

数控加工基础

苑淑英 孙 斌 编

北京航空航天大学制造工程系

一九九二年九月

目 录

第一部分 曲线曲面机助编程

第一章 机助编程概述

第二章 三次样条在数控编程中的应用

- § 1 样条函数的概念 (4)
- § 2 以二阶导数为系数的三次样条函数 (5)
- § 3 端点条件的确定 (8)
- § 4 三次样条的解题过程 (11)
- § 5 用直线逼近三次样条 (13)
- § 6 三次样条在使用中的几个问题 (17)

第三章 圆弧样条

- § 1 圆弧样条曲线 (24)
- § 2 双圆弧样条曲线 (34)

第四章 参数样条曲线

- § 1 空间样条的普通方程 (42)
- § 2 一阶导矢为系数的三次参数样条 (43)
- § 3 二阶导矢为系数的三次参数样条 (47)
- § 4 空间二次参数样条 (49)
- § 5 样条函数的最佳性质 (51)

第五章 孔斯(Coons)曲面法

- § 1 孔斯曲面的数学描述 (54)
- § 2 孔斯曲面角点信息的求法 (61)
- § 3 孔斯曲面边界偏导数的连续问题 (67)
- § 4 孔斯曲面的等距面方程 (69)
- § 5 孔斯曲面的解题过程及程序 (70)
- § 6 二阶导矢为角点信息的参数曲面 (76)
- § 7 双二次曲面法(角点法) (80)

第六章 贝齐尔曲线曲面与B样条

- § 1 贝齐尔曲线的数学方程 (83)
- § 2 贝齐尔—伯恩斯坦曲线的 r 阶导数 (86)
- § 3 伯恩斯坦多项式 (87)
- § 4 贝齐尔曲线在计算机辅助制造中的应用 (91)

§ 5	贝齐尔曲面.....	(94)
§ 6	B 样条曲线.....	(97)
§ 7	B 样条曲面	(105)

第二部分 数控加工程编

第七章 数控加工程编概述

第八章 NC3APS 数控编程语言

§ 1	语句格式	(111)
§ 2	两坐标部分语句说明	(111)

第九章 前置处理程序

§ 1	几何赋值语句的处理过程	(132)
§ 2	算术赋值语句	(140)
§ 3	运动语句的处理	(141)

第十章 后置处理程序设计

§ 1	概 述	(145)
§ 2	后置处理程序设计	(145)
§ 3	后置处理程序设计举例	(152)
§ 4	后置处理程序的其它功能	(167)
§ 5	前接 APT 的后置处理程序	(169)
§ 6	输出能进行刀具偏置的后置处理程序设计	(174)

第一章 机助编程概述

以前我们学过了数控编程课,编制数控程序一般可分三个阶段,用框图(见图 1-1)表示如下:

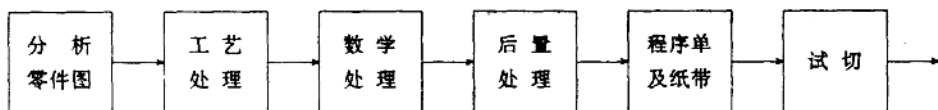


图 1-1

工艺处理阶段是在零件图分析的基础上,确定被加工零件表面的加工方式和路线,及其他工艺参数。

数学处理阶段的目的是为了将被加工零件的轮廓(包括尺寸、精度、光洁度)经过数学的运算处理,以适合数控机床的插补功能。

后置处理阶段是将工艺处理有关参数和数学处理所得到的数据,编写成适合数控机床指令格式的程序单和纸带。

这三个阶段根据零件轮廓复杂程度的不同,编程工作的方式和内容而有差异。尤其是零件轮廓复杂的和简单的相比,数学处理内容的多少和难易程度差别是很大的。

例如图 1-2 所示为一平面零件,零件轮廓是由直线和圆弧组成的。对于这种简单的零件,常常用手工编程就可以了。有时也用小型台式计算机作一些计算。有些零件轮廓并不复杂,但重复性的编程工作量很大,例如图 1-3 所示的零件,以及有些零件轮廓比较复杂,编程时计算插值点的工作量很大,这时用数控语言编程就更为合适。用数控语言编制程序时,必须依赖通用计算机,并且要配有数控语言编译系统的软件。用数控语言编制程序书写源程序比较简便、

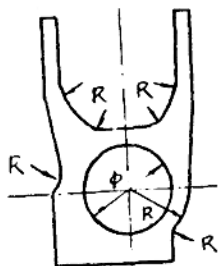


图 1-2

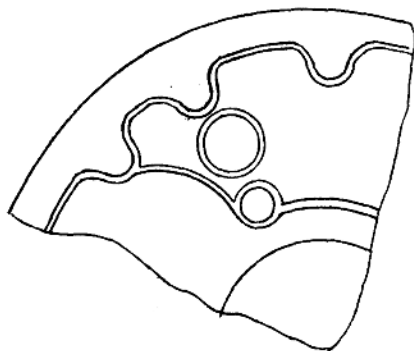


图 1-3

直观、易于掌握。如配有后置处理程序,还可直接输出所要的纸带。因此,这是实现数控程序编制自动化的很好方法,所以人们又常称这种方法叫自动编程。数控语言在国内外种类是很多

的,例如 SKC-1,SKC-2,ZCX-1,APT,EXAPT,APT-RCV 等。

有些三坐标或更多坐标的复杂零件(如图 1-4 所示),在有些情况下,尚没有具备完全满足零件加工要求的数控语言,这时如用人工进行数学处理,用手编程序几乎是不可能的。必须应用通用计算机辅助进行数学处理及后置处理来编制数控程序。一般都是用计算机高级语言(FORTRAN 语言等)或汇编语言来编制通用计算机的处理程序。这种针对具体零件要求用计算机辅助进行的数控编程工作,常称为机助编程(Computer Aided Program)。

机助编程不像用数控语言编程那样方便,直观和自动化程度高。但对复杂的立体型面零件的程序编制还是很适用的。如图 1-5 所示,图中表示了零件复杂程度与机助编程的工作量关系。

叶型坐标数据

	I - I			V - V	
y	x_1	x_2		x	y_1	y_2
0	43.71	46.83		32	-2.35	-11.40
3	45.10	48.23		35	-1.26	-10.49
6	46.52	49.65		38	-0.10	-9.55
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮

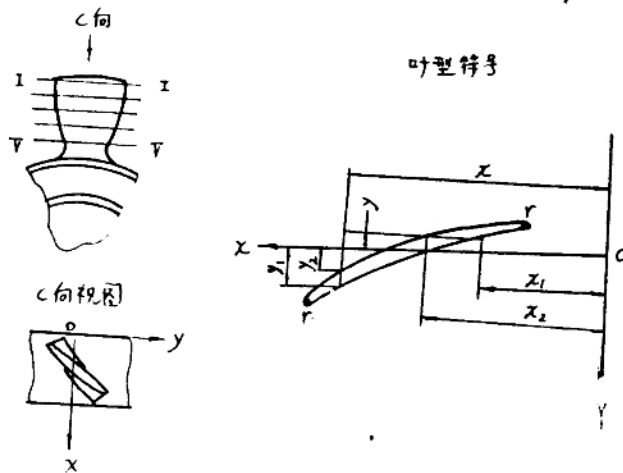


图 1-4

机助编程时,由于在书写源程序之前,不但应对工艺要求比较清楚,而且应对整个数学处理过程也很清楚。同时还应了解所用数控机床的指令格式及代码,以便进行后置处理。这对编程人员提出了更多的要求。为了简化编程工作,北京航空航天大学七〇五教研室在积累了机助编程经验的基础上,研制了 NC3APS 三坐标数控自动编程系统(其中包括二坐标数控编程),通过在生产中使用,效果较好。这样大大简化了复杂曲面的数控编程工作和缩短编程周期,又易于使一般编程人员掌握复杂的编程技术。

随着计算机辅助设计(Computer Aided Design)技术的应用,设计结果所得数据的存储、管理、传递可借用计算机的存储装置(如磁带,磁盘等)实现。而数控加工这些零件时,索取这些数据可以直接向计算机调用。这时直接将设计输出的数据取出,进行计算机辅助编制数控程序,将数据按数控加工的要求进行处理,最后输出数控加工所要的纸带,这就使计算机辅助设计(CAD)与计算机辅助制造(CAM)相结合,走向“设计—制造一体化”。

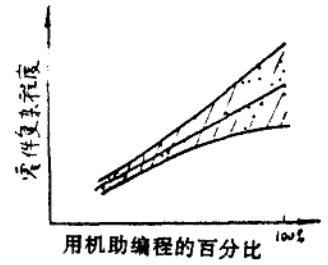


图 1-5

本课程是针对工业中一些比较复杂的轮廓零件,如列表曲线轮廓的平面零件及自由型面零件,应用计算机辅助进行数学处理和后置处理,编制数控程序。整个过程就是应用计算机辅助编制数控程序的过程,如图 1-6 所示。

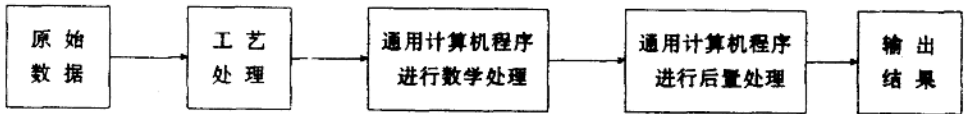


图 1-6

本篇重点介绍样条曲线,Coons 曲面,Bézier 曲线和曲面在数控编程中的应用。将在下篇中介绍前置和后置处理的有关内容。

第二章 三次样条在数控程编中的应用

在数控加工中,有些零件表面在图纸上给出的是一组型值点,而零件要求通过这些型值点作一条光滑的曲线(或曲面),再根据所作的曲线求插补点,以便在数控机床上加工。

通过型值点作一条光滑的曲线,可以采用牛顿(Newton)插值多项式或拉格朗日(Lagrange)插值多项式来构造曲线。而目前常采用样条函数(Spline Function)曲线,为此,本章着重介绍三次样条在插值函数中的应用。

§1 样条函数的概念

什么是样条函数呢?我们还要从牛顿插值多项式和拉格朗日插值多项式的使用谈起。通过比较它们与样条函数之间差异,以了解样条函数的特点。

牛顿插值多项式的数学方程是:

$$p_{n-1}(x) = f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + f(x_1, x_2, x_3)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + f(x_1, x_2, \dots, x_n)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})$$

拉格朗日插值多项式的数学方程是:

$$l_{n-1}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n)} y_j$$

上两式中 n 为型值点数, (x_j, y_j) 为型值点, $j=1, 2, \dots, n$, $p_{n-1}(x)$, $l_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次插值多项式, $j=1, 2, \dots, n$ 。

例如给定了三个型值点(即 $n=3$),过型值点可作牛顿二次插值多项式为:

$$p_2(x) = f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + f(x_1, x_2, x_3)(x - x_1)(x - x_2)$$

过三个型值点同样也可作拉格朗日二次插值多项式为:

$$l_2(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3$$

根据上两个二次插值多式。可求出插补点,计算比较简便。

当给定的型值点较多时,例如 $n=10$,通过 10 个型值点要构成一个 9 次(即高次)的插值多项式,由构成的高次插值曲线求插补点效果很差。图 2-1 所示,实线表示一条通过 10 个点的 9 次插值曲线,在区间两端出现大幅度的波动,显然,这是不合理的。出现这种情况的原因是由于截断误差和舍入误差造成的。此外使用高次插值曲线不仅计算复杂,而且在上计算机计算时,还易出现上溢和下溢问题,数值又不稳定(不收敛),所以使用时一般不高于 5 次。

一般零件图上给出的型值点又大大地超过 7、8 点,采用一个高次插值多项式是不利的。这时我们采用低次插值多项式分段描述曲线,例如仍用牛顿插值多项式,由三个型值点构成分段的二次方程为:

$$p_2(x) = f(x_{j-1}) + f(x_{j-1}, x_j)(x - x_{j-1}) + f(x_{j-1}, x_j, x_{j+1})(x - x_{j-1})(x - x_j)$$

式中 $j=2,3,\dots,n-1$

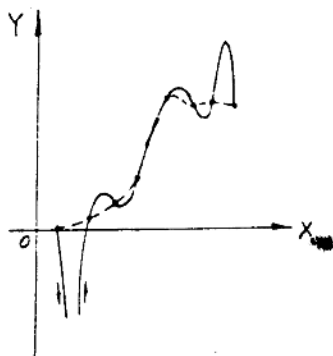


图 2-1

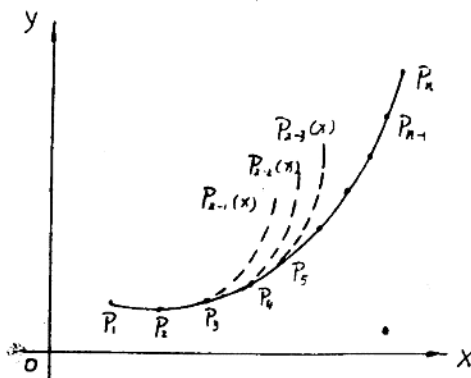


图 2-2

如图 2-2 可视为一族具有垂直轴的二次曲线(抛物线),即每个区 $[x_{j-1}, x_j]$ 均用一条二次曲线来描述。采用了分段(低次)分段多项式,逼近效果好,计算也简便,描述的曲线是连续的,但型值点处的一阶导数不连续,即曲线光滑性不好。

为了得到一条光滑的曲线,我们采用分段多项式,而导数是连续的曲线,称这样的曲线为样条曲线(样条函数)。把分段二次多项式,而一阶导数连续的曲线称之为二次样条函数;把

分段三次多项式,而一、二阶导数连续的曲线称之为三次样条函数。图 2-1 中的虚线是采用分段三次插值多项式(即三次插值样条函数)描述,比单纯的九次插值有显著改进。

由于样条函数具有很好的逼近性质及其他好的特性,所以随着计算机技术的发展,样条函数广泛地得到应用。特别是三次样条函数的理论和应用比较成熟,已成为当前数值逼近的良好方法。

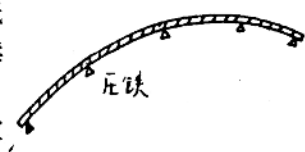


图 2-3

§2 以二阶导数为系数的三次样条函数

一、力学模型

三次样条函数并不是凭空想像出来的,它是随着在生产中的使用而发展的。最初来源于绘图员在绘制模线时,使用“样条”(即富有弹性的木条或有机玻璃条)来描述曲线。让“样条”通过给定点,然后用重物或压铁压住,使“样条”产生弹性弯曲,形成一条所需要的曲线(图 2-3)。这条曲线不仅通过给定点,而且在给定点处以及整个曲线上都是光滑的,并具有连续的曲率,称这条曲线为样条曲线。样条即由此而得名,而且称这条曲线为三次样条曲线,为什么呢?

如果把样条看成弹性梁,压铁看作是作用在梁上的集中载荷。由材料力学可知,梁受集中载荷后就要发生弯曲变形,弯曲变形的曲线(又称梁位移曲线) $S(x)$ 就是一个分段的三次多项式。所以三次样条函数是对绘图员借助于“样条”用手工绘制模线的数学模拟。

二、数学方程

三次样条函数可从梁受集中载荷后,位移曲线 $S(x)$ 的曲率半径 $R(x)$ 与弯矩 $M(x)$ 的关系式推导出来,其关系式:

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{M(x)}{EJ}$$

式中 E, J 分别为弹性系数和惯性矩。

又由曲率半径 $R(x)$ 与位移曲线的关系式:

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{S''(x)}{[1 + S'(x)^2]^{3/2}}$$

故得位移曲线的微分方程:

$$\frac{S''(x)}{[1 + S'(x)^2]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ}$$

上式是二阶非线性微分方程,求解相当困难,考虑下列情况简化为:

1. 当 $S'(x) \ll 1$, 即在小挠度时

$$S''(x) = \frac{M(x)}{EJ}$$

2. 当 $EJ=1$ 时, 则 $S''(x)=M(x)$ 。

由前可知,弯矩 $M(x)$ 是线性变化,则 $S''(x)$ 是线性函数。由于 $S''(x)=M(x)$, 在区间 $[x_{j-1}, x_j]$ (图 2-4) 可用两点式建立线性方程为:

$$\frac{S''(x) - M_{j-1}}{x - x_{j-1}} = \frac{M_j - M_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$$

令 $h_j = x_j - x_{j-1}, j=2, 3, \dots, n$ 则有

$$S''(x) = M_{j-1} \frac{(x_j - x)}{h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})}{h_j} \quad (2-1)$$

对(2-1)式利用换元积分二次,用条件 $S(x_{j-1})=y_{j-1}$ 、

$S(x_j)=y_j$ 可定出积分常数, $S(x)$ 经整理后得:

$$S(x) = M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \quad (2-2)$$

式中 $j=2, 3, \dots, n$ $x_{j-1} \leq x \leq x_j$;

(2-2)式就是分段描述的三次函数,即三次样条函数。也就是说在坐标系 XOY 中,给出 n 个点 $p_j(x_j, y_j) (j=1, 2, \dots, n)$, 满足下述条件的函数 $S(x)$ 称之为三次样条函数:

1. $S(x_j) = y_j, (j=1, 2, \dots, n)$;
2. $S(x)$ 在每个区间 $[x_{j-1}, x_j] (j=2, 3, \dots, n)$ 上是三次多项式;
3. $S(x)$ 具有连续的一阶、二阶导数。

(2-2)式的三次样条函数,也可用三次多项式的一般表达式

$$S(x) = A_j x^3 + B_j x^2 + C_j x + D_j, \quad (j=2, 3, \dots, n)$$

利用上述条件

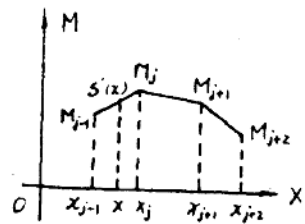


图 2-4

$$\begin{aligned} S(x_{j-1}) &= y_{j-1} & S(x_j) &= y_j \\ S''(x_{j-1}) &= M_{j-1} & S''(x_j) &= M_j \\ x_{j-1} &\leq x \leq x_j \end{aligned}$$

求出 A_j, B_j, C_j, D_j 值, 代入一般表达式整理得(2-2)式, 这里就不再推导了。

(2-2)式就是我们要得到的“以二阶导数为系数的三次样条”数学方程, 只要二阶导数系数 M_{j-1} 和 M_j 确定下来, $S(x)$ 则唯一确定。

三、 M 系数关系式

$$\begin{aligned} S'_j(x_j) &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_j \\ x < x_j}} S'_j(x) \\ S'_{j+1}(x_j) &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_j \\ x > x_j}} S'_{j+1}(x) \end{aligned}$$

在 x_j 处利用一阶导数的连续性有

$$S'_j(x_j) = S'_{j+1}(x_j) \quad (2-3)$$

由(2-3)式来确定 $\{M_j\} (j=1, 2, \dots, n)$ 。

首先对(2-2)式求导

$$\begin{aligned} S'(x) &= -M_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + \\ &\quad \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j - M_{j-1}h_j}{6} \end{aligned} \quad (2-4)$$

根据(2-4)式求出 $S'_j(x_j), S'_{j+1}(x_j)$ 得

$$\begin{aligned} S'_j(x_j) &= \frac{h_j}{6}M_{j-1} + \frac{h_j}{3}M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \\ S'_{j+1}(x_j) &= -\frac{h_{j+1}}{3}M_j - \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} \end{aligned}$$

根据(2-3)式, 上面两式右端应相等得

$$\frac{h_j}{6}M_{j-1} + \frac{h_j}{3}M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} = -\frac{h_{j+1}}{3}M_j - \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}}$$

经整理

$$\frac{h_j}{6}M_{j-1} + \left(\frac{h_j + h_{j+1}}{3}\right)M_j + \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}$$

若令

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} \\ \mu_j &= 1 - \lambda_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} \\ d_j &= \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \right) \\ j &= 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned}$$

则前式可写成

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j \quad (2-5)$$

称(2-5)式为“ M 关系式”,但是“ M 关系式”仅仅给出了 M_1, M_2, \dots, M_n 的 $n-2$ 个方程,还需要附加二个条件才能构成 n 个方程,解出这组变量 $\{M_j\}, j=1, 2, \dots, n$ 。一般按具体要求给出两端点的条件(如两端点的一阶导数或二阶导数等)称之为端点条件。

§ 3 端点条件的确定

一、给出端点一阶导数

首端给出 $S'(x_1) = y'_1$, 对 M 关系式相当于给定方程可由(2-4)得

$$2M_1 + M_2 = d_1 \quad (2-6)$$

式中
$$d_1 = \frac{6}{h_2} \left(\frac{y_2 - y_1}{h_2} - y'_1 \right)$$

对于末端给出 $S'(x_n) = y'_n$, 同理可得

$$M_{n-1} - M_n = d_n \quad (2-7)$$

式中
$$d_n = \frac{6}{h_n} \left(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right)$$

如果零件外形曲线已明确给出端点条件,如与已知直线相切于端点,则给出了一阶导数值。如与已知圆相切于端点,也可求出一阶导数值。有时零件图中没明确指出端点条件,可采用下面各种方法来决定。

1. 过 P_1, P_2, P_3 及 P_{n-2}, P_{n-1}, P_n 分别作圆方程。用过 P_1, P_n 点的切线斜率作为 y'_1, y'_n 的近似值。圆方程的一般表达式为

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

首端
$$y'_1 = - \frac{2x_1 + D_1}{2y_1 + E_1}$$

末端
$$y'_n = - \frac{2x_n + D_n}{2y_n + E_n}$$

式中 D_1, D_n, E_1, E_n 值可由行列式求出。

2. 过 P_1, P_2, P_3 及 P_{n-2}, P_{n-1}, P_n 分别作抛物线,用过 P_1, P_n 的切线斜率为 y'_1, y'_n 。抛物线方程表达式为:

$$y = A_k x^2 + B_k x + C_k \quad (k = 1, 2)$$

首末端的斜率为:

$$y'_1 = 2A_1 x_1 + B_1 = m_{1,2} + m_{1,3} - m_{2,3}$$

$$y'_n = 2A_2 x_2 + B_2 = m_{n,n-1} + m_{n,n-2} - m_{n-1,n-2}$$

式中
$$m_{i,j} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$$

$$j = 1, 2, 3, \text{或 } n, n-1, n-2 \text{ 但 } i \neq j$$

采用这种确定 y'_1, y'_n 值, 计算方法简单, 大多数情况下效果不错。但有时也有一定问题。即在第一段 $[x_1, x_2]$ 样条上是否产生拐点, 与第二段 $[x_2, x_3]$ 样条是否产生拐点有关。为了保证第一段样条不产生波浪, 有时采用 $M_1 = M_2, M_{n-1} = M_n$ 作端点条件。

3. 如果零件图上给出了列表曲线上 $n-2$ 个点, 又知它在端点与已知直线相切, 而没有给出首末端点值(即切点值)时, 可以采用抛物线法求端点值和斜率。

以首端为例, 设列表曲线与已知直线 $(y = kx + b)$ 相切。利用过 $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 两点作抛物线与已知直线相切, 求出切点值 (x_1, y_1) (见图 2-5)。

用待定系数 λ 列出抛物线方程为

$$y = kx + b + \lambda(x - x_1)^2$$

上述方程即过已知直线上的点 (x, y_1) , 又切于该直线。由于抛物线过 $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 故有

$$y_2 = kx_2 + b + \lambda(x_2 - x_1)^2$$

$$y_3 = kx_3 + b + \lambda(x_3 - x_1)^2$$

消去 λ , 得

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right)^2 = \frac{y_2 - kx_2 - b}{y_3 - kx_3 - b}$$

由于 $x_2 > x_1, x_3 > x_1$ 则上式开方后取正值, 并令 σ 值为

$$\sigma = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \sqrt{\frac{y_2 - kx_2 - b}{y_3 - kx_3 - b}}$$

由此得

$$x_1 = \frac{x_2 - \sigma x_3}{1 - \sigma}$$

$$y_1 = kx_1 + b$$

同理也可求得末端点值 (x_n, y_n) 。

4. 类似于上述情况, 但端点是切于已知圆, 求端点值及斜率。

设过 $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 两点作抛物线切于已知上半圆(半径 r , 圆心 $(a, 0)$) (图 2-6)。现求端点值 (x_1, y_1) 及斜率。

上半圆方程为

$$y = \sqrt{r^2 - (x - a)^2} \quad (2-8)$$

对上式求导

$$y' = \frac{a - x}{\sqrt{r^2 - (x - a)^2}} \quad (2-9)$$

过 $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 用待定系数 λ 列出的抛物线方程为

$$y = y_2 + m_{2,3} * (x - x_2) + \lambda(x - x_2)(x - x_3) \quad (2-10)$$

对上式求导

$$y' = m_{2,3} + \lambda(2x - x_2 - x_3) \quad (2-11)$$

将(2-11)式和(2-10)式消去 λ 后, (2-10)式得

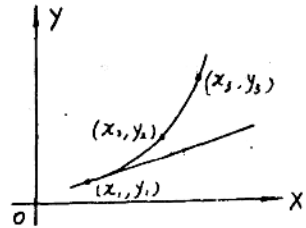


图 2-5

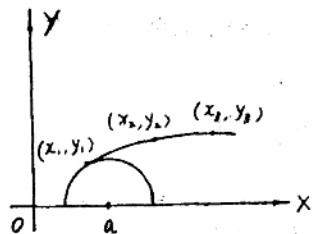


图 2-6

$$y = y_2 + m_{2,3}(x - x_2) + \frac{y' + m_{2,3}}{2x - x_2 - x_3}(x - x_2)(x - x_3)$$

即
$$y_2 - y + \frac{x - x_2}{2x - x_2 - x_3} [m_{2,3}(x - x_2) + y'(x - x_3)] = 0$$

将(2-8)、(2-9)式代入上式,并把右端记为 $f(x)$,则有

$$f(x) = y_2 - \sqrt{r^2 - (x - a)^2} + \frac{x - x_2}{2x - x_2 - x_3} \left[m_{2,3}(x - x_3) + \frac{(a - x)(x - x_3)}{\sqrt{r^2 - (x - a)^2}} \right] = 0 \quad (2-12)$$

现求(2-12)式的根,首先判断根是否存在及根所在范围,分两种情况:

当 $x_2 > a + r$ 时, $x \leq a + r$:

由于 $x - x_2 < 0, x - x_3 < 0$, 则 $2x - x_2 - x_3 < 0$, 故

$$f(a - r) = -\infty$$

$$f(a + r) = +\infty$$

它说明在 $a - r < x < a + r$ 中(2-12)式至少存在一根。

当 $a - r < x_2 < a + r$ 时

$$f(a - r) = -\infty$$

$$f(x_2) = y_2 - \sqrt{r^2 - (x_2 - a)^2} > 0$$

故在 $(a - r, x_2)$ 内至少有一根。

确定了根的范围之后,就可以应用解方程的数值解法求出端切点 (x_1, y_1) , 其斜率可用(2-9)式求出。

同理可求末端点。

二、给出端点二阶导数

从几何上讲给出端点的曲率 $S''(x_1) = y''_1, S''(x_n) = y''_n$, 从 M 关系式来说,即相当于给出了如下方程

$$M_1 = y''_1 \quad M_n = y''_n$$

当 $S''(x_1) = 0, S''(x_n) = 0$ 时,称为自由端点条件,其几何意义是在 x_1 的左边及在 x_n 的右边,样条曲线各与一直线相切。

当零件本身两 endpoint 没有明确给出二阶导数时,可以对样条曲线按曲线趋势作一自然延伸,在延伸处取 2~3 个点作为型值点,然后取 $S''(x_{-3}) = 0$ 。

三、给出抛物线条件

当给出 $M_1 = M_2, M_{n-1} = M_n$ 时,对 M 关系式相当于给出

$$M_1 - M_2 = 0 \quad M_{n-1} - M_n = 0$$

此时称为抛物线条件,相当于端点 $S''(x) = 0$,从几何意义上讲,它表明在 $[x_1, x_2]$ 及 $[x_{n-1}, x_n]$ 各为一条二次多项式,即变成抛物线。

根据上述的端点条件,可写成给出端点的一般 M 关系式为

$$p_{n-1} = b_{n-1} + a_{n-1}q_{n-2}, \quad q_{n-1} = -\frac{c_{n-1}}{p_{n-1}}$$

$$u_{n-1} = \frac{d_{n-1} - a_{n-1}u_{n-2}}{p_{n-1}}$$

则

$$x_{n-1} = q_{n-1}x_n + u_{n-1}$$

由方程组第 n 个方程

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n$$

与前一个方程联立解出

$$x_n = \frac{d_n - a_n u_{n-1}}{b_n + a_n q_{n-1}}$$

若令

$$p_n = b_n + a_n q_{n-1}, \quad u_n = \frac{d_n - a_n u_{n-1}}{p_n}$$

则

$$x_n = u_n$$

这推导的过程,就是“追赶法”中“追”的过程,也就是用后一个变量 x_{j+1} 来表示前一个变量 x_j ,追到最后首先解出的是 x_n 。在解出 x_n 之后,再依次递推回去,解出 $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$ 。这就是“赶”的过程。但在解题时,首先求 q_1, u_1 ,再由 q_1, u_1 求出 q_2, u_2, p_2 ,依次求得 $q_{n-1}, u_{n-1}, p_{n-1}$,最后得 u_n 即得 x_n 。

对于方程组(2-14),显然是方程组(2-15)的特殊情况,即 $b_j = 2 (j=1, 2, \dots, n)$,根据(2-14)其解题的程序框图如图 2-7 所示。用 FORTRAN 语言写的追赶法求解(2-14)的子程序见附表 1。

求插补点时,要求 x 所对应的值 $S(x)$,那么,首先判断 x 在样条函数的哪一区间内,当 x 满足 $x_{j-1} \leq x \leq x_j$ 时,把 x 值代入样条的分段表达式(2-2)中,所得到的 $S(x)$ 之值即为所求。

如果 x 是在 $[x_1, x_2]$ 的左端,则取 $j=2$,即对第一段样条函数 $S(x)$ 向左延伸。同样,当 x 在 $[x_{n-1}, x_n]$ 的右端时,就取 $j=n$,即对第 $n-1$ 段样条函数向右延伸。

如果需要求样条函数某一插补点的一阶、二阶导数,可按(2-4)与(2-1)式求之。

§ 5 用直线逼近三次样条

用三次样条函数描述的零件轮廓,还不能在机床上直接运用。由于机床设备控制系统的插补功能一般只能走直线(或圆弧),所以要用直线(或圆弧)来逼近三次样条。这里介绍用直线逼近三次样条,一般采用的方法是根据允许的插补误差有对称加密法,逐段比较法等。

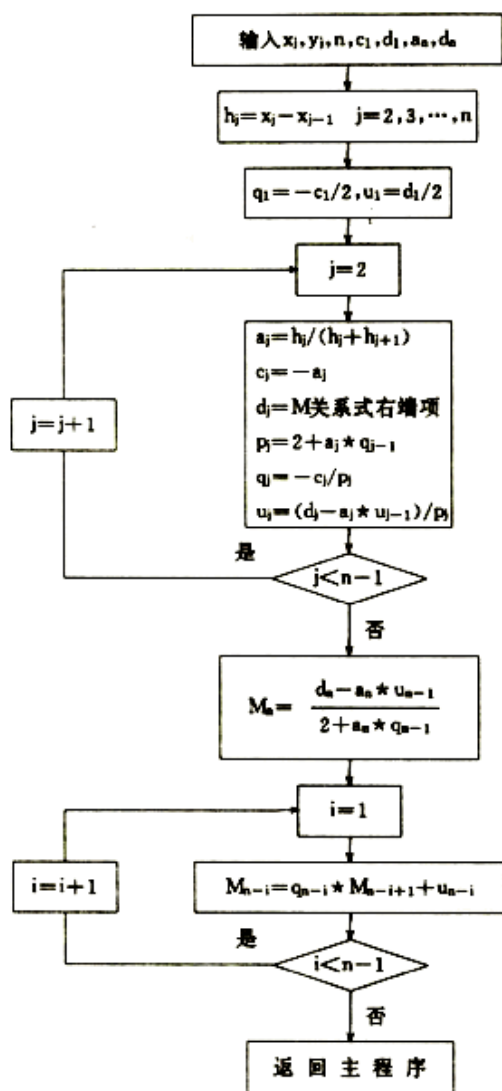


图 2-7

一、对称加密法

这种方法是在型值点 $p_j(x_j, y_j)$ 、 $p_{j+1}(x_{j+1}, y_{j+1})$ 的区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 取中点 M (见图 2-8), 计算出 HG 值

$$HG = HN \cdot \cos \alpha = \frac{HN}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{S(x) - p(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

式中 $S(x)$ 为二次样条函数。

$$p(x) = y_j + \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} (x - x_j)$$