郭大钧 孙经先著

抽象空间常微分方程

BANACH
BANACH
BANACH

山东科学技术出版社

抽象空间常微分方程

郭大钧　孙经先　著

山东科学技术出版社

抽象空间常微分方程

郭大钧　孙经先　著

*

山东科学技术出版社出版

（济南市玉函路）

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂印刷

*

850×1168毫米32开本　9.375印张　201千字

1989年5月第1版　1989年5月第1次印刷

印数：1—1,900

ISBN 7-5331-0491-9/O·31

定价 6.05 元

我们的希望(代序)

进行现代化建设必须依靠科学技术。作为科学技术载体的专著，正肩负着这一伟大的历史使命。科技专著面向社会，广泛传播科学技术知识，培养专业人才，推动科学技术进步，对促进我国现代化建设具有重大意义。它所产生的巨大社会效益和潜在的经济效益是难以估量的。

基于这种使命感，自1988年起，山东科学技术出版社设“泰山科技专著出版基金”，成立科技专著评审委员会，在国内广泛征求科技专著，每年补贴出版一批经评选的科技著作。这一创举已在社会上引起了很大反响。

但是，设基金补助科技专著出版毕竟是一件新生事物，也是出版事业的一项改革。它不仅需要在实践中不断总结经验，逐步予以完善；同时，也更需要社会上有关方面的大力扶植，以及学术界和广大读者的热情支持。

我们希望，通过这一工作，高水平的科技专著能够及早问世，充分显示它们的价值，发挥科学技术作为生产力的作用，不断推动社会主义现代化建设的发展。愿“基金”支持出版的著作如泰山一样，耸立于当代学术之林。

泰山科技专著评审委员会

1989年3月

前　言

Banach 空间中的常微分方程理论是近二三十年发展起来的一个新的数学分支，它把常微分方程理论和泛函分析理论结合起来，利用泛函分析方法研究Banach空间中的常微分方程。它的理论在无穷常微分方程组、临界点理论、偏微分方程、不动点定理等多方面都有广泛的应用。特别是，临界点理论中常用的最速下降流线，即是以Banach 空间常微分方程理论作基础。由于它的重要性，又比较新，故被列为我国自然科学基金重点资助的项目之一。

在我国，研究Banach 空间常微分方程理论的人很少，到目前为止，还没有出版过一本这方面的专著。1985年，在第五届全国非线性泛函分析会议上，我和孙经先副教授合作了《Banach空间中的常微分方程理论》综合报告，引起了许多人的兴趣。1985年至1987年，我赴美国Texas 大学 Arlington 分校与美国这一领域的著名数学家 V·Lakshmikantham 教授合作，做了一些研究工作。孙经先副教授在国内对 Banach 空间常微分方程及其在临界点理论的应用方面做了一些工作。现将国外一些著名数学家在这一领域中所获的结果，加上我们自己做的工作，写成这本书，介绍给国内读者。本书显然可作为综合性大学和高等师范院校有关专业的研究生教材，也可供有关

教师和科技工作者进行科研时参考。

本书在写作过程中，得到了国家自然科学基金和国家教委博士点基金的资助，特致谢意。

限于作者水平，书中不妥、错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

郭大钧

1988年7月28日

于山东大学南院

目 录

第一章 预备知识

本章属于预备知识，介绍后面要用到的若干基本概念和结论，包括非紧性测度、中值定理、半内积等.

1.1 非紧性测度

定义1.1.1 设E是实 Banach 空间，S是E中有界集. 令

$\alpha(S)=\inf\{\delta>0\mid S$可表为有限个集的并：$S=\bigcup\limits_{i=1}^{n}S_i$，使每个$S_i$的直径$d(S_i)$都$\leqslant\delta\}$. 显然，$0\leqslant\alpha(S)<+\infty$. $\alpha(S)$ 叫做S的**非紧性测度**（按Kuratowski意义）.

定理1.1.1 非紧性测度具有下列性质（S，T表E中有界集，a是实数）：

(i) $\alpha(S)=0\Longleftrightarrow S$是相对紧集；

(ii) $S\subset T\Rightarrow\alpha(S)\leqslant\alpha(T)$；

(iii) $\alpha(\overline{S})=\alpha(S)$；

(iv) $\alpha(S\cup T)=\max\{\alpha(S),\alpha(T)\}$；

(v) $\alpha(aS)=|a|\alpha(S)$，其中$aS=\{x=az\mid z\in S\}$；

(vi) $\alpha(S+T)\leqslant\alpha(S)+\alpha(T)$，其中 $S+T=\{x=y+z\mid y\in S，z\in T\}$；

(vii) $\alpha(\overline{co}S)=\alpha(S)$；

(viii) α关于Hausdorff距离

$$d_H(S_1,S_2)=\max\{\sup_{x\in S_1}\rho(x,S_2),\sup_{x\in S_2}\rho(x,S_1)\}$$

（$\rho(x,S_2)$表x到集S_2的距离）是一致连续的，即：对于任给的$\varepsilon>0$，必有$\delta=\delta(\varepsilon)>0$存在，使对于$E$中任二有界集$S_1$，$S_2$，只要$d_H(S_1,S_2)<\delta$，就有

$$|\alpha(S_1)-\alpha(S_2)|<\varepsilon. \tag{1.1.1}$$

证 (i)～(vii)的证明见郭大钧〔1〕．下证（viii）．任给$\varepsilon>0$．取$\delta=\frac{\varepsilon}{3}$．对于$E$中任二满足$d_H(S_1,S_2)<\delta$的有界集$S_1$与$S_2$，设$S_1=\bigcup_{i=1}^{m}T_i$，$d(T_i)<\alpha(S_1)+\frac{\varepsilon}{3}(i=1,2,\cdots,m)$，并令

$$Z_i=\{y\in S_2\mid\exists x\in T_i,\rho(x,y)=\|x-y\|<\delta\}$$
$$(i=1,2,\cdots,m).$$

显然　$d(Z_i)\leqslant 2\delta+d(T_i)<\alpha(S_1)+\varepsilon\quad(i=1,2,\cdots,m)$．

又，由$d_H(S_1,S_2)<\delta$易知$S_2=\bigcup_{i=1}^{m}Z_i$．故得

$$\alpha(S_2)<\alpha(S_1)+\varepsilon. \tag{1.1.2}$$

同理可证

$$\alpha(S_1)<\alpha(S_2)+\varepsilon. \tag{1.1.3}$$

由(1.1.2)和(1.1.3)两式，得

$$|\alpha(S_1)-\alpha(S_2)|<\varepsilon. \tag{1.1.4}$$

一致连续性获证．□

本节以下，$I=[a,b]$恒表实数轴上有限闭区间，$C[I,E]$表从I到E的抽象连续函数空间，其范数为$\|x\|=\max_{t\in I}\|x(t)\|$．对$H\subset C[I,E]$，我们记

$$H(t)=\{x(t)\mid x\in H\}\subset E, \tag{1.1.5}$$

$$H(I)=\{x(t)\mid x\in H,\ t\in I\}=\bigcup_{t\in I}H(t)\subset E. \qquad (1.1.6)$$

定理1.1.2 设$H\subset C[I,E]$是有界的，等度连续的，则(a) $\alpha(H)=\alpha(H(I))$，(b) $\alpha(H(I))=\max\limits_{t\in I}\alpha(H(t))$。

证 先证(a)。我们证明$\alpha(H(I))\leqslant\alpha(H)$，任给$\varepsilon>0$。取$H=\bigcup\limits_{i=1}^{m}H_i$使$d(H_i)<\alpha(H)+\frac{\varepsilon}{2}(i=1,2,\cdots,m)$。由$H$的等度连续性，可将$I$分成有限个小闭区间$I_j(j=1,2,\cdots,n)$使

$$\|x(t)-x(t')\|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall x\in H,t,t'\in I_j,\ j=1,2,\cdots,n. \tag{1.1.7}$$

现令$S_{ij}=\{x(t)\mid x\in H_i,\ t\in I_j\}$（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）。显然$H(I)=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\bigcup\limits_{j=1}^{n}S_{ij}$。又，当$x,y\in H_i$，$t,t'\in I$时，由(1.1.7)式，我们有

$$\begin{aligned}\|x(t)-y(t')\|&\leqslant\|x(t)-y(t)\|+\|y(t)-y(t')\|\\&\leqslant d(H_i)+\frac{\varepsilon}{2}<\alpha(H)+\varepsilon,\end{aligned}$$

故 $\qquad \alpha(H(I))\leqslant\alpha(H)+\varepsilon$。

由$\varepsilon>0$的任意性，即得$\alpha(H(I))\leqslant\alpha(H)$。下证相反的不等式$\alpha(H)\leqslant\alpha(H(I))$。任给$\varepsilon>0$。由$H$的等度连续性知，$I$可被有限个邻域$V(t_i)(i=1,2,\cdots,m)$所覆盖，使得$\|x(t)-x(t_i)\|<\varepsilon$对任何$x\in H,t\in V(t_i)$成立。又，存在分解$H(I)=\bigcup\limits_{j=1}^{m}B_j$使得$d(B_j)<\alpha(H(I))+\varepsilon$，$j=1,2,\cdots,m$。用$P$表从$\{1,2,\cdots,n\}\subset N$到$\{1,2,\cdots,m\}\subset N$的所有映象$i\to\mu(i)$的全体，这里$N$表正整数集。显然，$P$是有限集。令$L_\mu=\{x\in H\mid x(t_i)\in B_{\mu(i)},\ i=1,2,\cdots,n\}$。很明显，$H=\bigcup\limits_{\mu\in P}L_\mu$。对于任何$x$，

$y \in L_\mu$及$t \in I$，t必属于某$V(t_i)$，从而

$$\|x(t)-x(t_i)\|<\varepsilon,\ \|y(t)-y(t_i)\|<\varepsilon,$$
$$\|x(t_i)-y(t_i)\|<\alpha(H(I))+\varepsilon.$$

于是

$$\|x(t)-y(t)\| \leqslant \|x(t)-x(t_i)\|+\|x(t_i)-y(t_i)\| + \|y(t_i)-y(t)\|<\alpha(H(I))+3\varepsilon. \tag{1.1.8}$$

由此可知$d(L_\mu) \leqslant \alpha(H(I))+3\varepsilon$，$\alpha(H) \leqslant \alpha(H(I))+3\varepsilon$。由$\varepsilon>0$的任意性，得$\alpha(H) \leqslant \alpha(H(I))$。结论($a$)获证。下证($b$)。首先注意，由$H$的等度连续性易知，当$t \to t_0(t,\ t_0 \in I)$时，必$d_H(H(t),\ H(t_0)) \to 0$，从而根据定理1.1.1(viii)知$\alpha(H(t)) \to \alpha(H(t_0))$，故$\alpha(H(t))$是$t$的连续函数，因此，$\max\limits_{t \in I}\alpha(H(t))$存在。

由于对任何$t \in I$有，$H(t) \subset H(I)$，$\alpha(H(t)) \leqslant \alpha(H(I))$，从而$\max\limits_{t \in I}\alpha(H(t)) \leqslant \alpha(H(I))$。再证相反的不等式。任给$\varepsilon>0$。由$H$的等度连续性，$I$可被有限个邻域$V(t_i)$（$i=1,2,\cdots,n$）所覆盖，使得$\|x(t)-x(t_i)\|<\varepsilon$对任何$x \in H$，$t \in V(t_i)$成立。又，易知：对任何$i=1,2,\cdots,n$，存在分解$H=\bigcup\limits_{j=1}^{m} H_j^{(i)}$($m$不随$i$而变)，使得$H(t_i)=\bigcup\limits_{j=1}^{m} H_j^{(i)}(t_i)$，并且

$$d(H_j^{(i)}(t_i))<\alpha(H(t_i))+\varepsilon \quad (j=1,2,\cdots,m). \tag{1.1.9}$$

令

$$B_{ij}=H_j^{(i)}(V(t_i)),\ (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m).$$

显然，$H(I)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\bigcup\limits_{j=1}^{m} B_{ij}$。对$x,y \in H_j^{(i)}$，$t$，$t' \in V(t_i)$，我们有

$$\|x(t)-y(t')\| \leqslant \|x(t)-x(t_i)\|+\|x(t_i)-y(t_i)\| + \|y(t_i)-y(t')\|<2\varepsilon+d(H_j^{(i)}(t_i)).$$

于是，注意到(1.1.9)式，知

$$d(B_{ij})<\alpha(H(t_i))+3\varepsilon\leqslant\max_{t\in I}\alpha(H(t))+3\varepsilon.$$

故得

$$\alpha(H(I))<\max_{t\in I}\alpha(H(t))+3\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，即得 $\alpha(H(I))\leqslant\max_{t\in I}\alpha(H(t))$．(b) 获证．□

系1.1.1 设$D\subset E$有界，映象 $f: I\times D\to E$有界且一致连续．则

$$\alpha(f(I\times B))=\max_{t\in I}\alpha(f(t,B)),\ \forall B\subset D.\quad(1.1.10)$$

证 令$\varphi_x(t)=f(t,x)$，$H=\{\varphi_x|x\in B\}$．则$H\subset C[I,E]$．由f的有界性与一致连续性易知，H 是有界的、等度连续的；从而，根据定理1.1.2(b)知，

$$\alpha(H(I))=\max_{t\in I}\alpha(H(t)),$$

此即(1.1.10)式．□

定理1.1.3 (Ascoli-Arzela) 集$H\subset C[I,E]$相对紧的充分必要条件是：H是等度连续的，并且对任何 $t\in I$，集 $H(t)$ 是E中的相对紧集．

证 必要性：设H在 $C[I,E]$ 中相对紧．显然，对任何$t\in I$，$H(t)$是E中相对紧集．下证H的等度连续性．任给$\varepsilon>0$．由Hausdorff定理，存在$\{x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_m\}\subset H$，$\{x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_m\}$成为$H$的$\frac{\varepsilon}{3}$一网．由 $x_i(t)$在I上的一致连续性知，存在$\delta_i>0$，使当$|t-t'|<\delta_i$ $(t,t'\in I)$时恒有$\|x_i(t)-x_i(t')\|<\frac{\varepsilon}{3}$ $(i=1,2,\cdots,m)$．现令$\delta=\min\{\delta_1,\cdots,\delta_m\}$．于是，对任何$x\in H$，存在$x_i$使$\|x-x_i\|=\max_{t\in I}\|x(t)-x_i(t)\|<\frac{\varepsilon}{3}$．

当$|t-t'|<\delta$ $(t,t'\in I)$时，我们有

$$\|x(t)-x(t')\|\leqslant\|x(t)-x_i(t)\|+\|x_i(t)-x_i(t')\|$$
$$+\|x_i(t')-x(t')\|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

故H的等度连续性获证。

充分性：设H是等度连续的，并且对任何$t\in I$，$H(t)$是E中相对紧集。由此易知，H是有界的，并根据定理1.1.1（i）知

$$\alpha(H(t))=0,\ \forall\, t\in I. \tag{1.1.11}$$

现根据定理1.1.2，我们有

$$\alpha(H)=\max_{t\in I}\alpha(I(t)). \tag{1.1.12}$$

于是，由(1.1.11)式和(1.1.12)式得$\alpha(H)=0$，由此，再根据定理1.1.1(i)即知H是$C[I,E]$中的相对紧集。□

1.2 中值定理与比较定理

本节中，$I=[a,b]$，E表实Banach空间。

定理1.2.1 （中值定理）设$x\in C[I,E]$，且除去至多可数集$\Gamma\subset[a,b]$外，当$t\in[a,b]\backslash\Gamma$时，$x(t)$右可微（即右导数$x'_+(t)$存在）.则

$$x(b)-x(a)\in(b-a)\overline{co}(\{x'_+(t)\,|\,t\in[a,b]\backslash\Gamma\}). \tag{1.2.1}$$

证 记$\Gamma=\{p_k;\ k=1,2,3,\cdots\}$，$D=\{x'_+(t)\,|\,t\in[a,b]\backslash\Gamma\}$. 任给$\varepsilon>0$. 令

$$T=\{t\in[a,b]\,|\,d(x(t)-x(a),(t-a)coD)$$
$$\leqslant(t-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<t}2^{-k}\},$$

其中$d(\cdot,\cdot)$表点到集的距离．显然$a\in T$，故$T\neq\phi$．令$\lambda=\sup T$．下证$\lambda\in T$．事实上，设$t_n\in I$，$t_n\to\lambda$（$t_n\leqslant\lambda$）．于是，存在$\xi_n\in coD$使

$$\|x(t_n)-x(a)-(t_n-a)\xi_n\|<(t_n-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<t_n}2^{-k}+\frac{1}{n}$$

$$\leqslant(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\frac{1}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots).\tag{1.2.2}$$

由此，注意到$\{\|x(t_n)\|\}$的有界性，即知存在$M>0$使

$$\|\xi_n\|\leqslant M\quad(n=1,2,3,\cdots).\tag{1.2.3}$$

由(1.2.2)式和(1.2.3)式，知

$$d(x(\lambda)-x(a),(\lambda-a)coD)\leqslant\|x(\lambda)-x(a)-(\lambda-a)\xi_n\|$$

$$\leqslant\|x(t_n)-x(a)-(t_n-a)\xi_n\|+\|x(\lambda)-x(t_n)\|+(\lambda-t_n)\|\xi_n\|$$

$$<(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\frac{1}{n}+\|x(\lambda)-x(t_n)\|+M(\lambda-t_n),$$

$$(n=1,2,3,\cdots).$$

令$n\to\infty$取极限，得

$$d(x(\lambda)-x(a),(\lambda-a)coD)\leqslant(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k},\tag{1.2.4}$$

故$\lambda\in T$．再证$\lambda=b$．如不然，$\lambda<b$．若$\lambda\in\Gamma$，则$\lambda=p_m$．由(1.2.4)式，可取$\xi\in coD$使

$$\|x(\lambda)-x(a)-(\lambda-a)\xi\|<(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\frac{\varepsilon2^{-m}}{3}.$$

再取$\delta>0$，使$\lambda+\delta<b$且

$$\|x(\lambda+\delta)-x(\lambda)\|<\frac{\varepsilon2^{-m}}{3},\ \delta\|\xi\|<\frac{\varepsilon2^{-m}}{3}.$$

于是