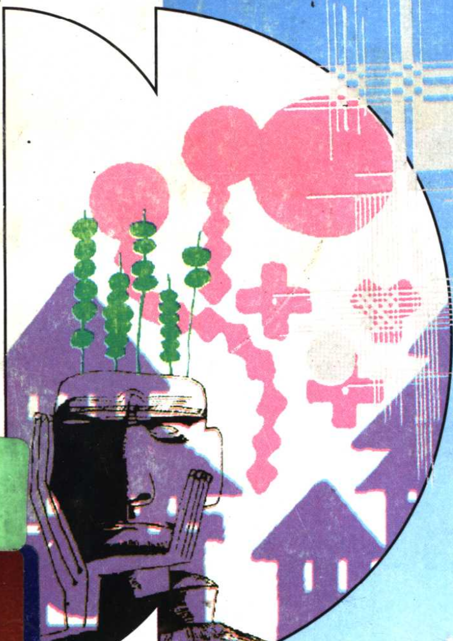
当代中学生丛书·精品集

博览篇

数学今古奇观

张远南

数学是人类文明大观园中
一株茂盛的奇葩。
纵观数学的发展史——
它在朦胧中起源，几经
周折，以至天衣无缝。
个中的艰辛和乐趣
请君细细品味。



福建教育出版社

博览篇

数学今古奇观

张远南

书集 • 当代中学生丛书 精品集 • 当代中学生丛书 精品集

福建教育出版社

丛书编辑　李南元
责任编辑　郑慰祖
装帧设计　红　雨
插　　图　林　禺
　　　　　张远南

当代中学生丛书·精品集
博览篇
数学今古奇观
张远南

福建教育出版社出版发行
（福州梦山巷 27 号　邮编：350001）
福建省新华书店经销
福州晚报社印刷厂印刷
（福州西洋路 4 号　邮编：350005）

开本 787×1092　1/32　印张 5.375　字数 111 千　插页 2
1997 年 5 月第 1 版　1997 年 5 月第 1 次印刷
印数：1—15，100
ISBN7－5334－2268－6/G·1846　定价：6.30 元

“当代中学生丛书·精品集”

总序

二十世纪即将载入史册。展望未来，二十一世纪的科学技术和文化必会更加迅速发展：资源能源开发，环境保护，对宏观世界和微观世界的探索，生物工程，人体科学等各方面，都会取得更大的进展甚至重大突破。特别是随着计算机的飞速改进，通讯技术必将日新月异，地球变得更小了，人们的交往更频繁了，国家和地区也更加开放了。这就是我们必将面临的形势。

在这种情况下，今天的中学生应该做些什么准备呢？首先，要培养对科学技术和文化的浓厚兴趣，激发起追求新知识、新技能的热情。兴趣和爱好往往是成功的起点。在学好校内各门功课的同时，不断扩大自己的知识面，不断培养自己动手的能力。知识在于积累，能力在于锻炼；长时间的积累和锻炼，就很可能成为巨人。其次，从青少年时代起，就应立志献身于为人民为祖国的崇高事业，要有远大而明确的理想。随时随地严格要求自己，热情帮助别人，当具体的奋斗目标确定以后，必须脚踏实地，勤学苦练，不屈不挠地为实现目标而努力奋斗。

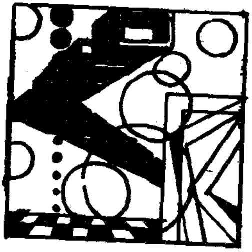
“当代中学生丛书”是中学生的良师益友，它将从上述各方面给同学们以帮助。在1988年至1994年间，这套丛书共出了60本，读者反应是良好的。这次重版，从中挑出40本，

加以修订后汇总成为精品集。

新版的精品集共8篇，篇名是：励志、知心、成才、科技、文史、艺术、博览和环球。每篇各含5本书，内容非常丰富，读者可以从中学习先进青年奋发向上的事迹，与人相处的社交礼仪，最新科技知识，文学名著，青春心理和生理，音乐美术以及世界名胜奇迹等等。在学好学校功课之余，披卷阅览，长期坚持，必能收到增长知识、开拓眼界的效果。因此，这套丛书正是校内各门功课的补充，是一套内容广泛、有益有趣的系列课外读物。

中国科学院院士
汕头大学数学研究所所长　**王梓坤** 1996.6
北京师范大学教授

目　录



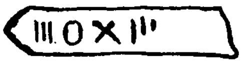
一　数海拾萃

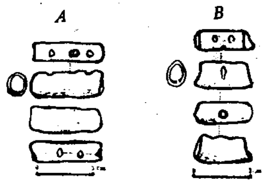
1. 记数史上的传奇

我们这个星球的文明，有着惊人的相似。无论是东方还是西方，都有着雷同般的“数之初”。

公元1937年，人们在维斯托尼斯发现了一根大约四十万年前的幼狼桡骨，上面刻有55道深痕。这是至今为止人们发现的最早的记数资料。右下图是我国北京郊区周口店出土，大约一万年前“山顶洞人”用的刻符骨管。骨管上的点圆形洞代表着数目“一”；而长圆形洞，则很可能代表“十”。如果考古学家最终确证是这样的话，那么图中A、B所代表的，就应该是“5”和“13”。令人惊讶的是：这种古老的刻划记数法，在个别

地区竟被使用到近代！左下图是我国云南地区傈僳族五十年代的一块刻木，上面的四个符号表达了以下意思："三个人，月亮圆时，和我们见面了，今送上大中小三包土产，以表心意。"





结绳记数，几乎在所有民族的文化中都曾出现过。传说古波斯王一次打仗，命令将士们守一座桥，要守六十天。为了把"六十"这个数准确地表示出来，波斯王用一根长长的皮条，在上面系了六十个结。他对将士们说："我走后你们一天解一个结，什么时候解完了，你们的任务便就完成，可以回家了！"我国春秋时期的古书《易经》，也曾记述过上古时期我们祖先"结绳而治"的史实。下图是甲骨文中的"数"字。它的右边表示右手，左边则是一根打了许多绳结的木棍。细细看去，还真有点像一只手在打结呢！

在南美的印加族，人们习惯每收进一捆庄稼，就在绳子上挽一个结，用来记录收获多少。这种习俗在一些偏僻的山村，甚至一直沿袭到现在。

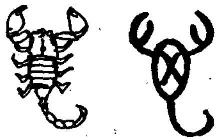
久远的年代，常常会使事件笼罩上一层神秘的色彩。地球上几个最古老民族的早期数字系统，对于数学史家来说，依然存在着不

少的谜！

这些数字系统，基本上是十进制的。这种不约而同的进制，大约是因为人们的双手都长着十个指头的缘故。

然而古巴比伦的楔形文字，为什么既有十进制，又有六十进制？玛雅人的数字在画第一个椭圆时表示“乘以 20”，而当画第二个椭圆时为什么变成“乘以 18”？在古埃及数字中为什么用“”表示“100”？等等，至今人们还不是完全清楚！

古代中国的数字，有些是象形的，如一至四；有些是假借的，如“X”即“午”，“∩”即“入”等等。至于为什么用“”和“”表示百和千？人们猜测：“”可能表示果子，而“”表示草。纤纤细草，遍布大地；累累硕果，挂满树梢！用这两样东西代表“百”和“千”的数量，似乎有点道理。令人难以捉摸的是：为什么代表“一万”的符号，如



此之像一只蝎子？莫非史前有一个时期，这种其貌不扬的小动物，曾经极度繁衍，肆虐一时。为此，上古人书其形，表其多，称之为“万”。事实究竟如何，只好留待史学家去细细查考了！

现今普遍使用的阿拉伯数字，是印度人创造的。它被冠以“阿拉伯”的头衔，是一种历史的误会。欧洲人起初认为这种先进的数码来自阿拉伯。其实阿拉伯地区仅仅充当了转手而已！

阿拉伯数码不仅简洁、明了，而且对于“0”的使用，更是一种伟大的创造！这种数码无以伦比的优点，甚至到今天人们才逐渐体会到。读者只要看一看在计算器的显示屏上，是怎样显现出这些赏心悦目的数字，就必然会有一种深刻的感受。

有趣的是，大自然似乎也对这种数码表示偏爱。右图是生长在热带地区的一种蝴蝶，它翅膀中央的图案，竟是两个颇为标准的阿拉伯数字“8”和“9”。这真是天工造物！

在记数传奇的最后，我们还要提一下一个近代的大数“googol”。

公元1940年，美国作家E·卡斯纳在《数学和想象》一本科普书中，引进了一个叫“googol”的数。此数等于100个10连乘，即10^{100}。它相当于中国人讲的

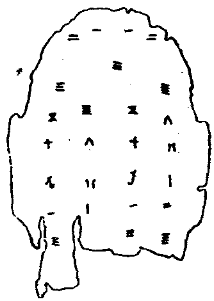
“一万亿亿亿亿亿亿亿亿亿亿亿亿”。

不知什么缘故，这个非数学家创造出的数“googol”，居然很快风靡全球，以至于如今的袖珍辞典，也收进了这个新词。这不能不算是20世纪的一件奇事！

2. 大数春秋

原始的人类对数的认识是极为粗糙的。那时部落的智者，其计数水平无论如何也难以与今天的幼儿园小朋友相抗衡。那时最高级别的数学竞赛，大概会是这样的：人们期望在数的大小比较上，一决雌雄！某甲先报了一个他认为最大的数“二”，不料某乙智商颇“高”，居然报出一个比“二”还大一的数“三”，这是那个时代人们对“大数”认识的极限。某甲冥思苦想，实在想不出什么更大的数。他本想说“许多”，因为他认为“许多”要比“三”大。但“许多”是数吗？他茫然了，终于表示认输！

到了上古时期，人们仍满足于一些不大的数。因为对于日常生活，这已经足够了！罗马数字中的最大记号是“M”，它代表着1000。倘若古罗马人想用自己的记数法表示今天罗马城人口的话，那将是一项艰巨的劳动。因为，无论他多么地训练有素，也只能一个接一个地写上数以千计的“M”才行！



在三、四千年前的古埃及，人们认为10^4是极大的数，这样的数已经模糊的令人难以想象，所以称为“黑

暗”。几个世纪以后界限放宽到 10^8，即“黑暗的黑暗”，并认为这是人类智慧的边界。

在我们古老的国度，从三千五百年前的殷虚的考古中，人们在兽骨和龟板上的刻辞里，发现了许多数目，其中最大的达“三万”。上图是出土的殷虚甲骨上的数目字。

印度是“大数”传说的故乡。据说，舍罕王打算重赏象棋发明人宰相西萨·班。这位聪明的大臣跪在国王面前说：“陛下，请您在这张棋盘的第一个小格内，赏我一粒麦子；在第二个小格内给两粒；第三个小格内给四粒；以后每一小格都比前一小格加一倍。陛下啊，把这样的摆满棋盘 64 个格子的麦粒，都赏赐给您的仆人吧！”

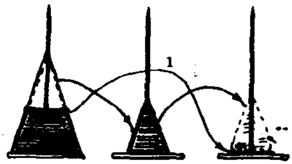
西萨·班宰相要求的麦粒总数为

$$2^{64}-1=18446744073709551615。$$

这相当于当今世界两千年小麦产量的总和！

这个故事的最终结局人们并不清楚。猜想西萨·班聪明反被聪明误，最后因这笔无法兑现的奖赏，而被舍罕王砍掉了脑袋。

另一个大数传说与“世界末日”问题有关。传说在印度的贝拿勒斯圣庙里安放着一块黄铜板，板上插着三根针。最初，其中的一根针上，从下到上串上由大到小的 64 叶金片。据说当时梵天曾经授言：不论黑夜白天，都要有一个僧侣值班，把金片在三根针上移来移去，但小片永远要在大片上面。当所有的 64 叶金片，都从起先的那根针，移到另一根针上时，“世界的末日”便将来临！



计算的结果表明，要把 64 叶金片都移到另一根针上去，需要移动的次数，恰好与西萨·班要求的麦粒数相等。如果一秒钟移一次的话，则需要移动 5800 亿年！这远远超过了整个太阳系的存在时间！

在古希腊的科学家中，阿基米德的智慧是无与伦比的。他找到了一种表示大数的方法，并用此表示出整个宇宙所包含的砂粒数。这个数字相当于 10^{63}。

然而阿基米德当时所认识的宇宙，不同于今天人们认识的宇宙，其半径大约要小上 10^{10}倍。由此算来，现今宇宙所能装下的砂粒数应为 10^{93}。

数是量的抽象，量则是数的载体。人类对现实量的认识随着时代的进程而逐渐深化。

迄今为止，人类所认识的最小物体是软 γ 射线和粒子，它们大约为 10^{-15}～10^{-14}米；而人所认识的宇宙可见边界却远达百亿光年，相比之下可测长度跨越了 41 个数量级。

时间只能从过去走到现在，又从现在奔向将来！一个 Ω 介子的寿命，少到只有 10^{-22}秒，而红矮星的寿命却高达 300 亿亿秒，可测时间竟跨越了 40 个数量级。

在质量方面，一个电子质量约为 10^{-30}千克，而宇宙总质量却多达 10^{53}千克，相比之下可计质量跨越了 83 个数量级。

但所有上述这些，都还没有超过按阿基米德方法算出的现今宇宙砂粒数。

目前，在有意义的大数中，“默森素数”稳居榜首！

公元 1644 年，法国数学家马林·默森（M·Mersenne）指出，在形如 2^p-1 的式子中存在着许多素数。为方便叙述，我们把 $M_p=2^p-1$ 称为“默森数”，而把默森数中的素数称为“默森素数”。

默森本人列出了九个“默森素数”，它们是：

M_2，M_3，M_5，M_7，M_{13}，M_{17}，M_{19}，M_{31}，M_{127}。

人们至今仍不知道，默森用什么办法判定他找到的这些数是素数。但默森曾经断言的 M_{67} 和 M_{257} 是素数，后来被否定了。同时默森还漏掉了 M_{127} 之前的三个素数 M_{39}、M_{61} 和 M_{107}。

公元 1962 年，人们借助于电子计算机又找到了八个默森素数，其中最小一个是 M_{521}，最大一个是 M_{11213}，有 3376 位数字，这是当时的素数奥林匹克冠军！

从那时起时间又过了三分之一世纪，素数冠军的宝座又几番易手，先是 M_{19937}；而后公元 1979 年为 M_{44497}；公元 1983 年为 M_{86243}；公元 1985 年为 M_{216091}。

公元 1991 年，美国数学家发现 M_{756839} 为素数，它有 227832 位，它的后承完全数（见第六章 § 5）

$$(2^{756839}-1)\ 2^{756838}$$

有 455663 位，这是目前人类认识的有意义的数中的最高纪录！

3. π 的史诗

π 是圆周长与直径的比值。一部计算圆周率 π 的历史，被

誉为人类“文明的标志”。

在上古年代，人们普遍认为圆周长等于直径的三倍。我国早期的数学著作《周髀算经》里，就有“径一周三”之说。古希伯来人似乎也是这样认为的。据传当时他们要建造一个熔池，规定：“池为圆形，对径为十腕尺，池高为五腕尺，其周长为三十腕尺。”可见，当时的希伯来人也认为 $\pi=3$。

Archimedes

（公元前 287～前 212）

在历史上科学地确定 π 值，要首推古希腊著名科学家阿基米德(Archimedes)。公元前三世纪，阿基米德极耐心地计算了圆内接正 96 边形的周长，发现 π 的值略小于 $\frac{22}{7}$，而略大于 $\frac{223}{71}$，从而得出 $\pi=3.14$。

公元 263 年前后，我国魏晋时期的数学家刘徽，利用“割圆术”计算了圆内接正 3072 边形的面积，求得：

$$\pi\approx\frac{3927}{1250}=3.1416。$$

在此之前，我国东汉时期的科学家张衡，曾主张在实用中取

$$\pi\approx\sqrt{10}=3.16。$$

刘徽之后又过了大约两百年，我国南北朝时期杰出的数学家祖冲之，用至今人们还不太清楚的方法，确定了 π 的真值介于 3.1415926 与 3.1415927 之间。他还主张用 $\frac{22}{7}$ 作为 π 的粗略近似值（疏率），而用 $\frac{355}{113}$ 作为 π 的精确近似值（密