先生审阅完毕。后有同志提出意见要求补充"理论概述"部分，因之拖延时间，以后由于人事变迁以及上面机构改变等一些主、客观原因，以致拖延至今。作为主编负有不可推卸的责任，有负编写组全体同志的辛勤劳动和重托，深感不安，谨表歉意。

作为声学习题集，对于学习声学的同学和授课的教师来说还是有用的，因此现在还是整理付印。

藉此，谨代表编写组同志向北大杜先生致以诚挚谢意，也向哈尔滨工程大学出版社和水声工程学院的同志们致以谢意。

何祚镛

2003年8月23日

目　　录

一、声学基础

声学是研究声波的产生、传播、接收和效应的科学。目前,声学已发展成一门多学科性的科学,它的理论基础和实际应用都很广泛。然而就声学的基本理论而言,仍然是研究振动和波的传播等问题。

(一) 振动学基础

声波的产生基本上是由于物体运动引起的介质振动,因而从物体的振动规律可以推知声的一些规律。振动学研究的范围非常广泛,这里的习题内容主要是与声学问题联系比较密切的一些力学振动基础问题。

1.振动

振动这一术语只用于机械系统(包括声学系统)。描述机械系统运动的物理量在观测时间内不停地经过最大值和最小值而变化,即称为振动。要分析系统的振动规律,则先要分析系统的受力情况,然后列出运动方程,即把描述系统振动的物理量位移表示成时间的函数。根据系统位移随时间变化的规律,就可推知系统振动的其他特性了。振动可分为受迫振动和自由振动。受迫振动是系统由外加激励力引起的振动。若外加激励力是周期性的和连续性的,则受迫振动就呈现稳态振动,稳态振动时的物理量也为周期性的量。对于非周期性的激励力,可采用傅氏分析方法求得系统的位移响应。受迫振动不存在时,系统即作自由振动。关于随机力的振动问题超出此习题集范围,不作讨论。

简谐振子　质量、弹簧系统(质量 m,弹性系数 k)。在初始激发下,维持系统作自由振动的力是弹性力、摩擦力和质量 m 的惯性力。

(1) 无阻尼自由振动

运动方程
$$\ddot{x} + \omega_0^2 X = 0$$

其中 $\omega_0^2 = k/m$(固有角频率),$f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$(固有频率)。

位移
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi)$$

能量
$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

无阻尼自由振动的总能量是恒量,等于其最大动能或最大势能,系统作连续振动。

(2) 有阻尼自由振动

运动方程
$$m\ddot{x} + R_m\dot{x} + kx = 0 \quad (R_m \text{ 为阻力系数})$$

位移　当 $R_m^2 < 4mk$(系统略有阻尼)时,

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\Omega t - \varphi)$$

式中 δ 为阻尼系数,$\delta = \dfrac{R_m}{2m}$;Ω 为振动角频率,$\Omega^2 = \omega_0^2 - \dfrac{R_m^2}{4m^2}$。

振幅衰减　对数衰减量 ϑ——相隔一个周期 $T_0=\frac{1}{f_0}$ 的两个相邻振幅之比的对数，即

$$\vartheta=\log_e\frac{A_n}{A_{n+1}}=\frac{T_0R_m}{2m}=\frac{R_m}{2mf_0}$$

能量衰减　机械品质因数 Q_m——能量 E 衰减为初始值 E_0 的 e^{-1} 倍所经历的时间，其值等于 $Q_m=\frac{m\omega_0}{R_m}$。对单自由度机械(或电振荡)系统，此值是共振尖锐度或频率选择性的度量，即 $Q_m=\frac{f_0}{\Delta f}$，其中 $\Delta f=f_2-f_1$ 为半功率点宽度，简称带宽。

(3) 受迫振动

系统在外加激励力作用下，既按其固有频率振动，又按激励力频率振动。由于阻尼的作用，系统按固有频率振动部分逐渐消失，最终以激励力的频率振动。

运动方程　$m\ddot{x}+R_m\dot{x}+kx=F_0\cos\omega t$(或表成复数形式 $F_0e^{j\omega t}$)

稳态位移　$x_2(t)=A_2e^{j\omega t}=\frac{-jF_0e^{j\omega t}}{\omega Z_m}=\frac{F_0}{\omega|Z_m|}e^{j(\omega t-\frac{\pi}{2}-\varphi)}$

机械阻抗　$Z_m=|Z_m|e^{j\varphi}=R_m+j\left(m\omega-\frac{k}{m}\right)$

式中 $|Z_m|=\left[R_m^2+\left(m\omega-\frac{k}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$，$\tan\varphi=\frac{\left(m\omega-\frac{k}{\omega}\right)}{R_m}$。当外加激励力的频率 ω 等于系统固有频率 ω_0 时，系统达到速度共振，速度振幅的最大值为 $\frac{F_0}{R_m}$。

振子从激励力吸收的功率　振子的振幅和位相使吸收的功率正好等于耗散功率。吸收的功率 $W_m=\frac{1}{2}\cdot\frac{F_0^2}{|Z_m|}\cdot\cos\varphi$，最大吸收功率 $W_{m\max}=\frac{F_0^2}{2R_m}$(发生在 $\omega=\omega_0$ 时)。

2.耦合振动

包括 n 个振子的耦合系统在作自由振动时，有 n 种简正振动模式，对应有 n 个简正振动固有频率，其值仅决定于系统本身的参数及耦合情况，与激发条件无关。与单自由度系统类似，当外加激励力的频率与系统的固有频率相等时，系统也将发生速度共振。

3.傅里叶分析

在间隔 $\pm\pi$ 内的任一周期性函数都可表为

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

对单个非周期脉冲可以表示为傅里叶积分

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

其中 $F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$—— 谱函数。$f(t)$ 和 $F(\omega)$ 互为傅里叶变换。

4.弦的振动

弦是具有连续媒质特性的单个振子，也是波在媒质中传播的最简单例子。理想的振动弦是指具有一定长度、质量沿其长度均匀分布、性质柔顺的细丝或细绳用一定方式把它张紧，并以张力作为弹性恢复力进行振动的弹性体。弦振动的固有频率有无限多个。

(1) 振动方程

$$\frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$$

式中，$\eta(x,t)$ 为弦上任意点自平衡位置的位移(m)；$f(x,t)$ 为作用于弦单位质量外力；x 为长度方向的坐标(m)；$c = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}}$ 为弦中波的传播速度即声速(m/s)；T 为弦中张力(N)；ρ_L 为单位长度弦的质量即线密度(kg/m)。

(2) 通解

$$\eta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(A_i\cos\frac{\omega_i}{c}x + B_i\sin\frac{\omega_i}{c}x\right)(C_i\cos\omega_i t + D_i\sin\omega_i t)$$

式中 A_i、B_i 是由边界条件决定的任意常数；C_i、D_i 是由初始条件决定的任意常数；ω_i 是固有角频率，$\omega_i = 2\pi f_i$，f_i 为固有频率。

(3) 弦中波函数

$$\eta(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

式中 f_1、f_2 是以$(x \pm ct)$为宗量的任意函数。$f_1(x-ct)$ 表示沿 x 正方向以速度 c 行进的波，$f_2(x+ct)$ 表示沿 x 负方向以速度 c 行进的波。

5.棒的振动

这里的棒指的是均匀细棒，即棒长远大于半径，且同一截面上各点的运动是均匀的，组成棒的材料是坚硬的理想弹性固体。棒的振动可分为纵振动及横振动。

(1) 棒的纵振动

若沿棒轴方向敲击棒，则棒将产生压缩、伸张形变，即棒作自由纵振动。其恢复平衡的力主要由自身的劲度所产生，而张力与之相比可以忽略。棒两端的边界条件不同时，棒将作不同方式的简正振动。振动的频率是其基频的整数倍。棒作纵振动时，其压缩、伸张形变将以波的形式传播，即形成纵波(一维)。

运动方程可表示为

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}$$

式中，$\xi(x,t)$ 是沿棒轴方向的质点位移(m)；x 是沿棒轴方向的坐标(m)；$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$(m/s) 是棒中纵波的传播速度(声速)；$E(\mathrm{N/m^2})$ 是材料的弹性模量；$\rho(\mathrm{kg/m^3})$ 是材料的密度。方程的通解与弦振动相同。

通常的几种边界条件：(a) 两端固定，即 $\xi(x,t) = 0$；(b) 两端自由，即$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$；(c) 棒端

负载质量，即 $SE\frac{\partial \xi}{\partial x}=-m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$，$S$ 为横截面积，m 为负载质量；(d) 棒端受强制力作用，即 $SE\frac{\partial \xi}{\partial x}=F(t)$。

(2) 棒的横振动

若棒受到一个与棒轴垂直方向的作用力，则棒就会产生弯曲形变。由于棒的劲度，这种弯曲形变就要求棒恢复到其平衡状态，由此引起棒的弯曲振动即横振动。棒作横振动时，棒中质点位移方向与棒轴垂直。与纵振动类似，棒端不同的边界条件将使棒作不同方式的简正横振动，且相应的各次简正振动频率之间不成简单的整数比关系。棒中弯曲形变也以波的形式传播，形成棒中横波。横波的波速与频率的平方根成正比，棒此时表现为频散系统。

自由振动运动方程可表示为

$$\frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 \eta(x,t)}{\partial x^4}=f(x,t)$$

式中，$\eta(x,t)$ 是与棒轴方向垂直的位移；$f(x,t)$ 是单位长度质量的外作用力；x 是沿棒轴方向的坐标；$a^2=\frac{EI}{\rho S}=\frac{EK^2}{\rho}$；$I=\iint_{(s)} y^2\mathrm{d}s$ 为棒的横截面沿与棒轴垂直方向 y 转动时的惯性矩；$K^2=I/S$，K 称为转动截面的迴转半径；$c^2=\omega a$ 或 $c=\sqrt{f}\cdot\sqrt[4]{\frac{4\pi^2 EI}{\rho S}}$ 为横波波速(m/s)。

方程的通解可表示为

$$\eta(x,t)=\left[A\cosh\sqrt{\frac{\omega}{a}}x+B\sinh\sqrt{\frac{\omega}{a}}x+C\cos\sqrt{\frac{\omega}{a}}x+D\sin\sqrt{\frac{\omega}{a}}x\right]\cos(\omega t-\varphi)$$

式中 A、B、C、D 为待定常数。

常用的边界条件：(a) 棒端固定，即 $\eta(x,t)=0$ 及 $\frac{\partial \eta}{\partial x}=0$；(b) 棒端自由，即 $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}=0$，$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}=0$；(c) 棒端简单支撑，即 $\eta(x,t)=0$，$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}=0$。

例如，均匀细棒的一端固定，另一端自由，棒作自由横振动时的频率方程为

$$\frac{\cosh\sqrt{\frac{\omega}{a}}l+\cos\sqrt{\frac{\omega}{a}}l}{\sinh\sqrt{\frac{\omega}{a}}l-\sin\sqrt{\frac{\omega}{a}}l}=\frac{\sinh\sqrt{\frac{\omega}{a}}l+\sin\sqrt{\frac{\omega}{a}}l}{\cosh\sqrt{\frac{\omega}{a}}l+\cos\sqrt{\frac{\omega}{a}}l}$$

或

$$\cos\sqrt{\frac{\omega}{a}}l=-\operatorname{sech}\sqrt{\frac{\omega}{a}}l$$

令 $\beta_n=\sqrt{\frac{\omega_n}{a}}l$ 为满足频率方程的特征根，有 $\beta_1=1.875$，$\beta_2=4.694$，$\beta_3=7.855$，$\beta_4=10.995$，…，因此简正振动频率 $f_n=\frac{\beta_n^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$，其基频

$$f_1\approx\frac{0.56}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

6.膜的振动

均匀薄片材料、周围张紧、振动时恢复力主要由张力决定的称为膜。平面膜的振动，实际

上是把弦推广到二维空间即平面坐标的情况。从振动的膜最容易观察到实际两维空间中的波动现象。

膜的振动方程(即波动方程) 可写为

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

式中,$c=\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$ 为膜上波的传播速度(m/s);T 是表面张力(N/m);σ 是面密度(kg/m^2),即单位面积膜的质量,$\sigma=\rho h$,ρ 为膜的材料密度(kg/m^3),h 为膜的厚度(m);x、y 为膜平面中的坐标(m)。

(1) 矩形薄膜

四周固定,即有边界条件　　$\eta(x,y,t)=0$

其简正函数　　$\eta_{mn}=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\quad(m,n=1,2,3,\cdots)$

简正频率　　$f_{mn}=\frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}$,($a$、$b$ 为边长)

膜上简正振动方式是沿 x 方向有($m-1$) 条节线,沿 y 方向有($n-1$) 条节线。

(2) 圆膜中心对称振动

圆周固定,即有边界条件　　$\eta(a,t)=0$

简正振动函数　　$\eta_n(r,t)=A_nJ_0\left(\frac{\mu_n}{a}r\right)e^{j\omega_n t}$,($n=1,2,3,\cdots$)

式中 $\mu_1=2.405,\mu_2=5.520,\mu_3=8.654,\cdots$

简正振动频率　　$f_n=\frac{\mu_n}{2\pi a}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$

其基频　　$f_1=\frac{2.405}{2\pi a}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$

当此圆膜作受迫振动时,其振动方程为

$$\nabla^2\eta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}=\frac{p}{c^2\sigma}$$

式中,p 为膜上单位面积所受的外力(Pa),如声压 $p=p_a e^{j\omega t}$。于是

$$\eta(r,t)=\eta_a e^{j\omega t},\eta_a=\frac{p_a}{k^2T}\left[\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}-1\right]$$

式中,k 为波数。

平均位移振幅

$$\bar{\eta}_a=\frac{1}{\pi a^2}\int_0^a 2\pi\eta_a r\mathrm{d}r=\frac{p_a}{k^2T}\frac{J_2(ka)}{J_0(ka)}$$

式中,$J_0(ka)$、$J_2(ka)$ 为零阶及二阶贝塞尔函数。

7.板的振动

这里指的是“薄” 板。薄板的振动可视为棒的横振动在二维空间的推广。与膜相比,板的厚度与其两维尺寸相比不再是微小的。板在弯曲振动时虽然恢复其平衡的力主要是自身的劲度,但板中产生的应力、应变要比棒复杂得多。

均匀薄板的自由振动方程为

$$\nabla^4 \eta + \frac{12\rho(1-\sigma^2)}{Eh^2} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$$

式中，η 代表板中心面上任意一点在垂直方向的位移(m)；ρ 是板的密度(kg/m^3)；σ 是泊松比；E 是弹性模量(N/m^2)；h 是板的厚度(m)。

周界夹紧的圆板作谐和式自由振动的通解可表示为

$$\eta(r,t) = [AJ_0(kr) + BI_0(kr)]e^{j\omega t}$$

式中，A、B 是任意常数；J_0 是零阶贝塞尔函数；I_0 是双曲贝塞尔函数。

此圆板振动的简正频率是

$$f_n = \frac{\mu_n^2 h}{4\pi a^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\sigma^2)}}$$

其基频是 $f_1 \simeq \frac{0.47h}{a^2}\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}}$，泛频为 $f_2 = 3.91f_1, f_3 = 8.75f_1, \cdots$。式中的 μ_n 是 $\mu_1 = 3.20, \mu_2 = 6.30, \mu_3 = 9.44, \cdots$，当 $n > 3$ 时可用近似式 $\mu_n \approx n\pi$。

与圆膜类似，在第一共振频率以下的低频率，圆板也可视为质量弹簧系统，以圆板中心作为等效点时，相当于在圆心处有一等效质量 $M_{en} \simeq [2J_0^2(\mu_n)]m, m = \pi a^2 h\rho$ 为圆板的实际质量。对于基频，有 $M_{e1} \simeq 0.20m$。

8.电—力—声类比

若力学振动系统、声学系统和电振荡系统的运动微分方程在数学上相同，则它们运动微分方程中的对应项就相类似。于是利用电路理论就可较方便地得到力学振动系统、声振系统的运动特性。虽然这种类比只是一种近似方法，得不到精确的结果，但此方法的作用是重大的。类比方法特别适用于集中参数振动系统。

类比一般分为阻抗型类比和导纳型类比。力相应于电压，速度相应于电流的类比称为阻抗型类比。在导纳型类比中，速度相应于电压，力相应于电流。阻抗型类比更适合于声振系统，而导纳型类比更适宜力学振动系统。

如果采用阻抗型类比，则画类比电路的原则：若系统中几个元件的位移相等，则在类比电路中这几个元件串联；若几个元件的位移之和等于另一元件的位移，则在类比电路中这几个元件并联以后再与另一元件串联。同样的，如果作用于几个元件上的力不相等，而那些力的合力等于外作用力，则那些元件类比于电路中的串联元件；若作用于几个元件上的力都相等，则它们类比于电路中的并联元件。

(二)声学基础

声(波)是指在弹性媒质中传播的压力、应力、质点位移、质点速度的变化或几种变化的综合。引起这种变化的源称为声源。声波存在的区域称为声场。描述声场规律的物理量有声压 p(Pa)、质点振动速度 $\boldsymbol{u}$(m/s) 或位移(m)、密度变化或称压缩比 s。

1.理想流体媒质中的声传播

(1) 声波方程

① 运动方程　声波的运动方程是声压对于距离的梯度等于媒质密度和质点振动加速度乘积的负值,即

$$\nabla p = -\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t},$$

式中 ρ_0 是媒质中声波未传来之前的密度。

② 连续性方程　连续方程表明声振动中质量的连续性,即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{u}$$

③ 状态(物态)方程　声波在理想流体媒质中传播时没有热交换,因此遵从绝热定律。于是有状态方程

$$p = c_0^2 \mathrm{d}\rho$$

式中,c_0 称为声速(m/s)。

由上述三个基本物理方程可以得到用声压 p 表示的声波的波动方程,即

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2 p$$

式中,∇^2为拉普拉斯算符。

直角坐标系中 $$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

柱面坐标系中 $$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

球面坐标系中 $$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

(2) 声速

声速是声波在给定媒质的传播速度。

① 空气中的声速 c

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}\ (\mathrm{m/s});\text{或}\frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

式中,γ 是空气的定压比热容 C_P 与定容比热容 C_V 的比值,即 $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$;P_0(Pa)、ρ_0(kg/m^3)是平衡状态时的压强和密度;T 为绝对温度(K)。

一般计算 c 时可取

$$c = 331.45\sqrt{1 + \frac{t(℃)}{273.16}} = 331.45 + 0.61 \cdot t(℃)$$

在 15℃ 时可取 c 值为 340 m/s;每升高 1℃ 声速增加约 0.6 m/s。

② 流体中的声速 c

$$c = \sqrt{\frac{K_s}{\rho_0}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_s \rho_0}}$$

式中,K_s 是绝热体积弹性模量;β_s 是绝热体积压缩系数$\left(\beta_s = \frac{1}{K_s}\right)$;$\rho_0$ 是流体的密度。

③ 无限固体媒质中的声速

$$c = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho_0(1+\sigma)(1-2\sigma)}}$$

式中，E 是(杨氏)弹性模量(N/m^2)；σ 是泊松比；ρ_0 是媒质密度(kg/m^3)。

当固体的横截面尺寸小于波长时，可以略去用泊松比来考虑的横向效应，则声速可简化为

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

(3) 平面声波

由于波阵面是一系列无限大的平面，如它垂直于 x 轴时，在传播过程中这些波阵面始终相平行，于是声波方程即为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

通解为

$$p(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

式中，$f_1(x - ct)$ 表示正向行波；$f_2(x + ct)$ 表示反向行波。声波在无限媒质中传播时不存在反向行波。

对于简谐振动，声压的形式为

$$p(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t \pm \frac{x}{c}\right) - \varphi\right] \quad (\mathrm{Pa})$$

或用复数表示

$$p(x,t) = \mathrm{Re}[Ae^{j[\omega t \pm kx - \varphi]}]$$

式中，$k = \omega/c$ 是波数；ω 是角频率。

平面波的特性阻抗是

$$Z = \frac{p}{u} = \rho_0 c \quad (\mathrm{kg/(m^2 \cdot s) = Rayleigh})$$

平面波传播时具有的特性：(a) 声场中任意地点声压和质点振速同相位；(b) 在理想媒质中声压和质点振速均不随距离变化；(c) 媒质的特性阻抗是常数；(d) 平面波的声强 $I = \dfrac{p_m^2}{2\rho_0 c}$ (W/m^2) 是常数；(e) 平面波的声功率 $W_a = IS = \dfrac{p_m^2 S}{2\rho_0 c}$ (W)，S 为面积。这里 p_m 是声压的振幅值。

(4) 球面声波

① 均匀球面波

对于均匀球面波，声压 p 只与球坐标的 r 有关，于是波动方程为

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2}$$

通解为

$$p(r,t) = \frac{A}{r}f\left(t \mp \frac{r}{c}\right)$$

式中，负号代表以速度 c 沿半径向外发散的球面波，正号代表向球心汇聚的球面波(反向波)。在无限媒质中不存在反向波。

对于谐和球面行波场，

$$p(r,t) = \frac{A}{r}e^{j(\omega t - kr)} \quad (\mathrm{Pa})$$

$$u(r,t) = \frac{1}{\rho_0 c}\frac{A}{r}\left(1 + \frac{1}{jkr}\right)e^{j(\omega t - kr)} \quad (\mathrm{m/s})$$

球面波的声阻抗率为

$$Z_s = \frac{p}{u} = \rho_0 c \frac{jkr}{1 + jkr} \quad (\mathrm{Rayl.})$$

对于球面波，媒质的声阻抗率 Z_s 一般是复数，由纯阻和纯抗两部分组成，并与半径 r（传播距离）及波长 λ 有关。因此场中某点的声压和质点振速不同相，球阻波声阻抗率的幅值为 $\rho_0 c\cos\theta$，它比平面波的声阻抗率要小。

球面波的传播特性：(a) 在理想媒质中，声压与球面波的半径成反比；(b) 声压与质点振速之间的相位差与 $\frac{r}{\lambda}$ 成反比；(c) 媒质的声阻抗率 Z_s 为复数，当球面波半径很大时，纯抗分量可以忽略；(d) 半径很大处的声强近似于平面波阵面 $I = \frac{p_m^2}{2\rho_0 c}$，$p_m = \omega\rho_0 A/r$，声强与传播距离平方成反比；(e) 辐射的声功率 $W_a = 4\pi\gamma^2 I = \frac{2\pi(rp_m)^2}{\rho_0 c} = \frac{(\omega\rho_0 A)^2 2\pi}{\rho_0 c}$。

② 一般球面波

当球形声源表面作谐和式非对称振动时，辐射场为一般球面波，波动方程的通解为

$$p(r,\theta,\varphi,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}\left[A_m h_m^{(2)}(kr) + B_m h_m^{(1)}(kr)\right] P_m^{(n)}(\cos\theta) \times (A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

式中，$h_m^{(1),(2)}(kr)$ 为球汗克尔函数，$P_m^{(n)}(\cos\theta)$ 是连带勒让德函数。

$$h_m^{(1),(2)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}H_{m+\frac{1}{2}}^{(1),(2)}(kr)$$

其中 $H_{m+\frac{1}{2}}^{(1),(2)}(kr)$ 是 $\left(m+\frac{1}{2}\right)$ 阶汗克尔函数。

$$H_{m+\frac{1}{2}}^{(1),(2)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{m+\frac{1}{2}}(kr) \pm \mathrm{j}\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}N_{m+\frac{1}{2}}(kr)$$

其中，$J_{m+\frac{1}{2}}(kr)$、$N_{m+\frac{1}{2}}(kr)$ 是 $\left(m+\frac{1}{2}\right)$ 阶的贝塞尔函数和纽曼函数。

(5) 柱面波

若声源为长圆柱形，其长度远大于波长，则辐射的是柱面波。均匀柱面波的波动方程是

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

对于谐和振动，其通解是

$$p(r,t) = \mathrm{j}\omega\rho_0\left[A_0 H_0^{(2)}(kr) + B_0 H_0^{(1)}(kr)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

或

$$p(r,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\left[J_0(kr) \pm \mathrm{j}N_0(kr)\right]$$

式中，$H_0^{(1),(2)}(kr)$ 是零阶第一、二类汗克尔函数；$H_0^{(2)}(kr)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 表示向柱外发散的柱面波；$H_0^{(1)}(kr)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 表示向柱收拢的柱面波（反向波）。

$$H_0^{(1)}(kr) = J_0(kr) + \mathrm{j}N_0(kr)$$

$$H_0^{(2)}(kr) = J_0(kr) - \mathrm{j}N_0(kr)$$

当 kr 较大，近似地行波解可表示为

声压　$p(r,t) \simeq \frac{A}{\sqrt{\frac{\pi kr}{2}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{4}\right)}$（$A$ 是由柱表面条件决定的常数）；

振速　$u(r,t) \simeq \frac{p}{\rho_0 c}\left(\frac{1}{\mathrm{j}2kr} + 1\right)$；

声阻抗率　$Z_s \simeq \rho_0 c$　（$kr \gg 1$ 时）。

柱面波的传播特性：(a) 在理想媒质中，声压近似地与距离的平方根成反比；(b) 媒质的声阻抗率为复数，当 kr 很大时，声抗分量可以忽略；(c) 在距离较大时，柱面波声强 $I = \frac{1}{\pi kr}\frac{A}{\rho_0 c}$，声强与距离 r 成反比；(d) 每单位长度柱辐射的声功率 $W_a = 2\pi rI = \frac{2A}{k\rho_0 c}$。

当柱形波阵面上振幅分布不均匀时，则一般柱面波势函数可写为

$$\Psi(r,\varphi,Z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}[A_n H_n^{(2)}(kr) + B_n H_n^{(1)}(k_r r)](A e^{-jk_z z} + B e^{jk_z z}) \times \cos(n\varphi - \varphi_n)e^{j\omega t}$$

式中，$k^2 = k_r^2 + k_z^2$，$k = \sqrt{k_r^2 + k_z^2} = \frac{\omega}{c}$ 为波数。

2.声波传播的基本现象

(1) 声波的反射和折射

从几何观点来看，波阵面在远离任何声源时就近似于平面形状，因此通常近似地看作平面波的反射和折射。

当声波自一种媒质入射到另一种媒质时，若它们的特性阻抗不同，就会使部分声能折回到第一种媒质，形成反射波；部分声能透过边界形成折射波(或称透射波)。这时有

$$k_1\sin\theta_1 = k_1\sin\theta'_1 = k_2\sin\theta_2$$

式中，$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$、$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$ 是第一、二媒质中的波数，θ_1 是入射角，θ_2 是折射角，θ'_1 是反射角。由此得到

反射定律：反射角与入射角相等，即 $\theta'_1 = \theta_1$；

折射定律：入射角的正弦和折射角的正弦的比值等于两种媒质中的声速之比，即

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2} = n(\text{折射率})$$

声波完全不传到第二媒质而由分界面处全部反射的现象称为全(内) 反射。

如果 $c_2 > c_1$，$n < 1$，则折射角大于入射角。因此可能有一个入射角使折射角 θ_2 等于 90°，即 $\sin\theta_2 = 1$，这时 $\sin\theta_1 = n$，这样的入射角 θ_1 称为入射临界角 θ_k。入射角 θ_1 大于临界角 θ_k 时，发生全反射现象，$\theta_k = \sin^{-1}\frac{c_1}{c_2}$。

若两种媒质的特性阻抗 $\rho_0 c$ 值相差很远，而入射角或折射角不接近 90°，能量也基本上是完全反射，则有

① 媒质 2 是刚性壁时，$\rho_2 c_2 \gg \rho_1 c_1$，这时声强的反射系数 $R_1 = \frac{I_1}{I_0} = 1$，而声强的折射系数 $T_1 = \frac{I_2}{I_0} = 0$。式中 I_0 是入射波声强，I_1 是反射波声强，I_2 是折射波声强。

② 媒质 2 是软性壁时，$\rho_2 c_2 \ll \rho_1 c_1$，也有 $R_1 = 1$，$T_1 = 0$。

当平面波通过空气和水的边界时，声波不论从哪一方向入射，声能几乎全被反射。

如果分开两种媒质的边界具有无限平面形状，则反射角等于入射角，那么这种边界的反射称为镜反射。这时完全反射问题可采用声像法求解。若声源在反射面上方，并且附近没有其他物体存在时，则上方声场可以把自声源传来的直达声和来自虚声源的声按相位关系叠加而求出。

声反射及声折射也可能出现在单一媒质中声速分层不均匀情况。例如大气中或海洋中，由于各处风或温度、密度的不同，都会产生反射、折射现象。

(2) 波导中的声传播

声波在有边界限制的空间传播，称作波导中的声传播。在给定的波导中声波传播是按简正波形式。显然波导的截面形状、尺寸、波导材料及声源的振动状态等都会对波导中的声波产生影响。构成波导本身的媒质和边界材料可以是固体，也可以是流体。常见的波导有平面层、圆管、矩形管等。

① 刚性壁矩形波导管

波动方程 $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$

管中简正波形式解 $p(x,y,z,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\cos k_x x\cos k_y y\cdot e^{j(\omega t-k_z z)}$

式中，$k_z=\sqrt{k^2-(k_x^2+k_y^2)}=\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\beta_{mn}^2}$，$k=\frac{\omega}{c}$ 为波数；$\beta_{mn}^2=\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]\pi^2$，$a$、$b$ 为矩形截面 x 和 y 方向的边长，(m,n) 是整数。

管的截止频率　选择 $f_c=\frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2}$ 和 $f_c=\frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2}$ 中较低者。

高次简正波的相速度 $c_p=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_{mn}}{k}\right)^2}}=\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\pi^2c^2}{\omega^2}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]}}$

高次简正波的群速度 $c_g=c\sqrt{1-\frac{\pi^2c^2}{\omega^2}\left(\frac{m}{a}\right)^2}$

管中简正波蜕化为沿轴衰减波条件

$$k=\frac{\omega_{mn}}{c}<\beta_{mn}$$

(m,n) 号简正波的截止频率

$$f_{mn}=\frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

② 刚性壁圆柱形波导管

波动方程 $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$

管中简正波 $p(r,\theta,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{nm}J_n(k_r r)\cos(n\theta-\theta_n)e^{j(\omega t-k_z z)}$

式中，$k_{nm}=\sqrt{k^2-k_r^2}=\sqrt{k^2-\left(\frac{\gamma_{nm}}{a}\right)^2}$，$k=\frac{\omega}{c}$ 为波数，a 是管的半径，γ_{nm} 是 $J'_n(x)=0$ 的根。

管的截止频率 $f_c=f_{10}=1.84\frac{c}{2\pi a}$，或

$$f_c=f_{01}=3.83\frac{c}{2\pi a}(\text{声源作轴对称振动})$$

高次简正波的相速度 $c_{p_{nm}}=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\gamma_{nm}}{ka}\right)^2}}$

γ_{nm} 的数值

n \ m	0	1	2
0	0	3.83	7.02
1	1.84	5.33	8.54
2	3.05	6.71	9.97

高次简正波的群速度 $c_g = c\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_{nm}}{ka}\right)^2}$

(3) 声波的散射

在声场内，当声波碰到线度小于波长的障碍物时，声波就朝各个方向散射。

对于声场内小的刚性散射体，其远场散射波声压振幅与其体积成正比，与波长平方成反比，与该散射体至观察点的距离成反比。因此，波长长的声波具有弱的散射效应。反之，波长短的声波具有强的反向散射效应，且散射波的强度与声波频率的四次方成正比。

当媒质中存在弹性与密度不同的障碍物时，声波也产生散射。

(4) 声吸收

声波通过媒质或射到媒质表面上时可能损失一些能量，这种声能减少的过程即称声吸收。在纯媒质中产生声吸收的原因是媒质的粘滞性、热传导及媒质的微观分子过程引起的弛豫效应等。

如果在媒质中含有悬浮微粒，如空气中的灰尘、雾滴、雨滴、江海中的气泡、泥沙、浮游生物等，那么当声波通过时，就会有散射及摩擦引起的附加能量损耗。

固体中声能的吸收主要起因于声波与晶格振动、声波与电子运动间的相互作用以及铁磁效应和铁电效应等。

(5) 声滤波

像任何其他形式波动的滤波作用相似，声滤波(或称声波的选通）是一种用以消除某些特定频率(或频带)(或对应波长）的声波而让其余声波通过的过程。用于声波选通的装置称为声滤波器，如消声器、增压室、共鸣器、声阱或消声装置。

3.声波的幅射和接收

(1) 声辐射

声源在媒质中振动时，由于周围媒质与振源表面存在相互作用，因而能使振源的部分能量变成媒质中的声能，这种过程就称为声波的辐射。

实际的声源有多种多样。最简单的是各向同性辐射的脉动球体，它的表面随时间按余弦(或正弦）方式作膨胀、收缩，这时它辐射的声能各方向是均匀的。当此球源的尺度远小于波长时，就称其为点声源(通常要求半径 $a < \frac{\lambda}{6}$)。实际中，当声源的尺度比波长小很多时，不管辐射器具有什么形状，只要辐射器各部分基本上是同相位振动就可视为点声源。若声源振动面的尺度大于波长时，它辐射的声场与脉动球源就显著不同。这时由于振动面各部分振动传到达空间点的时间不同，因此出现相位干涉而形成不均匀的指向性辐射。在实际应用中常利用这种现象对振动面作不同形状、尺寸的排列，以达到所需的定向辐射图案。