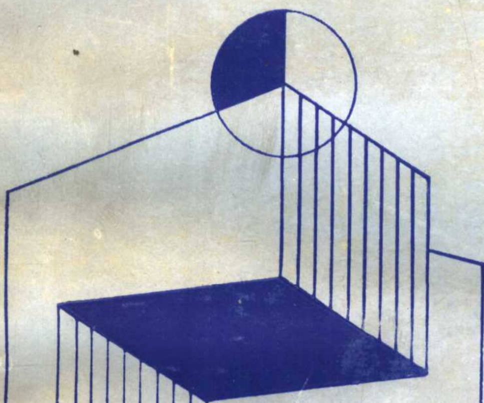
山东省五所师专
《解析几何》编写组编

解析几何



兰州大学出版社

解析几何

解 析 几 何

山东省临沂等五所师专
《解析几何》教材编写组

兰州大学出版社
1988·兰 州

内 容 提 要

本书是根据原教育部“二、三年制师范专科学校《解析几何》教学大纲”的精神，由山东省临沂等五所师专《解析几何》教材编写组编写的。内容为向量代数，轨迹与方程，平面及空间直线，坐标变换和二次曲线、二次曲面理论以及进一步的讨论。各部分内容后附有一定数量的习题，最后附有习题答案及提示。

本书可作为师专、教育学院相应学科的教材，也适用于函授和自学者选用。

解 析 几 何

山东省临沂等五所师专

《解析几何》教材编写组编

兰州大学出版社出版

（兰州大学校内）

定西地区印刷厂印刷　甘肃省新华书店发行

开本：787×1092毫米　1/32　印张：14　插页：1

1988年7月第1版　1988年7月第1次印刷

字数：297千字　　印数：1—7000册

ISBN7-311-00108-0/o·20　定价：2.32元

前　言

本书是根据教育部"二、三年制师范专科学校《解析几何》教学大纲"的精神和师专教学实际，在省教育厅的关怀支持下，由山东省临沂等五所师专《解析几何》教材编写组编写的。该书吸收了有关师专多年的教学经验，内容比较适当，论理比较简明，通俗易懂，注意了面向中学实际，书末配有习题答案和提示。本书不仅适用于师专、教育学院作为专业教材，也便于函授和自学。

参加本书编写的有：泰安师专李庆南、李云普、任国朝、于荣尊、张养民，临沂师专张立绥、陈志友、周尚启、王继忠、王运生（现调山东煤矿教育学院任教）、盖祖鸿（现调山东经济院学任教），济宁师专孙炳太、林元英，荷泽师专马知效、方荣凡，枣庄师专宋述立同志。参加本书编写的还有冷世俊、陈乃厚、方惠英等同志。陈志友、李庆南、孙炳太、周尚启等同志审理了初稿，最后张立绥同志整理定稿。

曲阜师范大学龚为邦教授、徐本顺副教授，烟台师范学院的张成先、魏远副教授在本书的成书过程中给予了很大的支持和帮助，在此表示感谢。

由于时间紧迫和编者水平所限，在内容和编排等方面定有不妥或错误之处，希望批评指正。

编　者

1987年12月

目　录

第一章　向量代数

解析几何是利用代数的（解析的）方法研究几何图形性质的学科。而坐标系则是将数与形联系起来的桥梁。对于空间解析几何，同样可以利用坐标方法。但对某些问题来讲，可以利用另一种方法——向量法。通过向量，把代数运算引到几何中来，使得某些问题更简捷地得到解决。

本章主要介绍向量代数的基本概念，讨论向量的线性运算和各种乘法运算。同时，还要介绍向量的某些应用。

§1·1 向量的概念

在实践活动中，我们常遇到两种不同类型的量，其中一类是较简单的量，在取定测量单位后，就可以由一个数完全确定。例如：温度、时间、质量、功、长度、面积、体积等，这种只有大小的量叫数量。另外还有一种较复杂的量。例如：位移、力、速度、加速度、电场等，它们不但有大小，而且还有方向。

定义1　既有大小又有方向的量叫做向量(也称矢量)。

由于有向线段既有大小又有方向，所以我们常用有向线段来表示向量。有向线段的起点和终点分别叫做向量的起点和终点，有向线段的方向表示向量的方向，而有向线段的长度代表向量的大小。起点是A，终点是B的向量记作$\overrightarrow{AB}$。有时也

用小写字母$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{x}$……表示。向量的大小叫做向量的模（也称向量的长度），向量$\overrightarrow{AB}$与$\vec{a}$的模分别记作$|\overrightarrow{AB}|$与$|\vec{a}|$。模等于零的向量叫做零向量，记作$\vec{0}$。它的起点与终点重合，其方向不定。不是零向量的向量叫做非零向量。

模等于1的向量叫做单位向量。与向量$\vec{a}$具有同一方向的单位向量叫做$\vec{a}$的单位向量，用$\vec{a}^0$来表示。

在几何中，我们把向量看成是一个有向线段，因此象对待线段一样，说到向量$\vec{a}$与$\vec{b}$互相平行时，意思就是它们所在的直线互相平行，记作$\vec{a}\parallel\vec{b}$（这时，向量$\vec{a}$和向量$\vec{b}$的方向相同或相反。据此，我们约定$\vec{0}$与任何向量平行）。类似地，我们可以说一个向量与一条直线或一个平面平行等。

定义2 两个向量如果模相等且方向相同，叫做相等向量。所有零向量都相等。向量$\vec{a}$与$\vec{b}$相等时，记作$\vec{a}=\vec{b}$。

两个向量的相等与它们的起点无关，只由它们的模和方向决定，因而将一个向量平行移动所得的向量与原向量相等，象这样可以自由平行移动的向量叫做自由向量。以后我们所说的向量除特别声明以外都是指自由向量。

由于自由向量起点的任意性，我们可按需要选取某一点作为所研究的一些向量的公共起点，比如说选取坐标原点作为公共起点。以坐标原点作为起点的向量叫做半径向量，简称向径，用$\overrightarrow{op}$或$\vec{r}$来表示。

定义3 两个模相等而方向相反的向量叫做互为反向量。向量$\vec{a}$的反向量记作$-\vec{a}$。

显然，向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$互为反向量，即$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$或$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$。如果把彼此平行的一组向量移到共同的起点，这一组向量一定在同一条直线上；同样，如果把平行于同一平面的一组向量移到共同的起点，这组向量一定在同一个平面上。

定义4 平行于同一直线的一组向量叫做共线向量。零向量与任何共线的向量组共线。

定义5 三个或三个以上平行于同一平面的一组向量叫做共面向量。零向量与任何共面的向量组共面。

显然，一组共线向量一定是共面向量，三向量中如果有两个向量是共线的，则这三个向量必共面。

习 题

1．在下列情形中，向量的终点各构成什么图形？

（1）把空间中的一切单位向量的起点移到坐标原点；

（2）把平行于某一平面π的一切单位向量的起点移到平面π上的一点A；

（3）把平行于某一直线的一切向量移到共同的起点；

（4）把平行于某一直线的一切单位向量移到共同的起点。

2．设点O是正六边形ABCDEF的中心，在向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$和$\overrightarrow{FA}$中，哪些向量是相等的？哪几对是相反的？

3．在一个平面上的四边形ABCD中，点K，L，M，N

分别是边AB，BC，CD，DA的中点，求证：$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$，当ABCD是空间四边形时，这个等式是否成立？

4．回答下列问题：

(1)如果向量$\vec{a}$，$\vec{b}$共线，向量$\vec{b}$，$\vec{c}$也共线，向量$\vec{a}$，$\vec{c}$是否共线？

(2)如果向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$共面，向量$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$也共面，向量$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{e}$是否也共面？

(3)如果向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$中，$\vec{a}$，$\vec{b}$共线，向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$是否共面？

(4)如果向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$共线，在什么条件下，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$也共线？

§1·2 向量的线性运算

本节中研究向量的加法、减法以及数与向量的乘法运算，我们把这些运算统称为向量的线性运算。

一、向量的加、减法

在物理学中，位移的合成一般用“三角形法则”，力的合成通常用“平行四边形法则”（也可归结为“三角形法则”）。这种合成法对于一般向量也是适用的。

定义1 已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，以空间任意一点O为始点，接连作向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，得一折线OAB，从折线的端

点O到另一端点B的向量$\overrightarrow{OB}=\vec{c}$叫做两向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的和，记作$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$。由两向量$\vec{a}$、$\vec{b}$求它们的和$\vec{a}+\vec{b}$的运算叫做向量的加法。

根据定义1，由图1—1我们有

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$$

这种求两向量和的方法叫做三角形法则。

如果以两向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$为邻边组成一个平行四边形OACB（如图1—2），由定义1可知，对角线向量$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$。这种求两向量和的方法叫做平行四边形法则。

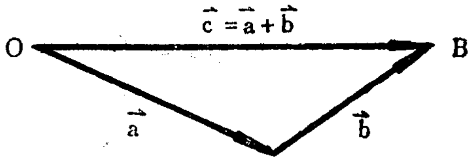


图1—1

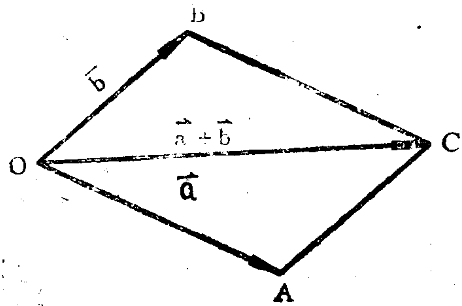


图1—2

由向量加法的定义，显然有

1．$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

2．$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

向量加法满足下述运算性质：

3．交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

4．结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

证　先证交换律。对于两向量$\vec{a}$、$\vec{b}$不共线的情形，由图1—2知

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$$

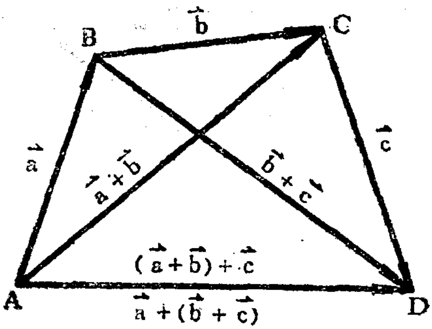


图1—3

所以$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$。对于两向量$\vec{a}$、$\vec{b}$共线的情形，留给读者自行证明。

再证结合律。如图1—3，作$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{c}$

$$\because(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$$
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$$

$$\therefore(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

由于向量的加法满足交换律和结合律，因此可以推知，对任意有限个向量$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$，不论它们相加的先后顺序与结合顺序如何，它们的和总是相同的，所以可以记作

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$$

由三角形求和法则可以推广到求有限个向量$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、…、$\vec{a}_n$的和的一般方法：自任意一点O开始，依次作$\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}_2$，…，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{a}_n$，向量$\overrightarrow{OA_n}=\vec{a}$就是n个向量$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$的和：

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$$

即 $\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$

这种求和的方法叫做多边形法则。

由于互反向量的引入，我们可以规定两向量的差。

定义2 向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的反向量$-\vec{b}$的和$\vec{a}+(-\vec{b})$称为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的差，记作$\vec{a}-\vec{b}$，即$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$。**由向量$\vec{a}$与$\vec{b}$求它们的差的运算叫做向量的减法。**

根据向量减法定义和向量加法的三角形法则，对于向量$\overrightarrow{AB}$和空间任一点O，总有$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+(-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$。

由此，我们可以得到求两向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的差的作图方法：以空间任意一点O为起点，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，那么向量$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$（如图1—4）。

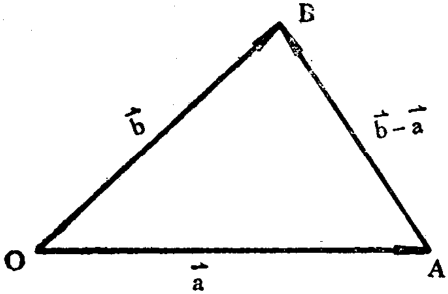


图1—4

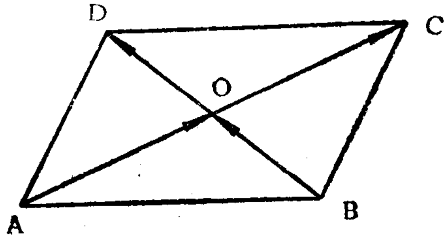


图1—5

例1　证明对角线互相平分的四边形是平行四边形。

证 如图1—5

$\because \overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$

而 $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

因此，四边形ABCD为平行四边形。

例2 已知在平行六面体$ABCD——A_1B_1C_1D_1$中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，试用$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$表示对角线向量$\overrightarrow{AC_1}$、$\overrightarrow{A_1C}$。

解 如图1—6。

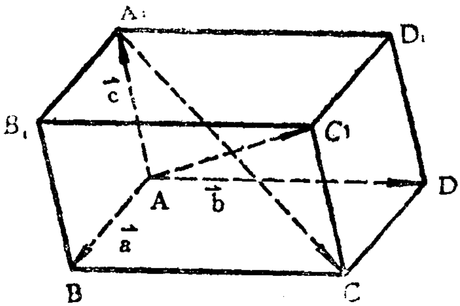


图1—6

（1）$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$

$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

（2）$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$=-\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$