

教育部重点科研项目成果

中学生数学学习



心理学

ZHONGXUESHENG SHUXUE XUEXI
XINLIXUE

朱文芳 著

浙江教育出版社
ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSH

中学生数学学习

心理学



ZHONGXUESHENG SHUXUE XUEXI
XINLIXUE



ISBN 7-5338-5778-X



9 787533 857783 >

ISBN 7-5338-5778-X/G·5748

定价：25.00 元



教育部重点科研项目成果

中学生数学学习



心理学

ZHONGXUESHENG SHUXUE XUEXI
XINLIXUE

朱文芳 著

北京师范大学图书馆 2005.9

浙江教育出版社
ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

中学生数学学习心理学 / 朱文芳编著. — 杭州: 浙江教育出版社, 2005.5

ISBN 7-5338-5778-X

I. 中... II. 朱... III. 数学课-学科心理学-中学
IV. G447

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 040849 号

中学生数学学习心理学

朱文芳著

ZHONGXUESHENGSHUXUEXUEXIXINLIXUE

出版发行 浙江教育出版社
(杭州市天目山路 40 号 邮编: 310013)

责任编辑 蒋 婷

装帧设计 韩 波

责任校对 陈云霞

责任出版 程居洪

图文制作 杭州富春电子印务有限公司

印刷装订 杭州富春印务有限公司

开 本 787×1092 1/16

印 张 11.25

字 数 225000

版 次 2005 年 5 月 1 版

印 次 2005 年 5 月 1 次

印 数 1000

书 号 ISBN 7-5338-5778-X/G·5748

定 价 25.00 元

联系电话: 0571-85170300-80928

E-mail: zjjy@zjcb.com

网 址: www.jys.zjcb.com



序

林崇德

在我的面前,放着朱文芳博士的书稿:《中学生数学学习心理学》。在这部书稿中,作者阐述了数学学习的心理机制,学生数学能力的结构及其发展,影响学生数学学习的因素,全书11章,近20万字,颇有功力。

朱文芳博士原先是学习数学的,她是数学系的副教授。因为有数学教育专业的特长,又对发展心理学学科感兴趣,于是她于2000年获得了心理学的博士学位,找到了研究数学能力的结合点,即从发展心理学的角度,去研究学生数学能力的发展特点。接着又出国深造一年数学教育,进一步完善其知识结构。就这样,构成了这部书稿的特点,即出自一位数学家加心理学家之手,论述了中学生数学学习心理学问题。

《中学生数学学习心理学》一书有两大特点。一是明显地具有创造性。以往人们谈数学能力,着重谈运算能力、空间想象能力和数学思维能力,可是在本书中,作者却从学生的数学语言能力、数与数量关系能力和数学空间能力来展开数学能力的结构及其发展;以前数学教育界也在探索影响学生数学学习的因素,但像本书作者那样,从学生的非智力因素、数学的本质、数学学习方法、数学教师的特征和数学学习的环境等五个方面,全面地来研究影响因素的却是首次。这些创新点是难能可贵的。

另一个特点是具有应用价值。本书坚持理论联系实际,突出实用性。不论是从学生数学能力发展方面入手探讨,还是系统地阐述影响学生数学学习的种种因素,其出发点是和中学教师在讨论如何教好数学,并启发中学生怎样学好数学。这些实际意义就加大了本书的可读性和实效性。

我曾从心理学观点出发强调了提高学生数学能力的重要性,并指出在讨论学生数学能力结构中,应考虑到数学能力的特殊性;应考虑到学生的数学能力是其数学学习与智能发展的结晶,尤其要重视概括能力和思维品质;应考虑到数学能力的稳定性与可发展性,尽管作为智能结构具有稳定的一面,但同时可以通过教学提高学生的数学能力。而我高兴地看到,朱文芳博士在《中学生数学学习心理学》一书中,比我讲得要更透彻、更具体和更实在,展示了本书的科学性。

我相信《中学生数学学习心理学》的出版,在中学数学教育界会引起良好的反响,会获得应有的社会价值。

是为序。

2005年元旦于北京师范大学

目录

序	1
上篇 中学生数学学习心理学概论	
第一章 中学数学学习心理学的研究综述	1
第一节 数学学习心理学的对象与任务	1
第二节 数学学习心理学的学科特征	3
第三节 中学生数学学习心理学的研究状况	8
第四节 未来中学数学学习心理学研究的方向	10
第二章 数学教育的发展历程	14
第一节 中国数学教育的演变	14
第二节 外国数学教育的演变	20
第三章 数学学习的心理机制	28
第一节 数学学习的生理学基础	28
第二节 数学学习的心理机制	32
第三节 数学学习的基本规律	40
第四节 关于数学能力的研究	43
第四章 学生数学语言能力的发展	49
第一节 数学语言概述	49
第二节 中学生数学语言能力的发展状况	54
第三节 数学语言与数学学习	59
第五章 学生数与数量关系能力的发展	62
第一节 人的数概念是怎样产生的	62
第二节 数学课程中所包含的数与数量关系	63
第三节 中学生数与数量关系能力的发展状况	64
第四节 怎样提高学生的数与数量关系的能力水平	70
第六章 学生数学空间能力的发展	77
第一节 数学空间能力概述	77
第二节 中学生数学空间能力发展的状况	82
第三节 怎样提高学生的数学空间能力水平	87

下篇 影响中学生数学学习的因素分析

第七章 学生的非智力因素	93
第一节 关于非智力因素的几个问题	93
第二节 数学学习的兴趣、态度、动机与激励	96
第三节 数学学习过程中的情绪情感、意志和挫折	99
第四节 数学学习过程中的气质与性格	102
第八章 数学的本质	105
第一节 数学本质的演变	105
第二节 数学学科的特征	108
第三节 数学科学发展的动力	111
第四节 我们拥有什么样的数学教育观念	115
第九章 数学学习方法	122
第一节 一般的学习方法	122
第二节 数学学习方法介绍	125
第三节 中学数学学习方法介绍	132
第十章 数学教师的特征	138
第一节 对数学教师的要求与数学教师的真实形象	138
第二节 中学数学教师的数学专业知识结构	141
第三节 中学数学教师的教育、心理学知识	142
第十一章 数学学习的环境	151
第一节 社会环境	151
第二节 家庭环境	154
第三节 学校环境	158
索引	163
参考文献	167

第一章 中学数学学习心理学的研究综述

数学学习心理学的研究对象与基本任务是什么？本书的第一章将开宗明义地作简要的阐述。虽然，数学、学习、心理学经常被人们使用，但将三者结合在一起构成一门学科，听起来却是较为生疏的。所以，我们先来看一看，数学学习心理学的对象及其任务是什么。

第一节 数学学习心理学的对象与任务

1.1 数学学习心理学的研究对象

现代社会里，一个人成长到一定年龄就需要从事数学学习活动。从牙牙学语开始，家长就开始教孩子数数，“1,2,3,4,5,…”，随着孩子数得越来越多，越来越准确，家长日益感到欣慰。如果一个孩子很大了还数不清20以内的数，或者孩子上了学以后，数学成绩很糟糕，无论家长还是老师都会认为这个孩子不聪明，是个笨孩子。每个人进入学校之后，都要学习数学许多年。尤其在中小学阶段，由于数学是最重要的基础学科，孩子们几乎每天都要进行数学学习。

实际上，并非每个人在学习数学的过程中都很顺利，许多失败者为此伤透了脑筋。为什么不同的人在同一个教室里，由同一个数学教师来教学，学习同样的数学课程，做了同样多的数学作业，但在数学学习效果上却显示出那么大的差别呢？有没有使数学学习变得更容易些、更愉快些、更有效些的方法呢？数学学习优秀者为什么会成功，他们的方法是否具有普遍性，别人能否效仿呢？如此等等问题与现象，就是数学学习心理学所要研究的对象。

数学学习心理学为数学学习提供心理学的基础，这和力学为结构工程提供基础有点相像。力学在“理想的结构系统”中，为计算精确的各种力提供了基本的数据和公式。力学规律以及各种材料的物理属性，为建筑工程师的设计工作提供了一个参照标准。虽然力学并没有指出一个可依照施行的特殊设计方案，没有告诉建筑工程师，怎样去建造一座桥梁。但是，它为建筑工程师提供了一个总的参照标准，使工程师对其所提出的建筑设计是否可行做出判断，并可以由此建筑各种各样的桥梁。

数学学习心理学也希望如此，能提供一系列观点、技术和方法，以及一个知识体系，

以期帮助有关人员顺利地开展数学学习活动,并实现预期的目的。

1.2 数学学习心理学的任务

1. 探索数学学习的规律

简单地讲,数学学习心理学的任务就是探索数学学习的规律。规律就是若干事物的变化之间的确定关系。所谓确定关系就是必然的、屡试不爽的关系。任何时候试验,它都是一个样,这就叫做规律。例如,我们记住的数学公式,是初期忘得快,还是后期忘得快?假如我们试了许多次,无论找谁作为实验对象,都得到相同的结果^[1]:即刚记住以后,一个小时内忘了很多,一天之后虽然也忘,但不像一个小时之内忘得多。这就是说,记忆与学习以后经过的时间长短,两者的变化之间有确定的关系:即经过时间越长,忘得越慢。这就是记忆的规律之一。

影响数学学习的因素虽然可以多到无数,但概括起来无外乎两类:一是学习者自身的因素,例如,先天的遗传素质、智力水平、聪明程度、学习动机、意志力等等。二是环境因素,即学习者周围所接触到的事物变化,例如家庭环境、学校环境以及教材、教师的因素等等。所谓探索数学学习的规律,就是要查明这两类因素与数学学习效果之间的确定关系。

2. 数学学习心理学的用途

数学学习心理学探索数学学习的规律,其主要用途就是根据这些规律指导人的数学学习活动。例如,记忆数学公式、法则、定理,在什么条件下记忆的效果最好。假如研究清楚了,就可以尽量利用有助于记忆的这些因素,避免有害于记忆的那些因素,就可以使学习者记得准、记得牢、记得快。再如,面对一个数学题,怎样才能迅速地找到解决问题的思路呢?这种方式方法能否迁移到类似问题的解决过程中呢?如果查明了解决问题的一般途径,那么,我们就可以尽量创造条件,利用一般途径来实现许多问题的求解。这样的例子很多。

有些现象,人们对它们无可奈何,但若发现了这些现象的发展规律之后,就能“以物役物”。“役”就是指使,用能被人直接指使的东西,去控制那些不能被人直接指使的东西。科学的价值就在于此。例如,一辆载重五吨的汽车,谁能推动它呢?谁也推不动。但是只要把人所设计的一套发动装置安装在汽车上,汽车就可以跑起来了。这就是“以物役物”。人的可贵之处,就是“善假于物”,可以借助于一物驱使其他东西,即“以物役物”。通过控制影响数学学习的因素来控制数学学习,这是数学学习心理学的根本用途。

第二个用途是让我们更有准备地对待数学学习。人们能够对宇宙间的某些现象施加影响,有些则不能。如地球物理学的基本理论和基本知识,能使人们掌握地震预测的

基本技能,但对于地震的发生却无计可施。数学学习心理学也一样。有许多数学学习问题,我们可以通过寻找到的规律加以解决,但也有一些是解决不了的。就像人的某些心理状态一样,例如对于注意稳定性的过高要求就是达不到的。因为心理学^[1]研究认为,成年人的高度有意注意,最长可维持 20 分钟左右,否则就会走神。所以,人们在数学学习过程中应该有准备地对待这种心理状态。

第三个用途是希望使数学学习产生最佳效果。数学学习心理学的研究成果可以作为数学教育研究与实践的依据,为数学学习质量的提高做出贡献。

这样,我们就可以将数学学习心理学的主要任务总结如下:探索人在数学学习过程中的特点与规律;研究人在数学学习方面的个性差异;研究数学学习与环境、教育之间的关系等基本问题。

第二节 数学学习心理学的学科特征

显然,顾名思义,数学学习心理学是从属于数学、心理学的一门分支学科。无论数学,还是心理学,在科学发展的早期,二者均蕴涵于哲学之中,一同探讨人类的基本问题。但是,随着数学首先从哲学中分离出来独立发展,数学取得了极大的进步,2000 多年的发展使之成为了一门成熟的科学。与之不同的是,心理学作为一门科学从哲学中脱胎出来,以 1879 年冯特(Wilhelm Wundt, 1832 ~ 1920 年)在德国莱比锡创建了世界上第一个心理学实验室为标志,因此只有 100 多年的短暂历史。由于数学学习心理学是以这两门学科为基础而发展的,所以首先了解一下数学与心理学之间的关系是十分有益的。

2.1 数学与心理学之间的关系

数学与心理学之间的关系好像是显而易见的。它们都是科学,但分属于两个较大的学科体系:数学更多的是为自然科学服务(甚至曾经属于自然科学的范畴),心理学更多地被认为是属于社会科学领域内的学科。可以说,数学与心理学是两门内容、结构、体系很不同的学科,所以我们有必要深入了解这两门学科之间的差异,因为数学学习心理学本身依赖于这两门学科各自理论的发展。但是,运用数学与心理学的理论去指导数学学习心理学的建设时,我们发现了许多理论与概念上的冲突之处,了解它们的区别所在,能够帮助我们理解冲突产生的原因,以便在加强这两门学科的联系的过程中,为更好地解决数学学习心理学的问题做出贡献。我认为,数学与心理学的差异至少表现在如下几方面:

1. 研究对象和难易度不同

简单地说,数学是研究数量关系、空间形式等内容的学科;心理学是研究动物或人的心理活动、心理现象的学科。

从研究的难易程度上看,似乎数学更容易、更简单一些,这一点可以从数学科学已经独立地发展了几千年中得到证实;与之相反,心理学科学的发展历史很短暂,100多年前才从哲学体系中独立出来,因此心理现象的研究更复杂、更困难一些。

2. 研究方式不同

心理学和数学的差异不仅表现在研究内容方面,而且还体现于这两门科学推理的性质上。

数学在本质上属于严格的形式演绎体系,数学学科的结构具有典型的公理化特征。一条形式的证明是纯逻辑的和演绎性的。例如,证明勾股定理,学过数学之后,你可以通过考察一个直角三角形,便可看到一般的性质。你的证明是确定的,证得的定理有着普遍性。任何一个具备数学素养的人都会接受你的证明,承认经一个特例(这个直角三角形)通过演绎推理而得到的结论。

数学的实体决非具体的对象。每个概念都应以明确的、绝对单义的方式去定义。例如,将“平行四边形定义为:两组对边分别平行的四边形”是没有争议的。虽然,有时数学家也使用归纳法,但它更多的是被应用于数学问题的提出阶段,而且数学家是决不承认通过不完全归纳法所得出的结论的。

相反,心理学属于经验科学。它所使用的概念多数从实践或内省的经验中获得,缺乏数学概念所具有的精确性、严密性和单义性。心理学研究必须考虑大量主观的、社会的和自然的因素,得出的结果呈现统计性。人们处理的是大量现象而非所谓的“一般实例”。因此,从实质上来说,心理学家得到的是一种归纳的结论。

心理学研究的情形与数学完全不同,结论最终的有效性决不会靠纯粹的逻辑思维来确立。心理学的研究对象所蕴含的信息总要远远超过其定义所能表达的信息。在心理学领域中给一个概念下定义是一件非常复杂的工作。事实上,要对各种概念进行完全区分是不可能的。像动机、意图和目的这样的专业词汇,其含意是相互重叠的。解决问题在原则上归属于推理的策略问题,但它的完成却要依赖于经验、知识、直觉、注意力、情感和动机等等。一个仅采用逻辑方法的理论模型是不足以使问题得到圆满解决的。心理学需要做许多实验来排除研究过程中的各种干扰项、非相关量,而且强调经验事实常常高于理论。

例如,心理学研究数学学习的后进生时,可以通过调查若干个后进生的学习目的、学习习惯等方面的表现,最后得出结论:后进生数学学习落后的原因是“学习目的不正确、学习习惯不好”等。这样的研究结论是与数学家常处理的“后进生数学学习落后的原因”的研究结论有区别的。数学家的研究结论常常是一般性的结论,它表示的是“所

有后进生数学学习落后的原因”都是“学习目的不正确、学习习惯不好”。但是,众所周知,事实上学生数学学习落后的原因是多方面的,导致张三学习落后的原因,不一定是导致李四学习落后的原因,其根本原因在于人先天所存在的差异性,以及人所生活与发展的环境的丰富性与复杂性。

由此可知,心理学家所得到并予以接受的研究结论是局部的、归纳性的;数学家所得到的是较为一般性的、演绎的。正因如此,我们自然可以得到第三点不同之处。

3. 研究结论的特征不同

数学理论的应用范围较广泛,一方面是一门学科的发展较为成熟,另一方面是由这门学科的推理性质所决定的,因为它更具一般性,更纯粹,更抽象,更严格。与之相反,心理学的研究结论的应用受到限制,一方面由于它本身发展起步较晚,尚属稚嫩阶段,再加上这门学科本身的推理特点,所以心理学的研究结论更具体、更特殊,有些甚至还很不严格、规范。这一点可在我们应用心理学的研究成果解释实际问题时感觉很牵强的事实上得到证实。

由此可知,心理学和数学的差异不仅表现在研究对象、研究内容方面,而且更主要的是体现在科学推理的性质上以及所获得的研究结论上。了解到这些差异之后,我们就可以更准确地将数学与心理学的成果应用于数学学习心理学的发展过程中了。

2.2 数学学习心理学的诞生

1. 起源

对学习的研究首先起于哲人睿智之士对认识的解释。例如,亚里士多德的观点是,认识是由感觉开始,由个别事实上升到一般概念的。换言之,知识是建立在由经验而获得的各种基本感觉的基础上的。他认为:①两件事物在时间上或空间上越是邻近地出现,就越有可能在想到一件事物时联想到另一件事物,如想到“桌子”时就会联想到“椅子”,因为这两样东西在时空上几乎总是同时出现的;②想到一个概念,常常会导致想到相似的概念,如“苹果”与“橘子”;③看到一件事物,往往会使人想起它的反面,如“日”与“夜”。这三条原则,即邻近、相似、对比的原则,后来成为联想主义学习论的基本原理。

与亚里士多德观点不同,柏拉图认为所有知识都是与生俱来的,学习不过是一种错觉而已。人们只是在不能够回想起心灵中已有的知识时才需要学习,此时知识的基础不是感觉材料,而是推理、直觉等理性认识。笛卡儿、莱布尼兹和康德等人也是崇尚理性,赞同柏拉图的观点。

我国古代著名思想家孔子、荀子、董仲舒、朱熹等人,也对学习进行了许多研究,提出了诸如“学而时习之”“温故而知新”“学思结合”“学者贵疑”“不耻下问”“闻、见、知、行”等一系列的学习方法。

然而,何谓学习?人们在学习时发生了哪些变化?哪些行为是有遗传基础的,哪些是后天习得的?为什么有些知识学了以后就记住了,有些则很快就遗忘了?人的情感因素是通过什么方式与学习产生交互作用的呢?如此等等。这些问题在数学教育中显得尤为突出,所以研究与解决这些问题意义重大。

另一方面,虽然人类进行数学学习活动的历史很悠久,而且对于如何进行数学学习才会有收获也已积累了非常丰富的经验、事实材料,但是,人们对数学学习的系统研究起步很晚。可以说,当现代社会大规模地普及数学教育的时候,人们才意识到有必要科学地展开数学学习活动的研究,以便为数学教育实践提供依据。

为什么要进行数学学习的系统研究呢?主要因为20世纪在教育上发生了一系列重大事件:一是20世纪初工业国家完成了初等教育的普及;二是在第二次世界大战后欧美等国完成了中等教育的普及,实现了高等教育的大众化;三是发展中国家由教育的极端落后向普及教育迈进(注:普及教育指升学率 $\geq 90\%$;教育大众化指升学率 $\geq 50\%$,精英教育指升学率 $< 15\%$)。特别是20世纪50年代以后,各国在总结社会与经济发展的经验时发现,教育是促进社会进步、经济增长的重要因素。为此,世界各国纷纷实施大规模的普及教育与义务教育制度。作为普及教育或义务教育重要内容的数学教育应如何开展——从基础教育的数学教育目的的确定,到数学课程体系的建立、数学教学活动的展开,都与学生如何学习数学的问题密切相关。

于是,有关数学学习的一系列问题,就成为实现社会对教育所提出的要求——促进社会进步、经济增长——对人才质量提高的基本任务的关键。然而,这一既具有理论意义,也具有现实意义的世界性的问题的解决,看似简单,但真要回答起来却是非常困难的。为解决这些问题,研究者们展开了工作。

2. 数学教育及数学教育心理学的兴起

1905年,美国的史密斯(Smith, D. E.)教授建议成立国际数学教育组织。1908年4月在罗马举行的第4届国际数学家大会(International Congress of Mathematicians, 简记为ICM)上,建立了国际数学教育委员会(International Commission on Mathematical Instruction, 简记为ICMI)。1908年9月,ICMI在德国科隆首次集会,19个国家为参加国。另有14个国家被列为联系国,中国是其中之一^[2]。

ICMI早期的活动是在会员国中进行大规模调查,1912年大会特别讨论两个问题:“物理学家的数学修养”和“中学数学教学中的直觉与实验”。1914年选择“微积分在中学中的地位”及“数学在高等技术教育中的地位”作为研究题目。两次世界大战期间ICMI活动很少。直到1952年,ICMI成为国际数学家联合会(IMU)的一个分支机构,重新开始活动。

1955年7月,在日内瓦举行了ICMI会议。议题是:①数学和数学家的当代作用;

②15岁以前儿童的数学教学;③数学在中学教学中的基础作用及中学数学教师的培训。1962年在斯德哥尔摩举行的国际数学家大会上,ICMI讨论了“现代数学如何进入中小学”的问题,这是“新数学”运动的目标。从此,一批对数学和数学教育有远见、有洞察力、有影响的数学教育工作者,开始在一些国家中进行教什么、如何教以及如何学三者之间的关系和问题的研究。

1966年,弗赖登塔尔(Freudenthal)当选为ICMI的主席。他建议单独为数学教育召开国际性大会,会上有大会的特邀报告,也有个人发表意见的机会,这便是国际数学教育大会(International Congress of Mathematical Education,简记为ICME)的开始,弗赖登塔尔的第二个建议是办一份国际性的数学教育杂志,这就是1968年创刊的《数学教育研究(Educational Studies in Mathematics)》,此杂志后来与ICMI的发展密切相关。

第1届国际数学教育大会于1969年在法国里昂举行,来自42个国家的600多名数学教育家参加了大会。以后,每4年举办一次。大会期间,主席弗赖登塔尔建议组织一次有关数学教育心理问题的会议。1972年,在英国埃克塞特举行的第2届国际数学教育大会上进行了数学教育心理学的专题讨论会。所有与会者很快就认识到,数学学习心理学与数学教育休戚相关。

1976年,在德国卡尔斯鲁厄(Karlsruher)召开的第3届国际数学教育大会上,以色列的菲施拜因(Fischbein, E.)作了“关于数学学习过程的研究”(Research Related to Mathematical Learning Processes)的报告。可以说,这篇报告是数学学习心理学研究的一个里程碑。它促成了一个永久性团体——国际数学教育心理学组织(Psychology of Mathematical Education,简记为PME)的建立。该组织的成员围绕各种数学教育心理学问题展开讨论:从智能到情感的影响以及计算机环境的各个方面。PME的建立推动了数学学习心理学的建设与发展。

我国在1980年参与了在美国的伯克利(Berkeley)举行的第4届国际数学教育大会,华罗庚、丁石孙、丁尔陞、曹锡华、曾如阜5人与会。华罗庚还应邀作了“普及数学方法的若干经验”的报告,受到了与会代表的热烈欢迎。

北京师范大学数学系^[3]自1963年开始招收数学教育学的研究生,第一批招收了3名学生,由关肇直(中科院数学所)、罗劲柏(中宣部科学处)、丁尔陞三位专家指导。1981年,北京师范大学数学系组织成立了我国第一个“中学数学教育研究室”。这一切为我们进行数学学习心理学的系统研究奠定了基础。随后,肩负着重巨使命的数学教育工作者开始了数学学习心理学的科学研究活动。

第三节 中学生数学学习心理学的研究状况

由于国际数学教育心理学组织的成立,促进了数学学习心理学的研究。研究内容涉及:数概念的形成,比和比例,加法和乘法结构,向量和代数,几何理解和空间表象,逻辑、推理和证明,符号体系和数学表象,数学思维及其发展,问题解决策略,数学学习的评价,学习方法、学习模式,同学之间交流;以及计算机教与学,数学教师心理学等等。研究范围很广泛,课题有宏观方向的,也有微观方向的内容。

尽管如此,数学学习心理学从这些进展中获益甚浅,至今还没形成一套适合于数学学习心理学领域的方法论以及理论体系(或称之为规范、范式)。显然,由于数学学习心理学具有本身所独有的问题,所以能够准确地、充分地研究数学学习心理学理论与方法论框架体系肯定有别于数学,甚至心理学。

3.1 借鉴、移植较多

可以说,目前数学学习心理学的研究基本上以借用心理学、教育心理学的研究成果来解释、说明数学学习过程中产生的许多问题为主,对理论基础的研究尤为缺乏。例如,人们大量借用心理学的问题、概念、理论和方法。联想主义、行为主义、格式塔、皮亚杰(Piaget, J. 1896 ~ 1980 年)学派——所有这些观点都对数学学习的理论和研究有着潜在的或是明显的影响,然而,对实际的数学学习收效甚微。即使是与数学学习密切相关的认知领域,如问题解决、记忆、推理策略、创造性、表象和想象,也不能直接得出对数学学习实用的建议,其本身也不能成为这一领域中研究问题的主要来源。

原因在于,心理学家选择数学内容作为研究的对象,不是因为他们对数学学习本身有什么特殊的兴趣,而只是因为数学这个领域能为研究心理学家所关注的,诸如“认知”“思维”“智力”“问题解决”等心理现象提供一条很好的途径。

例如,心理学家对数学感兴趣,如:计算、数字、分数、比例、初等几何等,他们甚至使用现代数学中的一些术语。可是他们所谈的拓扑空间、射影空间、映射、变换群等术语的意义,常与数学上的本意相差很大。例如,许多人只研究了儿童早期的计算能力,初步的数概念和一些朴素的空间观念,就来建构儿童的数学认知结构,描述数学能力发展的一般规律,进一步地推断出数学能力的实质。这种研究“实质上是在最低层次上”所展开的研究。例如第尼斯(Dienes)认为 6 ~ 12 岁的儿童可以掌握二次方程、有限群、同构以及模等概念,而这实质上不过是儿童的游戏。把这种“在最低层次上通过操作对概念进行运算”所得到的研究结论,推广到一般的数学能力研究问题上缺乏说服力的^[4]。

例如,皮亚杰使用大量的数学内容,甚至数学方法进行研究的目的是希望借此来揭示智力的机制,探索认识是如何发生的。也就是说,心理学家对数学学科感兴趣的地方在于,数学内容描述的精确性和清晰性,解决数学问题的过程与结果的确定性,由此可将数学任务当做用来研究认知行为的一个纯粹的信息领域。这种刺激材料比起利用心理学研究所创造的人工概念来讲,更有效、更真实。与其他经验科学的情形一样,心理学家看到了数学科学的纯粹性、清晰性,不过是试图把数学内容当做研究心理学问题的载体,用数学模型、数量定律乃至公理演绎体系(如欧几里得系统)去描述心理现象而已。

因此皮亚杰的认知发展阶段论以及他对数学概念(数字、空间、几率、函数等等)研究的相关结论,是不能直接移植到个体的数学学习过程中来的。同时,一般心理学的原理仅仅在数学学习的特殊领域中应用,通常不会引出某些重要的发现,原因在于心理学并不是一个演绎体系。

3.2 经验介绍与主观推断较多

许多数学家介绍了他们从事数学学习与数学研究的宝贵经验,他们甚至给出了非常生动而且贴切的本人数学学习过程的描述。例如,数学家庞加莱(H. Poincaré, 1854 ~ 1912年)、阿达玛(J. Hadamard, 1865 ~ 1963年),以及波利亚(G. Polya, 1887 ~ 1985年)和弗赖登塔尔都对数学推理的心理感兴趣。他们或以内省的方式或以教学经验为基础所作的描述,如实地阐明了数学推理的心理侧面。波利亚认为^[5]:“我们是从经验里学习,或者更进一步说,我们应该从经验里学习。”但是,这些描述是否具有客观性和普遍性?波利亚所言的数学学习的“经验”从哪里来?学生们所拥有的数学经验是否一样呢?对所有人数学学习都适用的经验具体指什么呢?

又如,我国数学家苏步青认为^[6]“要学好数学,方法不外是打好基础、多做习题、多加思索和分析”。可是,基础打成什么样才是“好”呢?习题要做多少才是“多”呢?怎样思索与分析,才有利于促进数学学习呢?数学家王梓坤在谈学习与研究数学的方法时说^[7]:“满足于中等水平,正规的方法基本上就可以了;但要取得突出成就,就非奇巧不可,如非欧几何、集合论等,都需要新奇的思想和方法。”对中学生而言,何谓“正规的方法”?奇巧与新奇的思想和方法怎样获得呢?

另一方面,数学教育类杂志上大量的论文是研究者的教学建议:新的教学方法、教学策略、教学模式。这些建议一部分来自一般教育学原理或理论新进展,一部分是从个人的教育经验中总结出来的。但是,无论来自何处,一般论文中都没有给出这些建议对于学生数学学习影响的程度的事实或数据分析;还有一大部分研究是对数学问题的讨论,研究者钻研了大量的新颖、独特、有意思的数学问题,于是乎就依据“数学教育的核

心是解决问题”的理论断言:什么样的问题是学生可以解决的;什么样的问题的解决,就意味着学生学习了某某数学思想方法,或者某某数学问题中渗透了某些重要的数学思想方法,学生应该学习这一类问题的求解等等。但是,这些论文只展示了“数学问题”本身的特征(如解决该问题要用到哪些数学概念、理论及数学思想方法),论文中的一些观点或说法却没有更多来自学生角度的事实与依据去支持。

事实上,我们发现:不同学生在解题时能获得相同的结果,但其心理过程是极不相同的。例如,面对问题时的考虑、思索过程,以及对各种不同可能性的比较、选择等环节上存在很大的差异。所以,即使两个学生通过学习,在解决某些数学问题时,都能够做到按一定合理的、完善的步骤自动地进行,解题速度和学习分数都差不多,但实际上两个学生数学能力的发展也可能是有差异的。了解这些差异是我们进一步有针对性地实施数学教育的基础。

由此可知,说到能够指导一般的普通中学生进行数学学习的研究结论时,无论是心理学家还是数学家都常常会感到茫然无措,只能提出一些富有启发性的原则与建议。造成这一结局的原因是:宏观的数学学习心理学研究只是限于借用普通心理学、教育心理学的概念框架与理论体系去做解释与说明,而没有建立起本身所特有的理论与方法体系;微观的研究大多集中于数学教材中的具体内容,即主要针对具体的数学教学内容所进行的研究。这样的研究的着眼点是特定的学习内容,而非学习者——学生。所以,有必要针对中学生数学学习心理学的研究现状,找出我们进一步研究的方向。

第四节 未来中学数学学习心理学研究的方向

综观中学生数学学习心理学的研究,我们认为未来的研究方向主要应涉及下面几个方面。

4.1 关于中学生数学能力的研究

探讨数学能力是作为一种特殊形式存在,与一般智力范畴不同,还是一般心理过程中人格品质的特殊化?即智力是与数学能力一起发展的吗?换言之,数学能力是否是智力加上对数学的兴趣和学习数学的倾向性呢?这些问题是有关中学生数学能力的研究问题中首先要探讨的。

个体的数学能力是如何形成的呢?遗传、生理成熟与环境、教育对数学能力的形成与发展究竟起什么作用?数学能力形成与发展的量变与质变规律是什么?中学生的数学能力发展状况是怎样的?学校教育到底在哪些方面促进了学生数学能力的进步等等,将使我们能更清楚地了解学生数学学习发展的可能性、发展方向、水平、速度、范围。