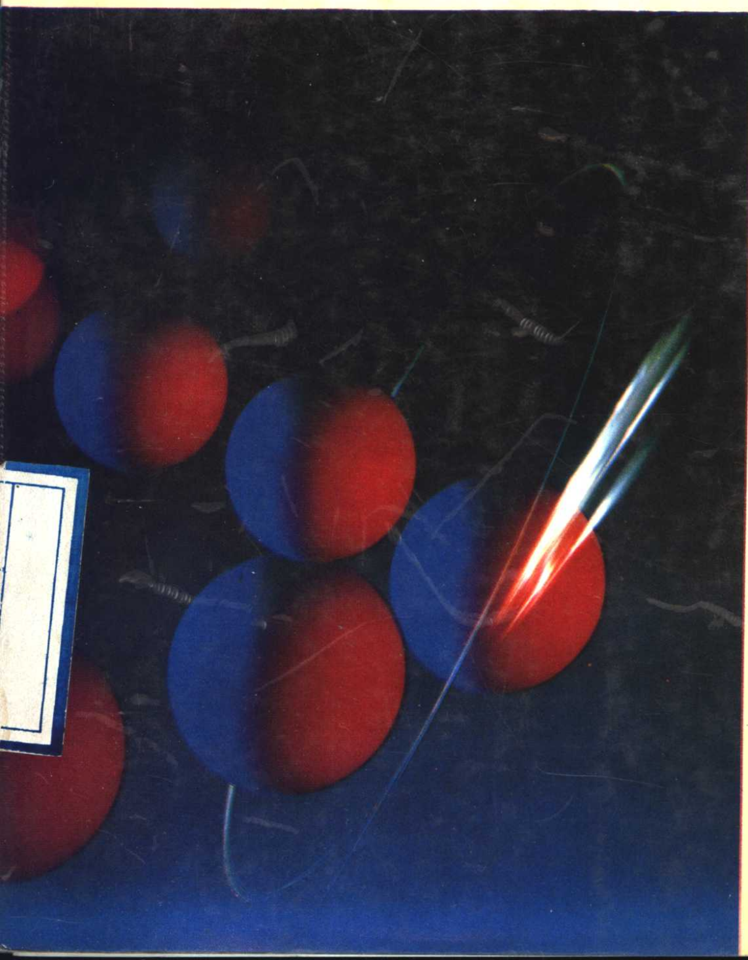
双曲几何

HYPERBOLIC GEOMETRY

走向数学丛书

李 忠 周建莹 著



双曲几何

走向数学丛书

双曲几何

李忠
周建莹 著

湖南教育出版社

双 曲 几 何

Hyperbolic Geometry

李忠 周建莹 著

Li Zhong Zhou Jianying

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷三厂印刷

787 ×1092毫米 32开 印张：4.875 字数：100000

1991年12月第1版 1991年12月第1次印刷

印数：1—1100

ISBN 7－5355－1376－X／G·1371

定 价：2.55元

作者简介

李忠，男，1936年8月20日生于河北省河间县。1949年至1955年在保定一中读书。1955年考入北京大学数学力学系，1960年毕业并留校任教。1979年任副教授。1979年至1981年在瑞士苏黎世大学数学研究所做访问学者。1981至1983年任北京大学分析与函数论教研室主任。1984年至1987年任北京大学数学系副主任。1985年任教授及博士生导师。1987—1991年任北京大学数学系主任。

主要研究领域为复分析，在拟共形映射、黎曼曲面、台希米勒空间、复解析动力系统等方面有较深入的研究。著有《拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用》等专著及学术论文四十余篇。其研究成果荣获国家教委科技进步奖二等奖（1986年）及国家自然科学奖三等奖（1989年）。曾应邀去西德、瑞士、法国及芬兰等国做学术交流与讲学。

李忠教授现任中国数学会常务理事兼秘书长、北京市科协委员、国家教委教学指导委员会委员及《数学学报》等杂志的编委。

作者简介

周建莹，女，生于1936年12月5日。祖藉无锡。1949年至1955年在无锡市读中学。1955年考入北京大学数学力学系，1960年毕业。1961年至1962年在青岛山东海洋学院任教，1962年调回北京大学数学系任教。1983年任北京大学高等数学教研室副主任。1985年任副教授。

研究领域为常微分方程与动力系统，在常微分方程的定性理论、台劳映射的紊动行为以及复解析动力系统等方面发表了十余篇论文。著有《高等数学》等书。

周建莹现任美国《数学评论》评论员。

前　言

王　元

从力学、物理学、天文学直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学。一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三、四年有数学课。可见数学之重要与其应用之广泛。

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏。我以为要克服这个鸿沟，还是有可能的。近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握。我想，如果知道讨论的对象的具体背景，则有可能掌握其实质。显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到。若停留在初等数学水平上，哪怕做了许多难题，似亦不会有助于对近代数学的了解。这就促使我们设想出一套“走向数学”小丛书，其中每本小册子尽量用深入浅出的语言来讲述数学的某一问题或方面，使工

程技术人员，非数学专业的大学生，甚至具有中学数学水平的人，亦能懂得书中全部或部分含义与内容。这对提高我国人民的数学修养与水平，可能会起些作用。显然，要将一门数学深入浅出地讲出来，决非易事。首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解。从整体上说，我国的数学水平还不高，能否较好地完成这一任务还难说。但我了解很多数学家的积极性很高，他们愿意为“走向数学”撰稿。这很值得高兴与欢迎。

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社支持，得以出版这套“走向数学”丛书，谨致以感谢。

序　言

除专业数学工作者之外，大多数人只知道一种几何——那就是中学里学的欧几里德几何。人们对于非欧几何是陌生的，甚至感到有些神秘。当人们第一次听到在非欧几何中，

没有矩形存在，

三角形面积不能任意大，

两个三角形相似就全同，

毕达格拉斯定理不再成立，

……

不禁感到不可思议，天下竟会有这样的事！难道我们习以为常的欧氏几何错了吗？非欧几何有什么用途呢？

现在这本小册子就试图用一种容易为大家所理解的方式来介绍双曲非欧几何，即罗巴切夫斯基几何。具有高中数学基础的人都能看懂这本书的主要部分（即前两章，占全书的80%）。具有大学数学基础的人可以毫无困难地阅读全书。

大家知道，罗巴切夫斯基几何是由于在欧几里德几何的公理系统中将平行公理作了更换之后而形成的。但是，我们这本书不打算用同样的方式来讲解这种非欧几何，也就是说，我们不打算从公理系统出发，然后靠逻辑推理来推演出全部罗巴切

夫斯基几何，因为这样做会让人感到这种几何缺乏真实感，甚至会被人认为不过是数学家们的逻辑游戏罢了。

本书的讲法是“模型式”的，也就是说，我们结合非欧几何的一个模型（人们称之为庞卡莱模型）来讲。我们选择了这种讲法，主要是想打破对非欧几何的神秘感，使人们感到它是一种实在而自然的几何。其次，我们选中庞卡莱模型，还因为它在现代数学中仍扮演着一个重要角色。了解这一模型对于人们了解现代数学不无益处。即使对于专修数学的大学本科生而言，了解这一模型也是必要的。

在撰写这本书的过程中，最主要的困难是如何避免高等数学(尤其是解析函数论)的知识，以期具有高中数学知识的读者能看懂主要内容。我们不得不进行一番“初等化”的改造工作，使得一切叙述（第三章除外）都化作复数运算及欧氏平面几何的定理。在了解了分式线性变换的基本性质之后，读者会感到非欧几何在这个模型中的一切命题都是十分自然的事。

第一章讲分式线性变换，是为全书的讨论作准备的。不了解分式线性变换的读者切不可性急地跳过这一章去读第二章。这里必要的耐心是需要的，何况它本身也是很有趣的。第二章是本书的基本内容，我们从罗巴切夫斯基几何诞生的历史讲起，然后叙述如何在单位圆中实现这一几何。这里我们着重强调了非欧几何与欧氏几何那些不同之处，而那些共同成立的命题(如三边对应相等则三角形全同）自然就无须多讲了。最后我们讨论了非欧几何与欧氏几何之间的关系，我们说明了欧氏几何是曲率半径无限大时非欧几何的极限，把非欧几何中的各种公式取极限后就得到欧氏几何中相应的公式。在结束这一章之前我们还讨论了现实空间是欧氏的还是非欧的问题。

第三章写了双曲非欧几何在函数论中的应用。从许瓦兹引

理的双曲度量解释讲起，讲了毕卡定理的证明、模函数及正规族理论，最后叙述了在复解析动力系统中的若干应用。这一章的篇幅很小，这些应用仅仅是举例而已，不是全面介绍。至于非欧几何在物理以及在数学的其它分支中的广泛应用，本书就更无法介绍了。

尽管这本书中前两章没有使用高等数学的语言，但是由于所讨论的问题及处理的方式完全不同于初等数学，所以一个仅具有初等数学知识的读者读起来还是会有些困难的，甚至有些地方要花些气力才成。读者不能期望读一遍就能立即领会与理解所说的内容，复杂的部分要反复读和反复思考，甚至需要读到后面时再返回来读。

为了加深理解，边读边练习是非常必要的。书中为了省篇幅，有时要有意地省略一些计算与推导。对于书中所说的“显然”或“简单计算可知”之类的话，凡读者不感到显然或简单者，一律应该自己补上证明与计算。这是一个极好的练习。前两章后面都附有习题，这些题目一般较难。对于这些题目，不应该只当作习题去做，更重要的是思考一下，它告诉了我们一些什么。一个善于学习的读者，所做的题目决不只局限于书中已经有的。在学习第二章时，读者自然会联想到一系列的欧氏几何的命题，考虑是否在非欧几何中还成立。自己提问题，自己回答；不只学习，还在发明创造，这样做是很有趣味的。非欧几何也就不那么神秘了！

作者　李忠　周建莹

于北京大学中关园，

一九九〇年五月二十九日。

目　录

第一章　分式线性变换

分式线性变换又叫麦比乌斯变换(Möbius, 1790—1868)，这是一类优美的几何变换。它在后面我们讨论双曲非欧几何时扮演着重要的角色。作为准备知识，本章将系统地介绍它的基本性质与分类。此外还将介绍与此有关的反演变换。已经熟悉这些内容的读者可以直接阅读下一章。

§1 复数与几何

本书的主题是几何，但使用的工具却是复数。所以我们不妨先从复数与几何的联系讲起。

复数最初是为了解二次代数方程式而引入的。但仔细想想就发现，对于解二次方程而言，引进复数并没有带给我们任何“实际好处”。只不过是在$b^2-4ac<0$时把方程式$ax^2+bx+c=0$视作有根，而这种根是一种不同于实数的数罢了。至于这种数是什么，谁也没有提供进一步的信息。

从历史上看复数的第一次有实际意义的应用恐怕是解三次方程式与四次方程式。一个一般形式的三次方程式通过一个简单变换总可化归成下列形式：

$$x^3+px+q=0.$$

利用配方的办法就可以得到这个方程的根的公式

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

这个公式最早是由塔尔塔里雅（Tartaglia，1500—1557）得到的，但习惯上仍叫作卡尔丹(Cardan，1501—1576)公式。

我们把发明权的争论留给历史学家们，而仔细考查一下这个公式。当

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

时，原来的三次方程仍然有可能有实根。(你能自己举出例子吗?)然而这个实根却要经过复数的运算才能获得。（因为这时在卡尔丹的公式中出现了复数。)这真是奇妙之极!

四次方程也有类似的情况。

尽管复数在解代数方程中有着不可缺少的作用，但人们总对它有一种虚无飘渺之感。经过几个世纪怀疑与争论，到了高斯(Gauss，1777—1855）的时代，情况发生了根本的变化。高斯把复数$z=x+iy$解释为平面上的点(x,y)或自原点至点(x,y)的向量。这样一来，人们对于复数有了某种真实感，并逐渐习以为常地接受下来。

不仅如此，高斯对复数的几何解释使得复数与几何从此结下不解之缘。复数的作用也就大大超出了解方程的范围。

今天现代数学的几乎所有分支都与复数有关。就连研究整数的数论也离不开复数。

复数与几何的关联使得许多平面的几何问题在借助于复数运算处理时显得十分方便。这在后面的讨论中会看到这一点。

由于复数是我们的基本工具，所以我们要求读者熟悉复数的几何表示及各种运算。今后，我们用$\mathbb{C}$表示全体复数的集合，又表示复平面。用$\mathbb{R}$表示全体实数的集合，又表示复平面上的实轴。有关复数的记号，如$\mathrm{Re}z$，$\mathrm{Im}z$，$\bar{z}$，$|z|$等，都与一般中学课本中一致。辐角$\arg z$本书中特别规定其取值范围为$(-\pi,\pi]$。这一点可能与某些书不一致，请读者留意。

§2 复球面——直线与圆周的统一

世间一切对立着的事物都在一定的条件下达到统一。直线与圆周也是如此。而且在后面的讨论中我们须要把它们统一起来。

我们先来看看直线与圆周的复方程如何从形式上得到统一。平面上取定直角坐标系之后，一条直线的实坐标的方程是

$$ax+by+c=0,\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$$

令$z=x+iy$并注意到$x=(z+\bar{z})/2$与$y=(z-\bar{z})/2i$，立即就得到这条直线的复方程

$$(a-ib)z+(a+ib)\bar{z}+2c=0.$$

因此，一条直线的复方程的一般形式是

$$\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0,\ \beta\in\mathbb{C},\ \gamma\in\mathbb{R},\tag{2.1}$$

其中$\beta\neq0$。

以点$z_0\in\mathbb{C}$为中心，以$r\in\mathbb{R}$为半径的圆周的复方程显然是$|z-z_0|=r$或$|z-z_0|^2=r^2$。表面上它与直线方程相差甚远，但是经过一番变形之后就会发现它们的共同之处。

注意到$|z-z_0|^2=(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)$，方程$|z-z_0|^2=r^2$可写为

$$z\bar{z}-\bar{z}_0z-z_0\bar{z}+|z_0|^2-r^2=0.$$

对上述方程两端各乘以实数$\alpha\neq 0$，就变成

$$\alpha z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0,\ \beta\in\mathbf{C},\ \alpha,\gamma\in\mathbf{R}, \tag{2.2}$$

其中

$$\beta=-\alpha z_0,\ \gamma=\alpha(|z_0|^2-r^2). \tag{2.3}$$

反过来，任意给一个方程$\alpha z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0$(其中$\beta\in\mathbf{C}$, α, $\gamma\in\mathbf{R}$)，如果适合下列条件

$$\alpha\neq 0,\ \alpha\gamma<|\beta|^2, \tag{2.4}$$

则一定代表一个圆周。请读者证明这一结论，并求出该圆周的圆心与半径(提示：注意(2.3))。

比较直线与圆周的复方程(2.1)与(2.2)就发现两者只差一项。前者是后者的特殊情况：$\alpha=0$。

总之，方程式

$$\alpha z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0,\ \beta\in\mathbf{C},\ \alpha,\ \gamma\in\mathbf{R} \tag{2.5}$$
$$(\alpha\gamma<|\beta|^2)$$

代表圆周($\alpha\neq 0$)或直线($\alpha=0$)。直线与圆周有了统一的表达形式。

圆周与直线的统一又可以通过无穷远点的引入实现。这导致复球面的概念。

在三维空间中取定一个直角坐标系$Oxyw$，并考虑一个以点$(0,0,1/2)$为中心、以$1/2$为半径的球面S，如图1—2.1。

我们将点$(0,0,1)$称作球面S的北极并记为n。对于任意一点$p\in S-\{n\}$，我们作n至p的连线并延长之，势必交坐标平面Oxy于一点p'。这时称p'为p点的测地投影，而对应$p\mapsto p'$称为球极映射。显然，这个映射是$S-\{n\}$到坐标平面Oxy的一个