

文登培训学校指定用书

考研数学

10年真题点评

数学一

陈文灯 / 主 编

陈启浩 / 副主编



涵盖权威评分标准
准确诠释得分秘诀



KNOWLEDGE
TREE
知识树考研

2007 考研白皮书系

图例目录(CIP) 编编

考研数学

10年真题点评

数学一

陈文灯 / 主 编

陈启浩 / 副主编

图例目录(CIP) 编编



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

数学 10 年真题点评. 1/陈文灯主编. —北京:北京
理工大学出版社, 2006. 2
(考研白皮书系)
ISBN 7-5640-0707-9

I. 数... II. 陈... III. 高等数学—研究生—入学
考试—自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 007381 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

电子邮箱 / chiefeditor@bitpress.com.cn

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京时代华都印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 12

字 数 / 286 千字

版 次 / 2006 年 2 月第 1 版 2006 年 2 月第 2 次印刷

定 价 / 15.00 元

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前 言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届,积累了近百份数学试卷,这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶,也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题,除其内容外,还包含诸多有价值的信息,例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性。为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法,我们将 1997 年~2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题做了精心的解析,编写成《考研数学·10 年真题点评》系列丛书,奉献给广大考研朋友,书中对每道真题通过“分析”、“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明语言给出解题思路;在“详解”中用简捷、新颖方法给出详细解答;在“评注”中简单强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧。这里要特别指出的是,书中对 2004 和 2005 年真题中的解答题,标明了参考的评分标准,使读者明了完整准确解题应有的步骤。

我们希望读者在使用本书时,不要輕易地翻阅真题的答案,只有当百思不得其解时才查阅答案;而且每做完一道真题,应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注,进行比对和总结。如果能如此下功夫做完最近十年的数学考研真题,读完全书,我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上,在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃,而且在解题能力和应考水平上也将有一个较大幅度的提高,从而更加从容地面对研究生入学考试。

由于成书时间仓促,书中疏漏之处在所难免,恳请广大读者和同仁指正。

编 者

2006 年 1 月

近 10 年考题路线图

(1997 年—2006 年)

以下给出了《高等数学》、《线性代数》和《概率论与数理统计》每章近 10 年的具体考题题型,可以使考生清晰地了解和把握各章出题的方式、命题的频率及其分值比重,在全面复习的过程中,也不失对重点知识的明确和强化。

第一部分 高等数学

(10 年考题总数:117 题 总分值:764 分 占三部分题量之比重:53% 占三部分分值之比重:60%)

第一章 函数、极限、连续

(10 年考题总数:15 题 总分值:69 分 占第一部分题量之比重:12% 占第一部分分值之比重:9%)

题型 1 求 1^∞ 型极限(一(1),2003)

题型 2 求 $0/0$ 型极限(一(1),1998;一(1),2006)

题型 3 求 $\infty - \infty$ 型极限(一(1),1999)

题型 4 求分段函数的极限(二(2),1999;三,2000)

题型 5 函数性质(奇偶性,周期性,单调性,有界性)的判断(二(1),1999;二(8),2004)

题型 6 无穷小的比较或确定无穷小的阶(二(7),2004)

题型 7 数列极限的判定或求解(二(2),2003;六(1),1997;四,2002;三(16),2006)

题型 8 求 n 项和的数列极限(七,1998)

题型 9 函数在某点连续性的判断(含分段函数)(二(2),1999)

第二章 一元函数微分学

(10 年考题总数:26 题 总分值:136 分 占第一部分题量之比重:22% 占第一部分分值之比重:17%)

题型 1 与函数导数或微分概念和性质相关的命题(二(7),2006)

题型 2 函数可导性及导函数的连续性的判定(五,1997;二(3),2001;二(7),2005)

题型 3 求函数或复合函数的导数(七(1),2002)

题型 4 求反函数的导数(七(1),2003)

题型 5 求隐函数的导数(一(2),2002)

题型 6 函数极值点、拐点的判定或求解(二(7),2003)

题型 7 函数与其导函数的图形关系或其他性质的判定(二(1),2001;二(3),2002)

题型 8 函数在某点可导的判断(含分段函数在分段点的可导性的判断)(二(2),1999)

题型 9 求一元函数在一点的切线方程或法线方程(一(3),1997;四,2002;一(1),2004)

题型 10 函数单调性的判断或讨论(八(1),2003;二(8),2004)

题型 11 不等式的证明或判定(二(2),1997;九,1998;六,1999;二(1),2000;八(2),2003;三(15),2004)

题型 12 在某一区间至少存在一个点或两个不同的点使某个式子成立的证明(九,2000;七(1),2001;三(18),2005)

题型 13 方程根的判定或唯一性证明(三(18),2004)

题型 14 曲线的渐近线的求解或判定(一(1),2005)

第三章 一元函数积分学

(10年考题总数:12题 总分值:67分 占第一部分题量之比重:10% 占第一部分分值之比重:8%)

题型 1 求不定积分或原函数(三,2001;一(2),2004)

题型 2 函数与其原函数性质的比较(二(8),2005)

题型 3 求函数的定积分(二(3),1997;一(1),2000;三(17),2005)

题型 4 求变上限积分的导数(一(2),1999;二(10),2004)

题型 5 求广义积分(一(1),2002)

题型 6 定积分的应用(曲线的弧长,面积,旋转体的体积,变力做功等)(七,1999;三,2003;六,2003)

第四章 向量代数和空间解析几何

(10年考题总数:3题 总分值:15分 占第一部分题量之比重:2% 占第一部分分值之比重:1%)

题型 1 求直线方程或直线方程中的参数(四(1),1997)

题型 2 求点到平面的距离(一(4),2006)

题型 3 求直线在平面上的投影直线方程(三,1998)

题型 4 求直线绕坐标轴的旋转曲面方程(三,1998)

第五章 多元函数微分学

(10年考题总数:19题 总分值:98分 占第一部分题量之比重:16% 占第一部分分值之比重:12%)

题型 1 多元函数或多元复合函数的偏导的存在的判定或求解(二(1),1997;一(2),1998;四,

2000;四,2001;二(9),2005;三(18(I)),2006)

题型2 多元隐函数的导数或偏导的求解或判定(三,1999;三(19),2004;二(10),2005)

题型3 多元函数连续、可导与可微的关系(二(2),2001;二(1),2002)

题型4 求曲面的切平面或法线方程(一(2),2000;一(2),2003)

题型5 多元函数极值的判定或求解(八(2),2002;二(3),2003;三(19),2004;二(10),2006)

题型6 求函数的方向导数或梯度或相关问题(八(1),2002;一(3),2005)

题型7 已知一二元函数的梯度,求二元函数表达式(四,1998)

第六章 多元函数积分学

(10年考题总数:27题 总分值:170分 占第一部分题量之比重:23% 占第一部分分值之比重:22%)

题型1 求二重积分(五,2002;三(15),2005;三(15),2006)

题型2 交换二重积分的积分次序(一(3),2001;二(10),2004;二(8),2006)

题型3 求三重积分(三(1),1997)

题型4 求对弧长的曲线积分(一(3),1998)

题型5 求对坐标的曲线积分(三(2),1997;六,1998;四,1999;五,2000;六,2001;六(2),2002;一(3),2004;三(19),2006)

题型6 求对面积的曲面积分(八,1999)

题型7 求对坐标的曲面积分(三(17),2004;一(4),2005;一(3),2006)

题型8 曲面积分的比较(二(2),2000)

题型9 与曲线积分相关的判定或证明(六(1),2002;五,2003;三(19(I)),2005)

题型10 已知曲线积分的值,求曲线积分中被积函数中的未知函数的表达式(六,2000;三(19(II)),2005)

题型11 求函数的梯度、散度或旋度(一(2),2001)

题型12 重积分的物理应用题(转动惯量,重心等)(八,2000)

第七章 无穷级数

(10年考题总数:20题 总分值:129分 占第一部分题量之比重:17% 占第一部分分值之比重:16%)

题型1 无穷级数敛散性的判定(六,1997;八,1998;九(2),1999;二(3),2000;二(2),2002;二(9),2004;三(18),2004;二(9),2006)

题型2 求无穷级数的和(九(1),1999;五,2001;七(2),2002;四,2003;三(16),2005)

题型3 求函数的幂级数展开或收敛域或判断其在端点的敛散性(一(2),1997;七,2000;五,2001;四,2003;三(16),2005;三(17),2006)

题型4 求函数的傅里叶系数或函数在某点的展开的傅里叶级数的值(二(3),1999;一(3),2003)

第八章 常微分方程

(10年考题总数:15题 总分值:80分 占第一部分题量之比重:1% 占第一部分分值之比重:10%)

题型1 求一阶线性微分方程的通解或特解(六,2000;一(2),2005;一(2),2006;三(18(II)),2006)

题型2 二阶可降阶微分方程的求解(一(3),2000;一(3),2002)

题型3 求二阶齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解(一(3),1999)

题型4 已知二阶线性齐次或非齐次微分方程的通解或特解,反求微分方程(一(1),2001)

题型5 求欧拉方程的通解或特解(一(4),2004)

题型6 常微分方程的物理应用(三(3),1997;五,1998;八,2001;三(16),2004)

题型7 通过求导建立微分方程求解函数表达式或曲线方程(四(2),1997;五,1999)

第二部分 线性代数

(10年考题总数:51题 总分值:256分 占三部分题量之比重:23% 占三部分分值之比重:20%)

第一章 行列式

(10年考题总数:5题 总分值:18分 占第二部分题量之比重:9% 占第二部分分值之比重:7%)

题型1 求矩阵的行列式(十(2),2001;一(5),2004;一(5),2005;一(5),2006)

题型2 判断矩阵的行列式是否为零(二(4),1999)

第二章 矩阵

(10年考题总数:8题 总分值:35分 占第二部分题量之比重:15% 占第二部分分值之比重:13%)

题型1 判断矩阵是否可逆或求逆矩阵(八,1997)

题型2 解矩阵方程或求矩阵中的参数(一(4),1997;十,2000;一(4),2001)

题型3 求矩阵的 n 次幂(十一(3),2000)

题型4 初等矩阵与初等变换的关系的判定(二(11),2004;二(12),2006)

题型5 矩阵关系的判定(二(12),2005)

第三章 向量

(10年考题总数:9题 总分值:33分 占第二部分题量之比重:17% 占第二部分分值之比重:12%)

题型1 向量组线性相关性的判定或证明(十一,1998;二(4),2000;十一(2),2000;二(4),2003;二(12),2004;二(11),2005;二(11),2006)

题型2 根据向量的线性相关性判断空间位置关系或逆问题(二(4),1997;二(4),2002)

第四章 线性方程组

(共考过约11题,约67分)

题型1 齐次线性方程组基础解系的求解或判定(七(1),1997;九,2001)

题型2 求线性方程组的通解(十二,1998;九,2002;三(20(Ⅲ)),2005)

题型3 讨论含参数的线性方程组的解的情况,如果方程组有解时求出通解(三(20),2004;三(21),2005)

题型4 根据含参数的方程组的解的情况,反求参数或其他(一(4),2000;三(20),2006)

题型5 两个线性方程组的解的情况和它们的系数矩阵的关系的判定(一(5),2003)

题型6 直线的方程和位置关系的判定(十,2003)

第五章 矩阵的特征值和特征向量

(10年考题总数:13题 总分值:76分 占第二部分题量之比重:25% 占第二部分分值之比重:29%)

题型1 求矩阵的特征值或特征向量(一(4),1999;十一(2),2000;九,2003;三(21(Ⅰ)),2006)

题型2 已知含参数矩阵的特征向量或特征值或特征方程的情况,求参数(七(2),1997;三(21),2004)

题型3 已知伴随矩阵的特征值或特征向量,求矩阵的特征值或参数或逆问题(一(4),1998;十,1999)

题型4 将矩阵对角化或判断矩阵是否可对角化(七(2),1997;三(21),2004;三(21(Ⅱ)),2006)

题型5 矩阵相似的判定或证明或求一个矩阵的相似矩阵(二(4),2001;十(1),2001)

题型6 矩阵相似和特征多项式的关系的证明或判定(十,2002)

第六章 二次型

(10年考题总数:5题 总分值:27分 占第二部分题量之比重:9% 占第二部分分值之比重:10%)

题型1 化实二次型为标准二次型或求相应的正交变换(三(20(Ⅱ)),2005)

题型2 已知一含参数的二次型化为标准形的正交变换,反求参数或正交矩阵(十,1998;一

(4), 2002)

题型 3 已知二次型的秩, 求二次型中的参数和二次型所对应矩阵的表达式(三(20(I)), 2005)

题型 4 矩阵关系合同的判定或证明(二(4), 2001)

题型 5 矩阵正定的证明(十一, 1999)

第三部分 概率论与数理统计

(10 年考题总数: 52 题 总分值: 249 分 占三部分题量之比重: 23% 占三部分分值之比重: 19%)

第一章 随机事件和概率

(10 年考题总数: 7 题 总分值: 31 分 占第三部分题量之比重: 13% 占第三部分分值之比重: 12%)

题型 1 求随机事件的概率(一(5), 1997; 一(5), 1999; 一(5), 2000; 十一(2), 2003; 一(6); 2005; 三(22), 2005)

题型 2 随机事件的运算(二(13), 2006)

第二章 随机变量及其分布

(10 年考题总数: 6 题 总分值: 25 分 占第三部分题量之比重: 11% 占第三部分分值之比重: 10%)

题型 1 求一维离散型随机变量的分布律或分布函数(九, 1997)

题型 2 根据概率反求或判定分布中的参数(一(5), 2002; 二(14), 2006)

题型 3 一个函数为某一随机变量的分布函数或分布密度的判定(一(5), 2002)

题型 4 求一维随机变量在某一区间的概率(一(6), 2004)

题型 5 求一维随机变量函数的分布(三(22(I)), 2006)

第三章 二维随机变量及其分布

(10 年考题总数: 13 题 总分值: 59 分 占第三部分题量之比重: 25% 占第三部分分值之比重: 23%)

题型 1 求二维离散型随机变量的联合分布律或分布函数或边缘概率分布(十一(2), 2001; 三(22(II)), 2004; 三(22), 2005)

题型 2 已知部分边缘分布, 求联合分布律(十二, 1999; 二(13), 2005)

题型 3 求二维连续型随机变量的分布或分布密度或边缘密度函数(一(5), 1998; 三(22(II)), 2006)

题型 4 求两个随机变量的条件概率或条件密度函数(十一(1), 2001)

题型 5 两个随机变量的独立性或相关性的判定或证明(二(5),2000)

题型 6 求两个随机变量的相关系数(三(22(I)),2004)

题型 7 求二维随机变量在某一区域的概率(二(5),1999;一(5),2003;一(6),2006)

第四章 随机变量的数字特征

(10 年考题总数:8 题 总分值:43 分 占第三部分题量之比重:15% 占第三部分分值之比重:17%)

题型 1 求随机变量的数学期望或方差(九,1997;十二,2000,十一(1),2003)

题型 2 求随机变量函数的数学期望或方差(二(5),1997;十三,1998;十一,2002)

题型 3 两个随机变量的协方差或相关系数的求解或判定(二(5),2001;二(14),2004)

第五章 大数定律和中心极限定理

(10 年考题总数:1 题 总分值:3 分 占第三部分题量之比重:1% 占第三部分分值之比重:1%)

题型 1 利用切比雪夫不等式估计概率(一(5),2001)

第六章 数理统计的基本概念

(10 年考题总数:17 题 总分值:88 分 占第三部分题量之比重:32% 占第三部分分值之比重:35%)

题型 1 求样本容量(十四,1998)

题型 2 分位数的求解或判定(二(13),2004)

题型 3 求参数的矩估计量或矩估计值或估计量的数字特征(十,1997;十三,2000;十二,2002;三(23(I)),2004)

题型 4 求参数的最大似然估计量或估计值或估计量的数字特征(十,1997;十三,1999;十二,2002;三(23(II)),2004;三(23),2006)

题型 5 总体或统计量的分布函数的判定或求解(二(6),2003;十二(1),2003;二(14),2005)

题型 6 讨论统计量的无偏性,一致性或有效性(十二(3),2003)

题型 7 求统计量的数学期望或方差或两个统计量的协方差(十二,2001;三(23),2005)

题型 8 求单个正态总体均值的置信区间(一(6),2003)

题型 9 显著性检验的判定(十五,1998)

目 录

近 10 年考题路线图(1997 年—2006 年)	I
----------------------------------	---

近 10 年真题集

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	1
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	5
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	9
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	12
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	16
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	19
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	22
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	25
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	28
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	32

近 10 年真题分析、详解及评注

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	35
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	50
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	65
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	80
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	96
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	110
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	122
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	136
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	150
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	164

附:

文登学校分校一览表

2003—2005 年文登学校考研数学优秀者名单

2006 年全国硕士研究生入学统一考试 数学一试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上.)

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (2) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- (3) 设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的下侧,则 $\iint_{\Sigma} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (4) 点 $(2, 1, 0)$ 到平面 $3x + 4y + 5z = 0$ 的距离 $d = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵,矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$,则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布,则 $P\{\max\{X, Y\} \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$. Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x > 0$,则
(A) $0 < dy < \Delta y$. (B) $0 < \Delta y < dy$.
(C) $\Delta y < dy < 0$. (D) $dy < \Delta y < 0$. 【 】
- (8) 设 $f(x, y)$ 为连续函数,则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于
(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$. (B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.
(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$. (D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$. 【 】
- (9) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则级数
(A) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛. 【 】
- (10) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数,且 $\varphi'_x(x, y) \neq 0$, 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

【 】

(11) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是

(A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

【 】

(12) 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得

C , 记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则

(A) $C = P^{-1}AP$.

(B) $C = PAP^{-1}$.

(C) $C = P^TAP$.

(D) $C = PAP^T$.

【 】

(13) 设 A, B 为随机事件, 且 $P(B) > 0, P(A|B) = 1$, 则必有

(A) $P(A \cup B) > P(A)$.

(B) $P(A \cup B) > P(B)$.

(C) $P(A \cup B) = P(A)$.

(D) $P(A \cup B) = P(B)$.

【 】

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且

$$P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\},$$

则必有

(A) $\sigma_1 < \sigma_2$.

(B) $\sigma_1 > \sigma_2$.

(C) $\mu_1 < \mu_2$.

(D) $\mu_1 > \mu_2$.

【 】

三、(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy.$$

(16) (本题满分 12 分)

设数列 $|x_n|$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$.

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n}}$.

(17) (本题满分 12 分)

将函数 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

(18)(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(I) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;

(II) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

(19)(本题满分 12 分)

设在上半平面 $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$ 内, 函数 $f(x, y)$ 具有连续偏导数, 且对任意的 $t > 0$ 都有 $f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y)$. 证明: 对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L , 都有

$$\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0.$$

(20)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = -1. \end{cases}$$

有三个线性无关的解.

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

(II) 求 a, b 的值及方程组的通解.

(21)(本题满分 9 分)

设三阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T = \alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

(22)(本题满分 9 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

令 $Y = X^2$, $F(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 求

(I) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(II) $F(-\frac{1}{2}, 4)$.

(23)(本题满分9分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1, \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 ($0 < \theta < 1$), $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中小于 1 的个数. 求 θ 的最大似然估计.