



21 世纪高等学校规划教材
Textbook Series of 21st Century

电磁场

薛太林 主编



中国电力出版社

<http://jc.cepp.com.cn>



21 世纪高等学校规划教材
Textbook Series of 21st Century

电磁场

主 编 薛太林
编 写 吝伶俐 李临生 潘 峰
主 审 熊光煜



中国电力出版社

<http://jc.cepp.com.cn>

内 容 提 要

本书为 21 世纪高等学校规划教材。

本书是根据高等学校工科电气工程及其自动化类学科“电磁场理论”课程的教学大纲编写的,内容包括矢量分析与场论基础、静电场的基本概念、静电场的计算问题、恒定电场、恒定磁场、边值问题的求解、时变电磁场、平面电磁波、波导与谐振腔、均匀传输线。本书精心配备了例题和习题,每章都有小结,便于使用者学习和复习;附录中增设本课程涉及的专业名词中英文对照,有助于使用者查阅相关的外文资料。

本书可作为高等学校工科电气工程及其自动化专业和电子信息工程专业本、专科生学习电磁场理论的教材,也可作为相关工程技术人员参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场/薛太林主编. —北京:中国电力出版社,
2006

21 世纪高等学校规划教材

ISBN 7 - 5083 - 4033 - 7

I. 电... II. 薛... III. 电磁场—高等学校—教材
IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 158447 号

中国电力出版社出版、发行

(北京三里河路 6 号 100044 <http://jc.cepp.com.cn>)

汇鑫印务有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2006 年 2 月第一版 2006 年 2 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 17.5 印张 403 千字

印数 0001—3000 册 定价 26.00 元

版 权 专 有 翻 印 必 究

(本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换)

前 言

电磁场理论是高等学校电气工程及其自动化类学科的一门技术基础课。它所涉及的内容是电气工程及其自动化类专业学生应具备的知识结构的必要组成部分,同时又是一些交叉领域的学科生长点和新兴边缘学科发展的基础。

本书是根据高等学校工科电气工程及其自动化类学科《电磁场理论》课程的教学大纲而编写,计划授课时数为68学时。本书可作为高等学校工科电气工程及其自动化专业学习电磁场理论课程的教材,也可作为工科电子信息工程专业本科生学习电磁场与电磁波理论的参考书。带*号的章节可根据不同专业、不同课时合理选用。

本书注重基本概念、基本规律和基本的分析计算方法,同时重视工程实践问题的处理,适当兼顾了强电和弱电专业的要求,精心配备例题和习题。每章都有小结,便于使用者学习和复习;附录中增设本课程涉及的专业名词中英文对照,有助于使用者查阅相关的外文资料。

全书共分10章。第1章简要地阐述矢量分析与场论基础,为分析电磁场理论打好数学基础;第2、3章阐述静电场的基本概念和有关计算问题,对架空地线的作用进行了定量分析;第4章阐述恒定电场,重点对多种接地情形的接地电阻进行了计算;第5章阐述恒定磁场,对架空输电线周围任意一点的磁场进行了定量分析;第6章阐述边值问题的求解,重点讲解了分离变量法和有限差分法及其应用,并阐述了有限元法的基本原理;第7章阐述时变电磁场;第8章阐述平面电磁波在理想介质中传播的基本规律,并对导电媒质中的电磁传播规律进行了分析;第9章阐述了电磁波在波导中的传播规律和谐振腔的工作原理;第10章阐述均匀传输线的电磁波传播规律。

本书由山西大学工程学院薛太林统稿、担任主编;太原理工大学齐伶俐和太原科技大学李临生、潘峰参加编写。书稿编写内容分工:薛太林编写第1、8、10章和附录;齐伶俐编写第2、3、7、9章;李临生编写第4、6章;潘峰编写第5章。书稿承蒙太原理工大学熊光煜教授主审,提出了许多宝贵意见,编者在此表示衷心的感谢。

对于本书中的不妥之处,衷心欢迎使用本书的师生和其他读者批评指正。

编 者

2005年9月

目 录

前言

第 1 章 矢量分析和场论基础	1
1.1 矢量分析基础	1
1.2 场的等值面和矢量线	2
1.3 标量场的方向导数和梯度	4
1.4 矢量场的通量和散度	5
1.5 矢量场的环量和旋度	6
1.6 常用公式	8
习题	12
第 2 章 静电场的基本概念	13
2.1 库仑定律和电场强度	13
2.2 电位和电位差	16
2.3 真空中的高斯定律	19
2.4 等位面、等位线和电场强度线	21
2.5 静电场中的导体和电介质	23
2.6 电位移矢量和介质中的高斯定律	27
2.7 静电场的基本方程	29
2.8 不同介电媒质分界面上的边界条件	31
本章小结	34
习题	35
第 3 章 静电场的计算问题	38
3.1 静电场解的惟一性定理	38
3.2 镜像法	41
3.3 电轴法	46
3.4 电容器及电容的计算	51
3.5 静电场的能量和力	54
* 3.6 多导体系统和部分电容	62
* 3.7 架空地线的作用	67
本章小结	69
习题	71
第 4 章 恒定电场	73
4.1 电流密度和电动势	73
* 4.2 电流连续性	77

4.3	恒定电场的基本方程和边界条件	77
4.4	恒定电场与静电场的相似对比	80
4.5	球形接地极和点源	81
* 4.6	线源	82
4.7	镜像法	84
* 4.8	接地极附近的跨步电压	87
	本章小结	88
	习题	89
第5章	恒定磁场	91
5.1	安培力定律和磁感应强度	91
5.2	磁通和磁通的连续性原理	95
5.3	安培环路定律	96
* 5.4	磁偶极子的磁场	98
5.5	物质的磁化和磁场强度	99
5.6	恒定磁场的基本方程和边界条件	102
5.7	标量磁位	104
5.8	磁场中的镜像法	106
5.9	矢量磁位	108
5.10	电感及其计算	112
5.11	磁场能量及磁场力	118
* 5.12	圆形线圈任一点周围的磁场	123
* 5.13	输电线附近的磁场	125
	本章小结	127
	习题	130
第6章	边值问题的求解	133
6.1	位场的边值问题	133
6.2	分离变量法	133
6.3	有限差分法	137
6.4	图解法	141
* 6.5	有限元法	143
* 6.6	复变函数法	150
	本章小结	153
	习题	153
第7章	时变电磁场	155
7.1	全电流定律	155
7.2	电磁感应定律	158
7.3	时变电磁场基本方程组	160
7.4	时变电磁场中的边界条件和解的惟一性	163

7.5	电磁场的能量和能量传播、坡印亭矢量	167
7.6	电磁场方程和坡印亭矢量的相量形式	170
7.7	时变电磁场中的动态位	173
7.8	电磁辐射	177
	本章小结	180
	习题	183
第8章	平面电磁波	185
8.1	理想介质中的均匀平面波	185
8.2	均匀平面波的一般形式和极化	191
* 8.3	均匀平面波的反射和折射	194
8.4	导电媒质中的均匀平面波	203
* 8.5	硅钢片中的涡流	207
8.6	集肤效应、电磁屏蔽、邻近效应	210
	本章小结	214
	习题	216
* 第9章	波导与谐振腔	218
* 9.1	导行电磁波的分类	218
* 9.2	矩形波导	221
* 9.3	波导中的能量传输和损耗	229
* 9.4	谐振腔	231
	本章小结	236
	习题	236
* 第10章	均匀传输线	238
* 10.1	无损耗均匀传输线的微分方程	238
* 10.2	无损耗均匀传输线的传播特性	240
* 10.3	无损耗均匀传输线方程的正弦稳态解	242
* 10.4	无损耗均匀传输线中波的反射和透射	243
* 10.5	无损耗均匀传输线的入端阻抗	249
* 10.6	无损耗均匀传输线的阻抗匹配	254
* 10.7	有损耗均匀传输线	257
	本章小结	260
	习题	262
附录一	电磁量的符号和单位	265
附录二	电磁材料的参数和物理常数	266
附录三	电磁场专业名词中英对照	268
参考文献		271

第 1 章 矢量分析和场论基础

本章是电磁场的数学基础。首先介绍矢量的基本概念,给出矢量运算的几何意义。介绍场的基本概念,导出标量场的等值面方程和矢量场的矢量线方程。通过介绍标量函数方向导数的概念,给出直角坐标系中梯度的计算公式。通过介绍矢量函数通量的概念,给出直角坐标系中散度的计算公式。通过介绍矢量函数环量和环量面密度的概念,给出直角坐标系中旋度的计算公式。最后引入哈密尔顿算子和拉普拉斯算子的定义和运算规则,给出三种常用坐标系中用哈密尔顿算子和拉普拉斯算子表示的梯度、散度和旋度的计算公式以及常用矢量运算恒等式。

1.1 矢量分析基础

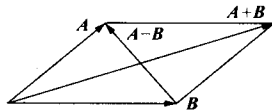
1.1.1 标量、矢量和单位矢量

只有大小、没有方向的量称为标量。不仅具有大小,而且具有空间方向的量称为矢量。矢量的大小用绝对值表示,叫做矢量的模。模为 1 的矢量叫作单位矢量,用 $\mathbf{e}$ 表示。如 $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 、 $\mathbf{e}_z$ 分别表示与 x 、 y 、 z 三个坐标同方向的单位矢量。

1.1.2 矢量的加减法

设 $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z$, 则

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x) \mathbf{e}_x + (A_y \pm B_y) \mathbf{e}_y + (A_z \pm B_z) \mathbf{e}_z$$



(1-1) 图 1-1 两矢量的加减

几何关系如图 1-1 所示,符合平行四边形运算法则。

1.1.3 矢量的数乘

$$\lambda \mathbf{A} = \lambda A_x \mathbf{e}_x + \lambda A_y \mathbf{e}_y + \lambda A_z \mathbf{e}_z \quad (1-2)$$

其中, λ 为实数。

1.1.4 两矢量的点积

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \theta \quad (1-3)$$

式中, θ 是矢量 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 之间的夹角; A 是矢量 $\mathbf{A}$ 的模; B 是矢量 $\mathbf{B}$ 的模; $B \cos \theta$ 是矢量 $\mathbf{B}$ 在矢量 $\mathbf{A}$ 所在方向上的投影 (如图 1-2 所示); 同样, $A \cos \theta$ 是矢量 $\mathbf{A}$ 在矢量 $\mathbf{B}$ 所在方向上的投影。矢量的点积运算满足如下公式

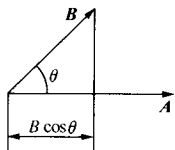


图 1-2 两矢量的点积

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1-4)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1-5)$$

$$(\lambda \mathbf{A}) \cdot (\mu \mathbf{B}) = \lambda \mu (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1-6)$$

其中, λ 、 μ 均为实数。

显然

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = AA = A^2 \quad (1-7)$$

1.1.5 两矢量的叉积

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = AB \sin \theta \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (1-8)$$

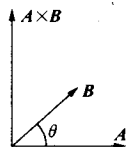


图 1-3 两矢量的叉积

式中: $\mathbf{e}_n$ 为与矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都垂直的单位矢量, 而且 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{e}_n$ 构成右手螺旋关系; θ 为 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 之间的夹角 (如图 1-3 所示), 并取 $\theta \leq 180^\circ$; $AB \sin \theta$ 为 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的模。

$AB \sin \theta$ 又是图 1-3 中由 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 构成的平行四边形的面积。矢量的叉积运算满足如下公式

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \quad (1-9)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0, \mathbf{A} \times (-\mathbf{A}) = 0 \quad (1-10)$$

1.1.6 三矢量的混合积

三矢量可以有三种不同的形式相乘。

第一种乘法是 $\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$, 这实际上是一个标量 $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ 和矢量 $\mathbf{A}$ 的数乘。

第二种乘法是 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, 它表示先求矢量叉积 $(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, 得一矢量, 然后再与 $\mathbf{A}$ 进行矢量的点积运算。这个乘法运算可用图 1-4 来说明。很明显, $(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 的模是图中平行六面体底面的面积, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 是该平行六面体的体积。而且, 此体积也等于 $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$ 和 $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 。因此, 可得到其运算公式

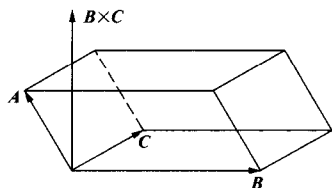


图 1-4 三矢量的混合积

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1-11)$$

第三种乘法称为三重矢量积, 如 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 或 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ 。注意 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 与 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ 不同, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 运算得到的矢量在 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 构成的平面内, 与矢量 $\mathbf{A}$ 垂直; 而 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ 运算得到的矢量在 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 构成的平面内, 与矢量 $\mathbf{C}$ 垂直。三重矢量积 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 运算满足如下公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1-12)$$

1.2 场的等值面和矢量线

1.2.1 场的基本概念

在许多学科领域, 为了考察某些物理量在空间的分布和变化规律, 引入场的概念。如果空间中的每一点都对应着某个物理量一个确定的值, 就说在这空间确定了该物理量的场。

场中的每一点都对应着一个物理量。由标量构成的场称为标量场。如温度场、能量场、电场等。由矢量构成的场称为矢量场，如速度场、力场、电场和磁场等。

空间的一点 M ，可以由它的三个坐标 x 、 y 、 z 确定。因此，一个标量场和一个矢量场可分别用坐标的标量函数和矢量函数表示，其表示式为

$$u(M) = u(x, y, z) \quad (1-13)$$

$$\mathbf{A}(M) = \mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + A_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + A_z(x, y, z)\mathbf{e}_z \quad (1-14)$$

式中： A_x 、 A_y 、 A_z 分别为矢量函数 $\mathbf{A}$ 在直角坐标系中三个坐标轴上的投影，为标量函数； $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 、 $\mathbf{e}_z$ 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴正方向的单位矢量。

设 α 、 β 、 γ 分别为矢量 $\mathbf{A}$ 与三个坐标轴正向之间的夹角，称为方向角。 $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$ 称为方向余弦，则

$$\mathbf{A}(M) = A\cos\alpha\mathbf{e}_x + A\cos\beta\mathbf{e}_y + A\cos\gamma\mathbf{e}_z \quad (1-15)$$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A}, \quad \cos\beta = \frac{A_y}{A}, \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{A} \quad (1-16)$$

如果场中物理量的值不仅与该点的空间位置有关，而且随时间变化，则称这种场为时变场；若场中的物理量的值仅与空间位置有关，而不随时间变化，则称这种场为恒定场；若场中的物理量的值仅与时间有关，而不随空间位置变化，则称这种场为均匀场。

1.2.2 标量场的等值面

设标量场 $u(M)$ 是空间的连续函数，那么通过所讨论空间的任何一点 M_0 ，可以作出这样的一个曲面 S ，在它上面每一点处，函数 $u(M)$ 的值都等于 $u(M_0)$ ，即在曲面 S 上，函数 $u(M)$ 保持着同一数值 $u(M_0)$ ，这样的曲面 S 叫做标量场 u 的等值面。等值面的方程为

$$u(x, y, z) = C \quad (1-17)$$

式中： C 为常数。

给定不同的 C 值，可以得到一系列的等值面，称为等值面族，如图 1-5 所示。等值面与 xoy 平面的相交线，为 xoy 面内的等值线。对于二维分布场，用等值线描述。

等值面族可以充满整个标量场所在的空间。等值面互不相交，因为如果相交，则函数 $u(x, y, z)$ 在相交处就不具有惟一的函数值。场中的每一点只与一个等值面对应，即经过场中的一个点只能作出一个等值面。

电磁场中的电位场就是一个标量场。由电位相同的点所组成的等值面叫做等电位面。

1.2.3 矢量场的矢量线

前面引入等值面概念来形象地描述标量场。对于矢量场，可以用矢量线来形象地表示其分布情况。

所谓矢量线，是指在其每一点处的切线方向和该点的场矢量方向相同的曲线，如图 1-6 所示。可见，矢量线反映了场矢量在线上每一点的方向。矢量场中每一点有一条矢量

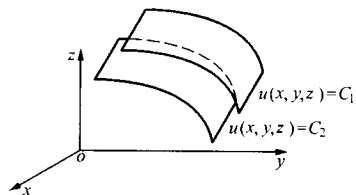


图 1-5 等值面

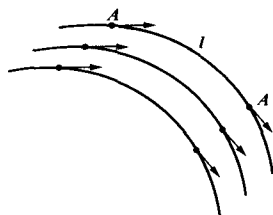


图 1-6 矢量线

线通过, 矢量线应是一族曲线, 任意两条矢量线互不相交, 它充满了整个矢量场所在的空间。

设 $A(x, y, z)$ 为矢量线上任意一点, 其矢径 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, 则矢量微分

$$d\mathbf{l} = d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z \quad (1-18)$$

按照矢量线的定义, 在点 A 处, 与矢量线相切的矢量必定与 A 点处的场矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ 的方向相同, 因此有

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (1-19)$$

式 (1-19) 为矢量线所满足的微分方程, 其解为矢量线族, 可利用过 A 点这个条件, 求得过 A 点的矢量线。或者利用 $d\mathbf{l} \times \mathbf{A} = 0$, 由式 (1-8) 求得相同的矢量线方程。

在电磁场中, 电力线和磁力线都是矢量线。

1.3 标量场的方向导数和梯度

标量场 $u = u(x, y, z)$ 是空间位置的函数。它在空间沿某一方向 l 上的变化情况, 可用该方向上的方向导数表示

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (1-20)$$

其中, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为 l 方向上的方向余弦。显然, 在不同方向上的方向导数是不相等的。

式 (1-20) 还可以写成

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \cdot (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y + \cos \gamma \mathbf{e}_z) = \text{grad} u \cdot \mathbf{e}_l \quad (1-21)$$

其中, $\mathbf{e}_l = \cos \alpha \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y + \cos \gamma \mathbf{e}_z$ 是 l 方向上的单位矢量; 而 $\text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z$ 是一个矢量, 它在各坐标轴上的分量分别代表 u 在该方向上的变化率。根据矢量点积的定义, 它在 l 方向上的投影, 即为 u 在 l 方向上的变化率。所以, $\text{grad} u$ 这个矢量, 可以用来描述标量场 u 在空间沿各坐标轴方向变化的情况, 称为标量场的梯度。

设梯度的方向沿 $\mathbf{e}_n$ 方向, 那么, u 在 $\mathbf{e}_n$ 方向的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad} u \cdot \mathbf{e}_n = |\text{grad} u| \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n = |\text{grad} u| \quad (1-22)$$

在其他方向的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad} u \cdot \mathbf{e}_l = |\text{grad} u| \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l = |\text{grad} u| \cos \theta \quad (1-23)$$

式中: θ 为 $\mathbf{e}_l$ 方向与 $\mathbf{e}_n$ 方向之间的夹角。

显然, 沿梯度的方向, u 的方向导数最大; 反过来讲, 梯度的方向是标量场变化率最大的方向, 其大小就等于沿这个方向上的变化率。

1.4 矢量场的通量和散度

1.4.1 矢量场的通量

在场中选取一曲面 S 。为区分曲面的两侧，取定其中的任何一侧作为曲面的正侧。如果曲面是闭合的，习惯上取外侧为正侧。表示曲面正侧的方法是取曲面的法线方向，如图 1-7 所示。在曲面 S 上任取一点 M 与包围这点在内的一曲面元 dS ，过 M 点作曲面的法向单位矢量 $\mathbf{e}_n$ 。

矢量 $\mathbf{A}(M)$ 穿过曲面元的通量定义为

$$d\Phi = A_n dS = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n dS = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-24)$$

式中： A_n 为矢量 $\mathbf{A}(M)$ 沿曲面法向方向 $\mathbf{e}_n$ 的分量。

因此，矢量场函数 $\mathbf{A}(M)$ 穿过场中某一有向曲面 S 的通量定义为

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-25)$$

通量是一个标量。由于场矢量并不总是与曲面的法线方向一致，所以 $d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 可能取正值，也可能取负值。当场矢量与曲面的法线方向之间的夹角为锐角时， $d\Phi > 0$ ；当场矢量与曲面的法线方向之间的夹角钝角时， $d\Phi < 0$ ；当场矢量与曲面的法线方向之间垂直时， $d\Phi = 0$ 。

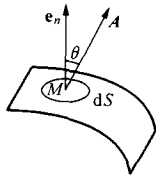


图 1-7 通量的计算

当 S 为闭合曲面时，且指定外侧法线方向为其正方向，则有

$$\Phi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S A_n dS \quad (1-26)$$

若 $\Phi > 0$ ，表示流出闭合面的通量大于流入的通量，说明有矢量线从闭合面内散发出来；若 $\Phi < 0$ ，表示流入闭合面的通量大于流出的通量，说明有矢量线被吸收到闭合面内；若 $\Phi = 0$ ，表示流出闭合面的通量等于流入的通量，说明矢量线处于某种平衡状态。

1.4.2 矢量场的散度

以上讨论了矢量在闭合面上的通量。利用通量概念只能分析闭合面内场矢量源的整体情况。要分析场中任一点的情况，必须将闭合面缩小到一点上。为此，引入矢量场的散度概念。

设有矢量场函数 $\mathbf{A}(M)$ ，在场中作一包围 M 点的有向闭合曲面 S 。设其所包围的空间区域为 Ω ，体积为 ΔV 。当 Ω 收缩到 M 点，即 $\Delta V \rightarrow 0$ 时，若极限 $\lim \left[\frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \right]$ 存在，则称此极限值为矢量场 $\mathbf{A}(M)$ 在点 M 处的散度，记作 $\text{div} \mathbf{A}$ ，即

$$\text{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (1-27)$$

散度就是通量的体密度，即单位体积发出的通量。矢量的散度是标量，因此，矢量的散度又形成一标量场，叫做矢量场的散度场。

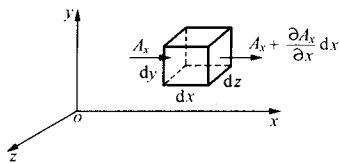


图 1-8 散度的计算

应用散度概念可以分析矢量场中任一点的情况。在 M 点, $\operatorname{div} \mathbf{A} > 0$, 表明 M 点是“正”源; $\operatorname{div} \mathbf{A} < 0$, 表明 M 点是“负”源; $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, 表明 M 点无源。如果在场中处处有 $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, 则称该场为无“源”场, 或称无散场。

散度的值和坐标系的选取无关, 但在不同的坐标系下有不同形式的表达式。在直角坐标系下散度的表达式, 可由定义求得如下。

考虑一小立方体 $dx dy dz$, 如图 1-8 所示。由左方穿入此小体积的通量为 $A_x dy dz$; 由右方穿出小体积的通量为 $(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx) dy dz$ 。故小体积在 x 方向发出的净通量为

$$(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx) dy dz - A_x dy dz = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz$$

同理可得, 在 y 方向发出的净通量为 $\frac{\partial A_y}{\partial y} dx dy dz$; 在 z 方向发出的净通量为 $\frac{\partial A_z}{\partial z} dx dy dz$ 。

故由该小体积发出的总通量为

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (1-28)$$

由散度的定义, 并考虑 $\Delta V = dx dy dz$, 可得

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-29)$$

由式 (1-29) 可见, 散度的大小, 与场量各分量沿该分量方向上的变化情况有关。

1.4.3 高斯散度定理

考虑由任意闭合曲面发出的通量, 则有

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV \quad (1-30)$$

或

$$\oint_S (A_x dy dz + A_y dz dx + A_z dx dy) = \int_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (1-31)$$

式 (1-30) 即为高斯散度定理的表达式。因为等式左端表示通过 S 面发出的总通量, 而等式右端则表示 V 内发出的总通量, 故两端相等是很显然的。高斯散度定理对空间任何连续可微矢量函数都是正确的。

1.5 矢量场的环量和旋度

1.5.1 矢量场的环量

在矢量场中选取一有向闭合曲线 l 。为了表示曲线的走向, 选定曲线的一个切线方向为曲线的正方向。如图 1-9 所示, 在闭合曲线 l 上任取一点 M , 过 M 点作曲线的切线方向的单位矢量 $\mathbf{e}_t$ 。取一弧元 $d\mathbf{l} = \mathbf{e}_t dl$, 矢量函数 $\mathbf{A}(M)$ 沿场中有向闭合曲线 l 的线积分

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{A}_t \cdot d\mathbf{l} = \oint_l A \cos \theta d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-32)$$

称为矢量场 $\mathbf{A}$ 按所取方向沿曲线 l 的环量。

环量是描述矢量场特征的量，是一个标量。由定义式可知，它的数值不仅与场矢量 $\mathbf{A}$ 有关，而且与回路的形状和取向有关。这说明 Γ 表示的是场矢量沿 l 的总体旋转特性。为了研究场矢量 $\mathbf{A}$ 在一点附近的性质，就需要让 l 收缩到一点，为此，引入环量面密度的概念。

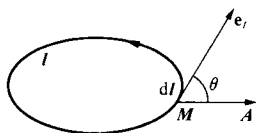


图 1-9 环量的计算

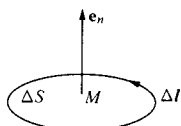


图 1-10 环量面密度的计算

如图 1-10 所示，设 M 为矢量场中的一点，在 M 点取一单位矢量 $\mathbf{e}_n$ ，并在 M 点周围取小闭合回路 Δl ，令 Δl 的环绕方向与 $\mathbf{e}_n$ 构成右手螺旋关系，作以 Δl 为边界、以 $\mathbf{e}_n$ 为法线方向、且过点 M 的小曲面 ΔS 。当 ΔS 以任意方式收缩到 M 点时，若极限

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \Gamma}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta l} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (1-33)$$

存在，则称该极限值为矢量 $\mathbf{A}$ 在 M 点沿 $\mathbf{e}_n$ 方向的环量面密度。

$\oint_{\Delta l} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} / \Delta S$ 是环量的平均面密度，取极限得到在 M 点的环量面密度。环量面密度与 $\mathbf{e}_n$ 有关，与 Δl 的形状无关。

式 (1-33) 的大小反映了 $\mathbf{A}$ 在 M 点沿 $\mathbf{e}_n$ 的垂直方向旋转的强弱情况。它与取定的方向 $\mathbf{e}_n$ 有关。在空间一点，方向 $\mathbf{e}_n$ 可以任意选取。对应于环量面密度最大时，场矢量 $\mathbf{A}$ 在 M 点沿 $\mathbf{e}_n$ 方向的旋转性最强。为了表述这种特性，引入旋度的概念。

1.5.2 矢量场的旋度

由上面所述可知，环量面密度是一个与方向有关的量。正如在标量场中，方向导数与方向有关一样。在标量场中，我们定义了梯度矢量，在给定点处，它的方向是方向导数最大的方向，其模是该最大的方向导数值。它在任一方向上的投影，就是该方向上的方向导数。由此，希望能找到这样一种矢量，它与环量面密度的关系，正如梯度与方向导数的关系一样。

若在矢量场 $\mathbf{A}$ 中的一点 M 处存在矢量 $\mathbf{R}$ ，它的方向是 $\mathbf{A}$ 在该点环量面密度最大的方向，它的模就是这个最大的环量面密度，则称矢量 $\mathbf{R}$ 为矢量场 $\mathbf{A}$ 在点 M 的旋度，记为

$$\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{R} \quad (1-34)$$

因此，旋度矢量在数值和方向上表示了最大的环量面密度。 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{e}_n$ 方向的环量面密度即 $\text{rot} \mathbf{A}$ 在 $\mathbf{e}_n$ 方向上的投影，可表示为

$$(\text{rot} \mathbf{A})_n = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta l_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_n} = \text{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n \quad (1-35)$$

旋度的值和坐标系的选取无关。但其表达式则随坐标系而不同。在直角坐标系下旋度的表达式，可由定义求得如下：

考虑 $yo z$ 平面上的小回路如图 1-11 所示，沿此回路的环量为

$$\oint_{\Delta l} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A_y dy + \left(A_x + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy \right) dz - \left(A_y + \frac{\partial A_x}{\partial z} dz \right) dy - A_z dz$$

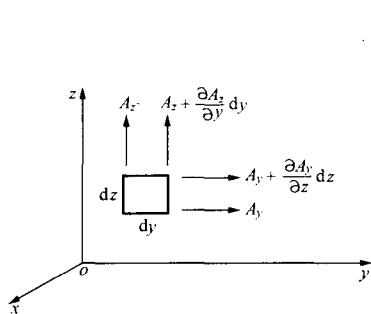


图 1-11 旋度的计算

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy dz$$

由定义得

$$(\text{rot} \mathbf{A})_x = \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta S_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_x} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (1-36)$$

同理可得

$$(\text{rot} \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (1-37)$$

$$(\text{rot} \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (1-38)$$

故得

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1-39)$$

由式 (1-39) 可见, 旋度的大小, 与场量各分量沿垂直于该分量方向上的变化情况有关。

1.5.3 斯托克斯定理

考虑沿任一闭合曲线的环量, 可得

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\text{rot} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1-40)$$

或

$$\begin{aligned} &\oint_l (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \\ &= \int_S \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy \right] \end{aligned} \quad (1-41)$$

式 (1-40) 或式 (1-41) 即为斯托克斯定理的表达式。等式左端为 $\mathbf{A}$ 沿 l 的线积分; 右端的被积函数为沿 $d\mathbf{S}$ 元的边界的环量, 积分时, 沿 S 面内部各个 $d\mathbf{S}$ 元的边界的积分, 与相邻 $d\mathbf{S}$ 元的边界的积分相抵消, 而只有沿 S 面边界 l 上的积分部分保留下来, 故等式两端相等。

与高斯散度定理一样, 斯托克斯定理对任何连续可微的矢量函数都是有效的。

1.6 常用公式

1.6.1 哈密顿算子 ∇ 和拉普拉斯算子 ∇^2

在直角坐标系下, 哈密顿算子 ∇ 的定义为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1-42)$$

它是一个矢量形式的微分算子, 兼有微分运算和矢量运算的双重作用。引用这个符号后, 可以使相关表达式更为简单, 便于记忆。

∇ 对标量函数作用, 得矢量函数

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1-43)$$

∇ 以点积方式作用于矢量函数, 得标量函数

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1-44)$$

∇ 以叉积方式作用于矢量函数, 得矢量函数

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \times (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1-45)$$

显然, $\text{grad} u = \nabla u$, $\text{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$, $\text{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$

拉普拉斯算子 ∇^2 定义为

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1-46)$$

它是一个标量形式的二阶偏微分算子, 对于标量函数和矢量函数都可以作用。

∇^2 作用于标量函数, 得标量函数

$$\nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1-47)$$

∇^2 作用于矢量函数, 得矢量函数

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_y \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1-48)$$

1.6.2 常用矢量运算恒等式

- (1) $\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$
- (2) $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
- (3) $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$

- (4) $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \varphi \cdot \mathbf{A}$
 (5) $\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \nabla \varphi \times \mathbf{A} + \varphi \nabla \times \mathbf{A}$
 (6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
 (7) $\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi$
 (8) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
 (9) $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$
 (10) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
 (11) $\oint_l \psi d\mathbf{l} = - \int_s \nabla \psi \cdot d\mathbf{S}$
 (12) $\oint_s \mathbf{A} \times d\mathbf{S} = - \int_v \nabla \times \mathbf{A} dV$
 (13) $\oint_s \psi d\mathbf{S} = \int_v \nabla \psi dV$

式中, φ 、 ψ 为标量, $\mathbf{B}$ 为矢量。利用高斯散度定理可以证明公式 (12) 和 (13) 沿任意方向的投影成立, 也就证明了公式 (12) 和 (13) 的成立; 利用斯托克斯定理可以证明公式 (11) 沿任意方向的投影成立, 也就证明了公式 (11) 的成立。

1.6.3 梯度、散度、旋度等在圆柱坐标系中的表达式

如图 1-12 所示圆柱坐标系, 与直角坐标系的关系为

$$x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \phi = \arctan \frac{y}{x}, z = z$$

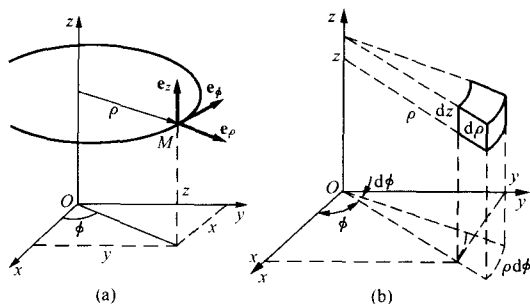


图 1-12 圆柱坐标系

在圆柱坐标系中, 设单位矢量为 $\mathbf{e}_\rho$ 、 $\mathbf{e}_\phi$ 、 $\mathbf{e}_z$, 则

$$\text{线段元} \quad d\mathbf{l} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\phi \mathbf{e}_\phi + dz \mathbf{e}_z \quad (1-49)$$

$$\text{面积元} \quad d\mathbf{S} = \rho d\phi dz \mathbf{e}_\rho + d\rho dz \mathbf{e}_\phi + \rho d\rho d\phi \mathbf{e}_z \quad (1-50)$$

$$\text{体积元} \quad dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (1-51)$$

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1-52)$$