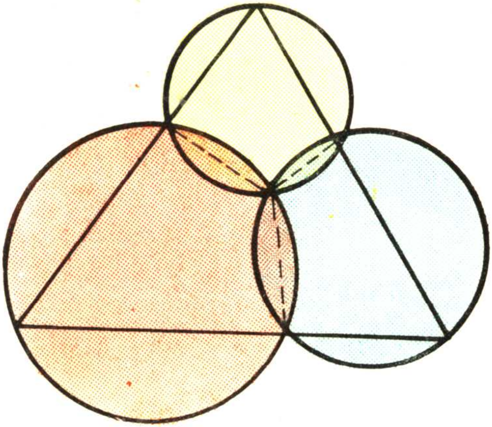
北京教育学院西城分院

傅佑珊　编著



怎样学好平面几何

中国农业机械出版社

怎样学好平面几何

北京教育学院西城分院　傅佑珊　编著

中国农业机械出版社

怎样学好平面几何，从本质上讲，是怎样提高平面几何解题能力的问题。为此，本书明确的提出了：解题前，要侧重于探求解题思路和方法，这是提高平面几何解题能力的关键；解题后，不能只把它当作终点，而要把它当作新的起点：继续寻求命题的纵向发展和横向加深，这是提高平面几何解题能力的重要途径。为了达到这个目的，本书撰写了八部分内容，第一部分是运用基本图形法去探求解题思路和方法；第二到第七部分是寻求命题的纵向发展和横向加深的具体方法；而第八部分则是前面七部分的综合运用。通过本书的学习，就能达到举一反三、事半功倍的效果。为了帮助读者检查学习效果，本书最后还编写了一组综合练习题及其答案。

本书是中学生、自学青年的良师益友，对教师的教学也有参考价值。

怎样学好平面几何

北京教育学院西城分院　傅佑珊　编著

*

责任编辑：张淑琴　版式设计：罗文莉

封面设计：郭景云　责任校对：熊天荣

*

中国农业机械出版社出版（北京阜成門外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业許可証出字第 117 号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店経售

*

开本 $787\times1092^{1}/_{32}$·印张 $7^{3}/_{8}$·字数 162 千字

1989年 7 月北京第一版·1989年 7 月北京第一次印刷

印数　0,001—3,800·定价：3.60 元

*

ISBN 7-80032-065-0/O·1

序　言

学习平面几何，一是学习概念和定理；二是学习解题．如果把概念的抽象概括，定理的叙述证明也看成是解题的话，那么几何学习，它的中心内容就是解题．著名的美国数学家、数学教育家波利亚说："掌握数学意味着什么？这就是说善于解题"．通过解题，不仅可以深刻理解、牢固掌握基本知识和基本技能；而且，它也是培养能力、发展智力的重要手段．著名的心理学家O·K·吉霍米诺夫曾经具体地阐述过思维与解题的关系，他说："在心理中，思维被看作是解题活动"．这就是说，通过解题活动，可以发展思维能力．当然思维并非总等同于解题过程，但是有理由断言，思维的形成最有效的办法是通过解题来实现的．所以，怎样学好平面几何的问题，实质上是怎样提高平面几何解题能力的问题．

有些学生虽然做了很多平面几何题，但解题能力没有明显提高．题目的形式或内容稍微改变就束手无策了．其原因，除了基础知识掌握得不牢固以外，还有一个重要原因，就是在解题前，不善于探索解题思路和方法；解题后，不善于认真深入研究和总结（以后简称为探索与研究）．具体地说，有些学生解题，只是片面追求数量，但不注意质的飞跃．一个题的解题思路和方法是怎样探索和发现的，这个题又是如何形成、变化和发展的，只知其然，不知其所以然．

为了帮助青年学生学好平面几何，提高平面几何解题能力，本书重点从七方面对几何命题（指成立的命题）进行

探索与研究：

基本图形与解题思路的探索；

图形的连续运动与命题的变化发展；

一题多解与命题的发现；

原命题与逆命题；

条件的变化与命题的深化；

特殊到一般与命题的推广发展；

基本命题及其应用.

当然，对于一个命题的探索与研究不一定是这七方面，在这里，主要是提供一种学习方法. 通过它，以期达到解一题，会一类，收到举一反三、事半功倍的效果；通过它，不仅“学会”了平面几何，而且也达到“会学”平面几何的目的. 这种探索与研究问题的方法，对于其它数学学科的学习也有一定的指导意义.

本书内容结构不落俗套，体系安排别具一格，所举例题源于课本，又高于课本. 因此，它不仅能帮助读者巩固基本知识和基本技能，而且对于活跃思维、开阔视野、培养探索能力和创造精神都有深刻的意义.

本书编写过程，承蒙张世魁、王启燮、孟令尧、张国珩等同志提出宝贵意见和建议，在此表示衷心的感谢.

限于作者水平，书中难免存在缺点和错误，欢迎读者批评指正.

作者

目　录

一、基本图形与解题思路的探索

平面几何是研究平面图形性质的科学．因此，每一个平面几何问题都离不开图形．平时，我们所遇到的平面几何问题，它所对应的图形，除了一些基本图形（一个定义、一个定理，以及应用较为广泛的一些重要几何命题所对应的图形都可视为基本图形）外，一般都是一些复杂的图形．如果我们对这些复杂的图形进行仔细的观察，分析和比较，就会发现：它们都是由一个或几个基本图形复合而成的，而且其中至少有一个是对问题起决定作用的基本图形．

唯物辩证法告诉我们，客观事物发展的规律总是由低级到高级、由简单到复杂，而人们认识客观事物也是遵循这条规律的．当着人们遇到一些复杂问题时，总是将它化归为简单的、基本的去解决．所以，解几何题的过程，实质上是将问题所对应的图形分解为若干个基本图形，然后根据它们的性质，就能较顺利地探索出解题思路和方法．因此，善于将一个复杂的几何图形分解为若干个基本图形；善于根据结论的需要，判别出起主要作用的基本图形，以及主要的性质，往往就成为解决问题的突破口．

具体运用基本图形去探索解题思路和方法时，一般是按照以下两个步骤进行的．

分解图形，据图导性．

所谓“分解图形，据图导性”是指，先将问题所给出的图形分解为若干个基本图形，并且逐个推导出它们的性质，充分挖掘每个基本图形的潜在功能．在此基础上，根据结论

需要，分析出起决定作用的基本图形，以及它的主要性质.

分析结论，据性索图.

所谓“分析结论，据性索图”是指，对结论进行分析，导找出结论所对应的基本图形. 如果这个基本图形不完整时，就要适当添设辅助线，使结论所对应的图形是一个完整的基本图形，然后根据上述推导的性质，综合起来进行逻辑推理证明.

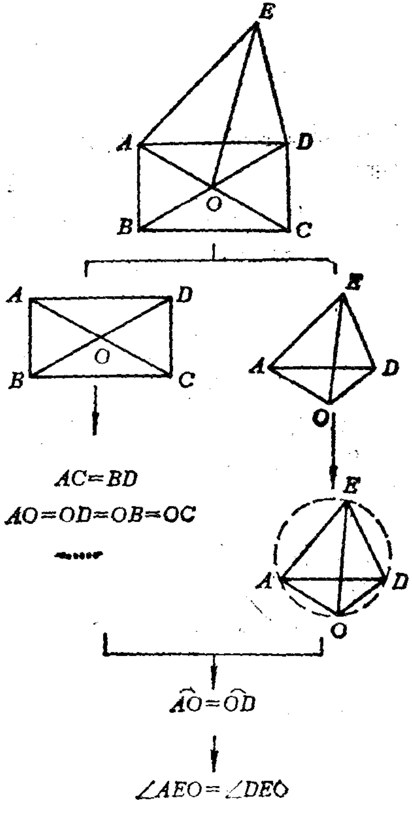


图 1-1

必须指出，这两步没有绝对的界限，也没有先后之分，它们相辅相成. 只是由于问题不同，有时以第一步为主，有时以第二步为主. 一般来说，两步结合使用效果较好.

例 1 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于 O；以 AD 为边向外作 $\triangle AED$，使 $\angle AED$ 与 $\angle AOD$ 互补，求证：OE 平分 $\angle AED$.

探索与研究

条件所给出的图形中，起主要作用的是两个基本图形：

矩形 $ABCD$ 及其对角线；

对角互补的四边形 $AEDO$.

由它们的主要性质可推导出结论成立，如图 1-1.

例 2 如图 1-2. 梯形 $ABCD$，$AD /\!/ BC$. 以 AB、BD 为边作▱$ABDE$，延长 AD 交 EC 于 F，求证：$EF=FC$.

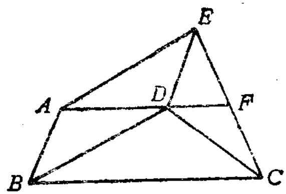


图 1-2

探索与研究

条件所给的图形中，起主要作用的是两个基本图形：

▱$ABDE$；

梯形 $ABCD$.

根据这两个基本图形所能推导出的性质，以及可能添设的辅助线（例如连结 BE），如果把结论中 EF 和 FC 看成是不同的基本图形的元素，那么就可以探索出不同的解题思路和方法.

1. 因为 EF 和 FC 分别是$\triangle EFD$和$\triangle CFD$的边，但从图形观察，它们是不全等的，因此，要想通过证明全等是不可能达到目的. 但如果把 EF 看成是$\triangle AEF$的一边，那么 FC 所在的三角形是不完整的，因此，适当添设辅助线，使 FC 所在的三角形成为完整的基本图

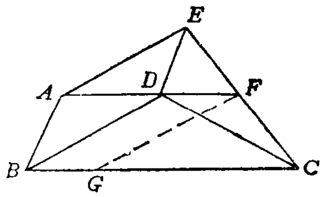


图 1-3

形，并且这个三角形和$\triangle AEF$是全等的．为此（图 1-3），

作 $FG \parallel BD$ 交 BC 于 G，

则 $DBGF$ 为平行四边形，$\therefore$ $FG = DB = AE$.

$\because$ $AF \parallel BC$，$\therefore$ $\angle GCF = \angle DFE$，

$\because$ $GF \parallel DB \parallel AE$，$\therefore$ $\angle GFC = \angle AEF$，

$\therefore$ $\triangle AEF \cong \triangle GFC$，$\therefore$ $EF = FC$.

2．虽然 EF 和 FC 所在的$\triangle EFD$ 和$\triangle FDC$ 不全等，但从顶点 D 到底边所做的高是相等的，因此，只要证明$\triangle EFD$ 和$\triangle DFC$等积就可以了．为此（图 1-4），

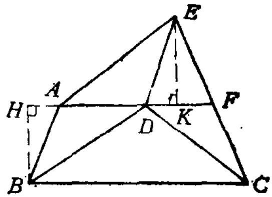


图　1-4

作 $BH \perp DA$ 延长线于 H，作$EK \perp AF$ 于 K，

$\because$ $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADE$ 等积，且 $AD = AD$，

$\therefore$ $BH = EK$.

又 $DF = DF$，

$\therefore$ $\triangle EDF$ 和 $\triangle DFC$ 等积.

又因为从 D 点到 EF 和 CF 的距离相等，

$\therefore$ $EF = FC$.

3．根据第二个基本图形的性质可知$DF \parallel BC$，又 F 可以看成是某一个三角形的一边EC上的一点，于是联想到“平行线等分线段定理”，但已知图形中，这个定理所对应的基

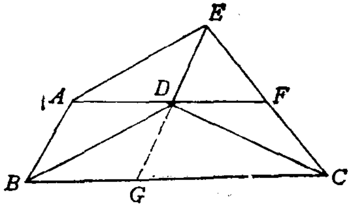


图　1-5

本图形是不完整的（另一边只有其中的一段 ED），为了出现这个定理所对应的基本图形，于是（图 1-5），

延长 ED 交 BC 于 G，

$\therefore\quad DG=AB=DE$，

$\because\quad DF \parallel GC$。$\therefore\quad EF=FC$.

4. 由于 $AF \parallel BC$，F 是 EC 上的一点. 如果把 EC 和 BC 看成是三角形的边，那么尚缺少另一边 EB，于是联结 EB，就可以出现"平行线等分线段"这个定理所对应的基本图形（图 1-6）.

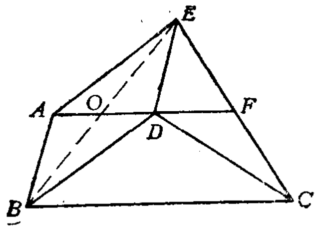


图 1-6

为此，

连结 BE，交 AD 于 O，

则 $EO=OB$.

又 $OF \parallel BC$，

$\therefore\quad EF=FC$.

5. 由于 CE 和 DF 交于 F，为了证明 $EF=CF$，可以设想以 ED 和 CD 为边做出一个平行四边形，使 F 是对角线的交点，为此（图1-7），

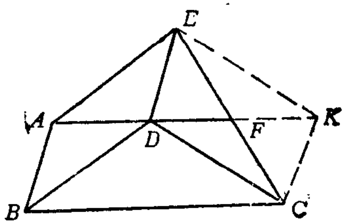


图 1-7

作 $CK \parallel AB$ 交 AF 延长线于 K，连 EK.

则 $ABCK$ 为平行四边形，

又 $ABDE$ 为平行四边形，

$\therefore\quad CK=AB=DE$，$CK \parallel AB \parallel DE$.

∴ $DCKE$ 为平行四边形，

∴ $EF=FC$.

6. 由于 EF 和 FC 在一条直线上，为了证明它们相等，可考虑平移其中一条，将它们置于一个平行四边形的对边. 为此（图1-8），

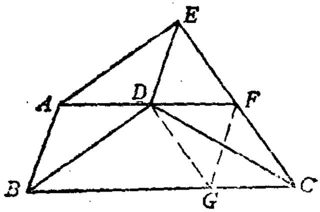


图 1-8

作 $FG /\!/ AB$ 交 BC 于 G，

则 $ABGF$ 为平行四边形，

∴ $GF=AB=ED$，$GF /\!/ AB /\!/ DE$.

连 DG，则 $DGFE$ 为平行四边形.

∴ $DG=EF$. $DG /\!/ EF$.

∴ $DGCF$ 为平行四边形，

∴ $DG=FC$. ∴ $EF=FC$.

7. 为了证明 $EF=FC$，可以考虑将它们置于同一个三角形，然后根据"等腰三角形的判定定理"证明它们相等（图 1-9）. 为此，

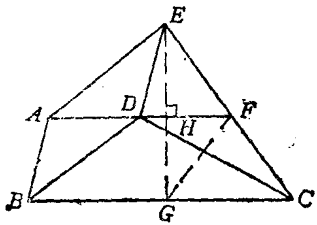


图 1-9

作 $EG\perp BC$ 于 G，交 AF 于 H，连结 FG.

则 $EG\perp AF$ 于 H.

又可证 $EH=HG$.

∴ FH 是 EG 的中垂线，∴ $EF=FG$.

∴ $\angle HEF=\angle HGF$.

又 $\angle FCG=\angle EFH=90^\circ-\angle HEF=90^\circ-\angle HGF$
$=\angle FGC$.

$\therefore$ $FG=FC$, $\therefore$ $EF=FC$.

8. 如果把 EF 和 FC 看成是直线 EC 被平行线所截得到的两条线段，那么为了证明它们相等，尚须添设第三条平行线和另一条直线，使所得到的图形是"平行线等分线段定理"所对应的完整的基本图形，为此（图 1-10），

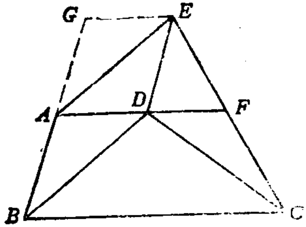


图 1-10

作 $EG\parallel AF$ 交 BA 延长线于 G.

则 $ADEG$ 是平行四边形，

又 $ABDE$ 是平行四边形，

$\therefore$ $AG=DE=AB$.

$\therefore$ $EF=FC$.

例 3 正方形 $ABCD$，E 是 AB 上一点，$BE=\frac{1}{4}AB$，F 是 BC 上中点，求证：$EF\perp FD$.

探索与研究

条件所给出的图形中，起主要作用的是以下三个基本图形：

正方形 $ABCD$（其中 $BE=\frac{1}{4}AB$，$BF=CF$）；

直角三角形 EBF；

直角三角形 DCF.

根据这三个基本图形所能推导出的性质，以及可能添设的辅助线（例如连结 DE，就可以出现两个三角形这个基本图形），如果把结论中 EF 和 FD 看成是不同基本图形的元素，那么就可以探索出不同的解题思路和方法.

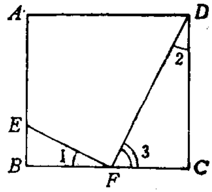


图 1-11

1. 如图 1-11，由于 FE 和 FD 可以看成是从 BC 上一点 F 引出的两条射线，所以 $\angle 1+\angle EFD+\angle 3=180^\circ$. 要证明 $EF\perp FD$，只须证明 $\angle 1+\angle 3=90^\circ$. 于是得到下面证法.

$\because \quad \dfrac{EB}{CF}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{BF}{CD}$，$\angle B=\angle C$.

$\therefore \quad \triangle EBF\backsim\triangle FCD$，$\therefore \quad \angle 1=\angle 2$.

$\because \quad \angle 2+\angle 3=90^\circ$，$\therefore \quad \angle 1+\angle 3=90^\circ$.

$\therefore \quad \angle EFD=90^\circ$， 即 $EF\perp FD$.

2. 如果把 EF 和 FD 看成是 $\triangle EFD$ 的边，就可以考虑根据勾股定理之逆定理证明其结论成立，为此（图 1-12），

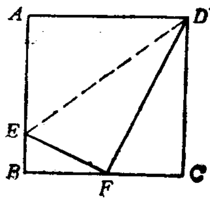


图 1-12

连结 ED. 设 $AB=4a$，则 $AE=3a$，$BE=a$，$BF=FC=2a$.

$$\because \quad ED^2=(3a)^2+(4a)^2=25a^2,$$
$$EF^2=a^2+(2a)^2=5a^2,$$
$$DF^2=(4a)^2+(2a)^2=20a^2.$$

$\therefore \quad ED^2=EF^2+DF^2$.

$\therefore \quad EF\perp DF$.

3. 如果把 EF 和 FD 视为 $\triangle EFD$ 的边，那么也可以考虑根据“三角形一边中点到三个顶点等距，则这个三角形是直角三角形”证明其结论成立. 为此（图 1-13），

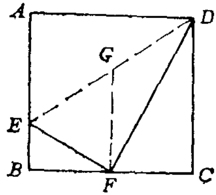


图 1-13

连结 ED，取 ED 中点 G，连结 FG.

则 FG 为梯形 $EBCD$ 的中位线.

设 $AB=4a$，

$$\because \quad FG=\frac{1}{2}(BE+CD)=\frac{1}{2}(a+4a)=\frac{5}{2}a,$$

又 $DG=GE=\frac{1}{2}ED=\frac{1}{2}\times 5a=\frac{5}{2}a$，

$\therefore \quad DG=GE=FG$，

$\therefore \quad EF\perp FD$.

4. 如果把 EF 和 FD 视为 $\triangle EFD$ 的边，那么只要证明 $\angle 1+\angle 2=90^\circ$，为此（图 1-14），

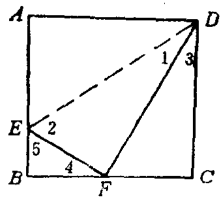


图 1-14

连结 ED. 在第一种证法中已知 $\angle 3=\angle 4$.

$\because \quad EB\parallel CD$,

$$\therefore \quad \angle 1+\angle 2=180^\circ-(\angle 3+\angle 5)=180^\circ-(\angle 4+\angle 5)$$

$$=180^\circ-90^\circ$$
$$=90^\circ$$

$\therefore\quad \angle EFD=90^\circ$，$EF\perp FD$.

例4 $\triangle ACB$，$\angle C=90^\circ$．$CD\perp AB$ 于 D，AE 平分 $\angle A$ 交 BC 于 E，交 CD 于 F．求证：$\dfrac{CE}{EB}=\dfrac{DF}{FC}$.

探索与研究

可以从三方面探索解题的思路和方法.

1．条件所给出的图形中，除了若干个三角形外，起主要作用的是以下三个基本图形：

直角三角形 ACB 及其斜边上的高 CD；

直角三角形 ACB 及其 $\angle A$ 的平分线 AE；

直角三角形 ADC 及其 $\angle A$ 的平分线 AF.

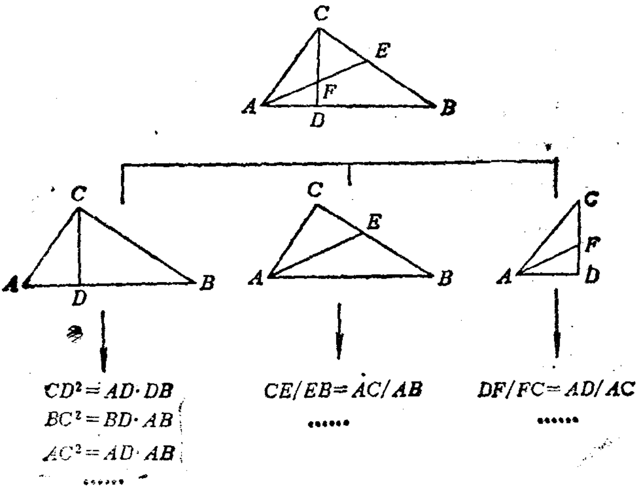


图 1-15

由它们的主要性质，可推导出结论成立，如图 1-15.

2. 从条件考虑，由于角平分线的性质，除了上述比例性质外，还有“角平分线上一点到角两边等距”这一条性质. 为了利用这个性质，可作$EG \perp AB$于G，作$FH \perp AC$于C，使这条性质所对应的基本图形成为完整的基本图形(图 1-16)，于是$EC = EG$，$FD = FH$.

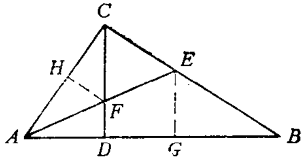


图 1-16

从结论考虑，由于所要证明的四条线段并不是原图形中的两个三角形的边，于是设想将它们转化为两个三角形的边，然后证明它们相似. 从上述分析，这是可以做得到的.

因为$EG = EC$，$FH = FD$，于是所要证明的问题转化为证明$\dfrac{EG}{EB} = \dfrac{FH}{FC}$成立. 而$EG$、$EB$和$FH$、$FC$分别是$Rt\triangle EGB$和$Rt\triangle FHC$的边，且它们相似，于是问题得证.

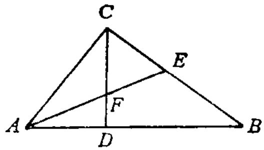


图 1-17

3. 由于所要证明的比例式，不能直接应用有关线段成比例定理，于是考虑寻找第三比. 即证$\dfrac{BE}{EC} = k_1$，$\dfrac{CF}{FD} = k_2$，且$k_1 = k_2$，则$\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{CF}{FD}$成立.

欲证$\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{CF}{FD}$，只须$\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{EC}{FD}$. 但是$BE$和$CF$分