中学生课外读物

数学习题集

几何部分

$C=2\pi R$

吉林人民出版社

中学生课外读物

数学习题集

几何部分

朱维纶 编

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

长春市印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　印张：5　108,000字

1978年5月第1版　1978年5月第1次印刷

书号：7091·988　定价：0.37元

前　　言

本书选用的是省编中学现行数学教材以外的初等几何习题，供在校同学学习时选用。所有习题，按学生所学的基础知识，基本上都可以解决。

演算这些习题的目的，在于使同学更好地掌握初等数学基础知识，提高推理能力、计算能力、空间想像能力和综合运用知识的能力，并通过演算若干较难的习题，进一步提高分析问题的能力。

本集所编入的全部习题，都没有给出图形。目的在于使演算的同学煅炼独立审题，明确条件和结论；独立画图，然后去解题。

为了便于解题，书后加编"附录"，给出某些习题的答案或提示，供演题时参考。

水平所限，习题中难免有错误，衷心希望批评指正。

朱　维　纶

1978年2月

目　　录

×　　×　　×

附　　录

习题答案或提示

第一篇　平面几何

第一部分　证　明　题

甲、基本题

1．求证：对顶角的平分线成一条直线。

2．求证：邻补角的平分线互相垂直。

3．已知一条直线和两条平行线相交，求证：

（i）一组同位角的平分线互相平行；

（ii）一组内错角的平分线互相平行；

（iii）一组同旁内角的平分线互相垂直。

4．一个角的两边和另一个角的两边分别平行时，那么这两个角相等或互补。

5．一个角的两边和另一个角的两边分别垂直时，那么这两个角相等或互补。

6．求证：等腰三角形两个底角的平分线相等。

7．求证：等腰三角形两腰上的中线相等。

8．求证：等腰三角形两腰上的高相等。

9．求证：等腰三角形顶角的外角的平分线和底边平行。

10．求证：过等腰三角形底边所对的顶点引底边的平行线必平分顶角的外角。

11．求证：顶角等于60°的等腰三角形是正三角形。

12．如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形。

13．求证：五角星形的五个顶角的和等于180°。

14．求证：三角形三边的垂直平分线交于一点；这点到三顶点的距离相等。

15．求证：三角形三内角的平分线交于一点；这点到三边的距离相等。

16．求证：三角形的一内角的平分线和另外两内角的外角的平分线交于一点；这点到三边的距离相等。

17．平行四边形 $ABCD$，BC 边的中点 E，DA 边的中点 F，求证：$BEDF$ 是平行四边形。

18．平行四边形 $ABCD$ 的四边 AB、BC、CD、DA 的中点依次是 E、F、G、H，求证：四直线 AF、BG、CH、DE 交成平行四边形。

19．平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 和 BD 交于 O 点，OA、OB、OC、OD 的中点依次是 E、F、G、H，求证：$EFGH$ 是平行四边形。

20．四边形 $ABCD$，$AB=AD$，$CB=CD$，求证：AC 垂直平分 BD。

21．从等腰三角形 ABC 的底边 BC 上任一点 D 引 $DE\parallel AB$ 和 AC 交于 E 点，引 $DF\parallel AC$ 和 AB 交于 F 点，求证：四边形 $AEDF$ 的周长等于 $AB+AC$。

22．$\triangle ABC$，以 CA、AB 各为一边向外侧作正三角形 CAD 和 ABE，求证：$BD=CE$。

23．正方形 $ABCD$，在四边 AB、BC、CD、DA 上依次取一点 E、F、G、H，使 $AE=BF=CG=DH$，求证：$EFGH$ 是正方形。

24. $\triangle ABC$，以 CA、AB 各为一边向外侧作正三角形 CAD 和 ABE，再以 AD 和 AE 为二邻边作平行四边形 $ADFE$，求证：BCF 是正三角形。

25. 求证：两组对角分别相等的四边形是平行四边形。

26. 等腰三角形 ABC 的底边上的高 AD，两腰 AB 和 AC 的中点分别是 E 和 F，求证：$DE=DF$。

27. 求证：平行四边形的四个内角的平分线围成矩形。

28. 求证：一条对角线平分一个内角的平行四边形是菱形。

29. 求证：等腰三角形底边的中点到两腰的距离相等。

30. 正三角形 ABC，在三边 AB、BC、CA 上依次取一点 D、E、F，使 $AD=BE=CF$，求证：三条直线 AE、BF、CD 交成正三角形。

31. $\triangle ABC$ 的内心 I，延长 AI 和 BC 交于 D 点，再引 $IE\perp BC$，垂足为 E，求证：$\angle BID=\angle CIE$。

32. 二直线 $AB\parallel CD$，AB 上一点 A，CD 上一点 C，AB 和 CD 之间一点 E，求证：$\angle AEC=\angle ABE+\angle DCE$（但这三个角都是锐角）。

33. 求证：等腰三角形的底边内部的任意一点到两腰的距离的和等于一腰上的高。

34. 求证：等腰三角形的底边的延长线上任意一点到两腰的距离的差等于一腰上的高。

35. 求证：正三角形内部任意一点到三边的距离的和等于一边上的高。

36. 求证：顺次连结四边形的四边中点成平行四边形。

37. 求证：顺次连结矩形的四边中点成菱形。

38. 求证：顺次连结菱形的四边中点成矩形。

39．求证：等腰梯形一个底上的两个内角相等。

40．求证：等腰梯形的两条对角线相等。

41．求证：等腰梯形的两底边中点间的线段和两底边垂直。

42．求证：梯形的两条对角线的中点间的线段平行于两底，并且等于两底的差的一半。

43．求证：直角三角边斜边上的中线等于斜边的一半。

44．求证：在直角三角形中，30°的内角所对的直角边等于斜边的一半。

45．求证：在直角三角形中，一条直角边等于斜边的一半时，这条直角边所对的内角等于30°。

46．求证：三角形的三条高所在的三条直线交于一点。

47．求证：三角形的三中线交于一点。这点到一边中点的距离等于这边上中线长的三分之一。

48．正方形$ABCD$，在对角线AC上取一点E，使$AE=AB$，从E点引AC的垂线和BC边交于F点，求证：$BF=FE=EC$。

49．平行四边形$ABCD$，CD边的中点E，DA边的中点F，求证：BE和BF把对角线AC三等分。

50．平行四边形$ABCD$，AB边的中点E，CD边的中点F，求证：BF和DE把对角线AC三等分。

51．直角梯形$ABCD$（$AD\parallel BC$，$\angle B=90°$）中，已知$CD=BC+AD$，P是AB的中点，求证：$\angle CPD=90°$。

52．$\triangle ABC$的中线BE，从A点引$\angle EBC$平分线的垂线，这条垂线和BE、BC分别交于P点、Q点，求证：$PE=\frac{1}{2}QC$。

53. $\triangle ABC$, $AB=AC$, 在 AB 上取一点 E, 在 AC 的延长线上取一点 F, 使 $CF=BE$, 直线 EF 和 BC 交于 D 点，求证：$DE=DF$。

54. 求证：有两条高相等的三角形是等腰三角形。

55. 求证：有两条中线相等的三角形是等腰三角形。

56. $\triangle ABC$ 内部任意一点 P, 求证：$PB+PC<AB+AC$。

57. 线段 AB 的垂直平分线 MN 外一点 P（P 点和 B 点在 MN 的同侧），求证：$PA>PB$。

58. 求证：三角形一边上的中线小于另两边的和的一半。

59. 求证：四边形的四边的和大于两条对角线的和。

60. $\angle XOY$ 的平分线 OM, $\angle XOM$ 内部一点 P, 从 P 点引 OX 的垂线 PA；引 OY 的垂线 PB（A、B 是垂足），求证：$PA<PB$。

61. 求证：三角形三条中线的和小于这个三角形的周长而大于这个三角形的周长的四分之三。

62. $\triangle ABC$, $AB=AC$, 在这三角形内部取一点 O, 使 $\angle BAO>\angle CAO$, 求证：$\angle BCO>\angle CBO$。

63. 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $AB=2AC$, 那么 $\angle B$ 最小。

64. 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $AB=2AC$, 求证：$\angle C>2\angle B$。

65. 元的两条直径 AB 和 CD, 弦 $CE \parallel AB$, 求证：$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{BD}$。

66. 元 O 的弦 AB, 把它按从 A 到 B 的方向延长到 C 点，使 BC 等于元 O 的半径，CO 的延长线和元 O 交于 D 点，求证：$\angle AOD=3\angle ACD$。

67．一条直线和两个同心元顺次交于A、B、C、D四点，求证：$AB=CD$。

68．元的弦AB，切线CD，切点是P、并且$AB\parallel CD$，求证：$\overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{PB}$。

69．$\triangle ABC$，$\angle A$的平分线和外接元交于E点，设这个三角形的内心是1，求证：$BE=CE=IE$。

70．$\triangle ABC$的高AD，垂心H，延长AD和$\triangle ABC$的外接元交于E点，求证：$HD=DE$。

71．两元O_1、O_2相切于P点，过P点引直线和元O_1交于A点，和元O_2交于B点，求证：$O_1A\parallel O_2B$。

72．两元O_1、O_2相交，交点是A和B，过A点引直线和元O_1交于C点，和元O_2交于D点；过B点引直线和元O_1交于E点，和元O_2交于F点，求证：$CE\parallel DF$。

73．两元O_1、O_2相切于P点，过P点引二直线和元O_1交于A、C两点，和元O_2交于B、D两点，求证：$AC\parallel BD$。

74．从元O外一点P引这元的二切线PA、PB（A、B是切点），再引这元的直径AC，求证：$CB\parallel OP$。

75．以AB为直径的元上取一点C，使$\angle BAC=30°$，过B点引这个元的切线和AC的延长线交于D点；过C点引这个元的切线和BD交于E点，求证：$\triangle CDE$是正三角形。

76．求证：在一个元内的两条平行弦所夹的弧相等。

77．元O的二等弦AB和CD互相垂直，垂足是P点，求证：P点分AB所成的二线段和P点分CD所成的二线段分别相等。

78．求证：过一个元的互相垂直的两条直径的四个端点

引这个元的四条切线围成正方形。

79．两元外离，求证：它们的外公切线长相等；内公切线长相等。

80．求证：一个元的外切四边形两组对边的和相等。

81．求证：一个元的两条直径的四个端点是一个矩形的四个顶点。

82．求证：以一个正三角形的一边为直径的元把另外两边平分。

83．以 $\angle XPY$ 的平分线上一点 O 为元心作一个元，和 PX 交于 A、B 两点；和 PY 交于 C、D 两点，求证：$AB=CD$。

84．如果以一个角的平分线上一点为元心的元和这个角的一边相切，那么这个元也和这个角的另一边相切。

85．如果一个元把一个角的两边截得相等的弦，那么这个元的元心在这个角的平分线上。

86．求证：元的内接菱形是正方形。

87．如果两个元存在两条外公切线，那么两条外公切线的四个切点是一个等腰梯形的四个顶点。

88．$\triangle ABC$，$\angle A=90°$，求证：$AB+AC-BC$ 等于这个三角形的内切元的直径长。

89．求证：三角形的三个顶点在以这个三角形的三个旁切元的元心为顶点的三角形的三边上。

90．$\triangle ABC$，$\angle A$ 外角的平分线和这个三角形的外接元交于 D 点，求证：$\triangle DBC$ 是等腰三角形。

91．以 AB 为直径的元上取一点 C，从 C 点引这个元的切线 CE，再从 B 点引 CE 的垂线，垂足是 D 点，求证：BC 是 $\angle ABD$ 的平分线。

92．两元外切于P点，这两个元的一条外公切线和两元相切于A点和B点，求证：$\angle APB=90°$。

93．两个元相交于A、B，从B点引这两个元的直径BC、BD，求证：C、A、D三点在同一直线上。

94．元O的直径AB，过A、B引元O的二切线AD、BC，又元O的另外一条切线和AD交于D，和BC交于C，求证：$OC\perp OD$。

95．两元O_1、O_2相交于A、B，过A点引元O_1的切线和元O_2交于C点；过A点引元O_2的切线和元O_1交于D点，求证：$\angle ABC=\angle ABD$。

96．元的内接四边形$ABCD$，延长一组对边AD和BC交于M点，过M点引过C、D、M三点的元的切线MT，求证：$MT\parallel AB$。

97．元的两个弧$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{AC}$的中点M和N，直线MN和弦AB、AC分别交于P、Q，求证：$\triangle APQ$是等腰三角形。

98．直角三角形ABC，以一直角边AB为直径作元和斜边BC交于P点，求证：过P点所引的这个元的切线把另一直角边AC平分。

99．元O的直径AB，半径$OC\perp AB$，从AB的延长线上一点P引元O的切线PD（D是切点），直线CD和直线AB交于E点，求证：$\triangle PDE$是等腰三角形。

100．在以AB为直径的半元上取一点C，再取$\overset{\frown}{AC}$的中点P，BP和AC交于D点，从P点引AB的垂线和AC交于E点，求证：E点到A、D、P三点的距离相等。

101．$\triangle ABC$的外接元的直径AD，求证：$\angle BAD$和$\angle C$是互为余角。

102．两元内切于P点，一直线和这两元顺次交于A、

B、C、D四点，求证：$\angle APB=\angle CPD$。

103．元O的弦AB，$\overset{\frown}{AB}$的中点P，弦PC和弦PD和AB分别交于E、F，求证：$\angle PEF=\angle D$。

104．正方形$ABCD$，以AB、BC为直径在这个正方形内部作两个半元，这两个半元交于E点，求证：BE平分$\angle ABC$。

105．元O的两弦AB和CD交于P点，如果AB、CD和OP成等角，求证：$AB=CD$。

106．二直线$l\parallel m$，l和三射线OX、OY、OZ依次交于A、B、C；m和这三射线OX、OY、OZ依次交于A'、B'、C'，求证：$A'B':AB=B'C':BC$。

107．平行四边形$ABCD$，过A点引直线和BD、BC、DC的延长线依次交于E、F、G，求证：$AE^2=EF\cdot EG$。

108．$\triangle ABC$的高AD（D在BC内部），若$AD^2=BD\cdot CD$，求证：$\angle BAC=90°$。

109．从元外一点P引二切线PA、PB，引一刈线PCD（A、B是切点，C、D是交点），求证：$AC\cdot BD=BC\cdot AD$。

110．元O的直径AB，过A、B引AB的垂线和过元O上一点P的切线分别交于C、D，求证：OP是AC和BD的比例中项。

111．梯形$ABCD$（$AD\parallel BC$），一直线和这个梯形的两底平行，和AB、BD、AC、CD依次交于E、F、G、H，求证：$EF=GH$。

112．两元内切于P点，从P点引二射线，一条和这两元交于A、B；另一条和这两元交于C、D，求证：$PA:PB=PC:PD$。

113．$\triangle ABC$ 的角平分线 AD，延长 AD 和外接元交于 E 点，求证：$AD\cdot AE=AB\cdot AC$。

114．求证：三角形两边的乘积等于第三边上的高和外接元直径的乘积。

115．正方形 $ABCD$，AB 的中点 E，在 AD 上取一点 F，使 $AF=\frac{1}{4}AD$，再引 $EG\perp CF$，垂足为 G，求证：$EG^2=CG\cdot FG$。

116．两元相交于 P、Q，这两元的一条外公切线 AB（A、B 是切点），求证：直线 PQ 平分 AB。

117．以 AB 为直径的半元上取两点 P、C，从 P 点引 AB 的垂线，垂足为 D，直线 AC、BC 分别和直线 PD 交于 E、F 点，求证：$PD^2=ED\cdot FD$。

118．$\triangle ABC$ 的两条高 BE 和 CF，求证：$\triangle ABC\backsim\triangle AEF$。

119．平行四边形 $ABCD$，从 A 点引直线和 CD、BC 的延长线分别交于 E、F 点，求证：$DC:DE=BF:BC$。

120．$\triangle ABC$，在 AB 上取一点 D，在 AC 上取一点 E，使 $AD=AE$，直线 DE 和 BC 边的延长线交于 P 点，求证：$BP:CP=BD:CE$。

121．平行四边形 $ABCD$，一线段 $EF\parallel BC$，直线 BE 和 CF 交于 G；直线 AE 和 DF 交于 H，求证：$GH\parallel AB$。

122．$\triangle ABC$，$\angle A=90°$，BC 的垂直平分线和 AB、AC（或它们的延长线）分别交于 D、E、BC 的中点 M，求证：$AM^2=DM\cdot EM$。

123．$\triangle ABC$，中线 AD，过 A 点引 $AX\parallel BC$，在 AX 上取一点 P，从 P 引直线和 AB、AD、AC 分别交于 E、F、

G，求证：$EF:EP=FG:GP$。

124．$\triangle ABC$，角平分线 AD，求证：$BD:DC=AB:AC$。

125．$\triangle ABC$，$\angle A$ 外角的平分线和 BC 的延长线交于 D 点，求证：$BD:DC=AB:AC$。

126．$\triangle ABC$，中线 AD，$\angle ADB$ 的平分线和 AB 交于 E 点；$\angle ADC$ 的平分线和 AC 交于 F 点，求证：$EF\parallel BC$。

127．在线段 AB 同侧的二线段 AC 和 BD，并且 $AC\perp AB$，$BD\perp AB$，又 AD 和 BC 交于 M 点，再引 $MN\perp AB$，垂足是 N，求证：NM 平分 $\angle CND$。

128．$\triangle ABC$ 的内心是 I，角平分线 AD，求证：$AI:ID=(AB+AC):BC$。

129．$\triangle ABC$ 的中线 AD，过 A 点引直线 $XY\parallel BC$，在 AD 上任取一点 P，直线 BP、CP 和 XY 分别交于 E、F，求证：$AE=AF$。

130．$\triangle ABC$ 的角平分线 BE 和 CF，如果 $FE\parallel BC$，求证：$AB=AC$。

131．$\triangle ABC$，一直线和 AB、AC、BC 的延长线分别交于 D、E、F 点，如果 $AE:EC=BF:CF$，求证：$AD=BD$。

132．正方形 $ABCD$，从 A 点引射线和 CD、BC 的延长线分别交于 E、F，再从 E 点引 BC 的平行线和 DF 交于 G 点，求证：$CE=EG$。

133．$\triangle ABC$，$\angle A=90°$，以 AB、AC 各为一边向外侧作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$，CD 和 AB 交于 L；BF 和 AC 交于 K，求证：$AL=AK$。

134．$\triangle ABC$，$\angle A=90°$，高 AD，求证：$AB^2:AC^2=BD:DC$。

135. $\triangle ABC$，$AB=AC$，底边BC上一点M，求证：$AB^2-AM^2=BM\cdot MC$。

136. 求证：直角梯形的两条对角线的平方差等于两底的平方差。

137. 正方形$ABCD$，$\angle BAC$的平分线和BC交于E点，引$EF\perp AC$，垂足为F，引$FG\perp AB$，垂足为G，求证：$AB^2=2FG^2$。

138. $\triangle ABC$的两高AD、CF，在AB上取一点P，使$AP=AD$，再从P点引BC的平行线和AC交于Q点，求证：$PQ=CF$。

139. $\triangle ABC$，在AB上取一点D，在AC上取一点E，使$BD=CE$，直线DE和BC的延长线交于F点，求证：$AB:AC=EF:DF$（但$AB\neq AC$）。

140. 直角三角形ABC，斜边上的高AD，$\angle ABD$的平分线和AD交于E点；$\angle CAD$的平分线和CD交于F点，求证：$EF\parallel AC$。

141. $\triangle ABC$（$AB\neq AC$）的角平分线AD，AD的垂直平分线和BC的延长线交于E点，求证：$DE^2=BE\cdot CE$。

142. $\triangle ABC$，BC的中点D，从A点引射线$AX\parallel BC$，过D点引一直线，和AB的延长线、AC、AX分别交于E、F、G点，求证：$DF:FG=ED:EG$。

143. 梯形$ABCD$（$AD\parallel BC$），过二对角线的交点O引和两底平行的直线，这条直线和两腰AB、CD分别交于E、F点，求证：$OE=OF$。

144. $\triangle ABC$的中线AD，从C点任引一射线，和AD、AB分别交于E、F点，求证：$AE\cdot FB=2AF\cdot DE$。

145. 四边形$ABCD$，对角线AC的中点O，OE、OF、