华章数学译丛

18

Introduction to Graph Theory

(Second Edition)

图论导引（原书第2版）

（美）Douglas B. West 著

李建中 骆吉洲 译

机械工业出版社
China Machine Press

华　章　数　学　译　丛

18

Introduction to Graph Theory

(Second Edition)

图论导引（原书第2版）

（美）Douglas B. West 著

李建中 骆吉洲 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书全面介绍了图论的基本概念、基本定理和算法，帮助读者理解并掌握图的结构和解决图论问题的技巧．另外，书中包含很多图论的新研究成果，并介绍了一些悬而未决的图论问题．证明与应用并举是本书的一个重要特点，书中对所有定理和命题给出了完整的证明，同时讨论了大量的实例和应用，并提供了1 200多道习题．

本书可以作为高等院校数学系本科生和研究生、计算机专业和其他专业研究生的图论课程教材，也可以作为有关教师和工程技术人员的参考书．

本书版权登记号：图字：01-2003-2001

图书在版编目(CIP)数据

图论导引(原书第2版)/(美)韦斯特(West, D. B.)著；李建中，骆吉洲译．—北京：机械工业出版社，2006.2

(华章数学译丛)

书名原文：Introduction to Graph Theory, Second Edition

ISBN 7-111-17780-0

Ⅰ．图…　Ⅱ．①韦…　②李…　③骆…　Ⅲ．图论　Ⅳ．O157.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第127464号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037)

责任编辑：赵　俐　迟振春

北京京北制版厂印刷·新华书店北京发行所发行

2006年2月第1版第1次印刷

787mm×1020mm 1/16 · 30.75印张

印数：0 001-4 000册

定价：65.00元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译 者 序

1736 年，瑞士数学家 L. Euler(欧拉)在他的一篇论文中讨论了哥尼斯堡(Königsberg)七桥问题，由此诞生了一个全新的数学分支——图论(Graph Theory). 在经历了 200 多年的发展之后，图论已经积累了大量的理论和结果，其应用领域也逐步扩大．最初，图论主要用来讨论游戏中遇到的问题；19 世纪末期，图论已经用来研究电网络方程组和有机化学中的分子结构；20 世纪中叶以后，借助于计算机，图论又用来求解生产管理、军事、交通运输、计算机以及通信网络等领域中的许多离散性问题，同时图论中的一些著名问题也借助于计算机得到了证明．如今，图论本身及其在物理学、化学、运筹学、计算机科学、电子学、信息论、控制论、网络理论、社会科学和管理科学等领域中的应用越来越受到人们的重视．因此，作为理工科相关专业的学生，全面系统地学习图论中的概念、基本定理和算法并了解图论中的一些悬而未决的问题是十分必要的．

本书是一部优秀的图论教科书，由 Douglas B. West 教授所著，目前已经是第 2 版了．Douglas B. West 教授是伊利诺伊大学数学系的资深教授，长期从事图论理论和组合优化方面的研究工作，发表了 100 多篇论文．

本书旨在介绍图论的基本概念、基本定理和算法，帮助读者理解并掌握图的结构和解决图论问题的技巧．另外，本书包含很多图论的新研究结果，并介绍了一些悬而未决的图论问题．证明与应用并举是本书的一个重要特点．图论中的许多问题都有多个证明，作者对这些证明进行了精心选择，深入浅出地介绍了图论的证明技巧；本书还设计了大量习题，总量超过 1 200 道．通过这些习题，读者可以深刻理解图论的基本概念和证明技巧，并能够补充正文未包括的知识．

本书可以作为高等院校数学系本科生和研究生、计算机专业和其他专业研究生的图论课程教材，也可以作为有关教师和工程技术人员的参考书．

限于译者水平，译文中难免存在疏漏和错误，望广大读者批评指正．

译　者

2005 年 5 月

前　言

图论是训练离散数学证明技巧的乐园，其结果在计算科学、社会科学和自然科学等多个领域具有广泛应用．本书可作为本科生或低年级研究生 1～2 个学期的图论课程的教材．本书不要求任何图论的预备知识．尽管本书包含许多算法和应用，但重点是理解图的结构和分析图论问题的技巧．

目前已经有许多图论的教科书．由 J. A. Bondy 和 U. S. R. Murty 撰写的优秀教材《Graph Theory with Applications》(Macmillan/North-Holland[1976])把重点放在证明和应用两个方面，本书的原型参照了该书．图论至今仍是一门年轻的学科，应该如何介绍图论的题材，大家仍然没有一致的看法．主题的挑选和顺序的安排，证明方法、目标和基本题目的选择等，一直是众说纷纭．作者在多次修改本书的过程中认识到，对于这些问题作决定是很困难的．本书是作者对这些争议的一点贡献．

第 2 版

第 2 版的修订主要是更易于学生学习和更便于教师教学．本书的总体内容没有很大的变化，但是对内容的表述方式做了修改，使其更容易理解，这一点在本书的前几部分尤其明显．有关第 2 版所做的某些修改，稍后将详细讨论，此处仅做一下概述．

- 非选学节中的选学材料现在用 * 号标明．这些内容不会在后续内容中使用，因而可以跳过．多数选修内容忽略以后，本书可以作为一学期的图论教学内容．如某一小节标记为“可选”，则这小节的整个内容都是可选修的，而不再标记该小节中的各个项．
- 对于缺乏基础知识的学生，附录 A 概述了有关集合、逻辑、归纳法、计数、二项式系数、关系和鸽巢原理等方面的相关知识．
- 对于很多证明都重新进行了更细致的叙述，并增加了更多的例子．
- 增加了 350 多道习题，其中多数是第 1～7 章中的比较容易的题目．这样，本书的总习题量超过了1 200 道．
- 增加了 100 多幅插图．本书的插图总量超过了 400 幅．为区别插图中包括的几种类型的边，书中把原有的实线和虚线改变为粗线和实线，增加了插图的清晰度．
- 相对简单的问题都集中放在各节习题的前面部分，用来作为热身练习．一些习题经过了改写，使其语义更加清楚．
- 对习题的提示做了补充，增加了一个“部分习题的提示”的附录．
- 为了易于查找，概念术语都用黑体字给出，其中绝大多数都出现在概念定义中．
- 为了易于查找，将术语集中索引形成附录 D.
- 有关欧拉回路、有向图和 Turán 定理的内容经过了重新编排，以提高学习效率．
- 第 6 章和第 7 章交换了顺序以便先介绍平面性的思想，与复杂性有关的部分经过改编安排在附录中．
- 改正了专业术语的错误，并更加强调与本书内容直接相关的术语．

特点

本书特点就是使学生能够深入理解本书的内容．本书包括对证明技巧的讨论、1 200 多道习题、400 多幅插图以及许多例子．本书正文中出现的结论都有详细完整的证明．

很多本科生在开始学习图论前都很少涉足证明技巧，附录 A 提供的背景阅读材料有助于初学

者提高这方面的技巧．如果初学者在理解和书写证明时有困难，请结合第 1 章仔细阅读附录 A. 虽然本书前面的一些章节仍然讨论了一些证明技巧(特别是归纳法)，但是更多的背景知识(特别是集合、函数、关系和初等计数)已经安排在附录 A 中．

大多数习题都需要证明．很多本科生在论证问题方面的实践不足，这将影响他们对于图论和其他数学知识的兴趣．抛开数学而言，论证问题方面的智能训练也是极其重要的，作者希望学生喜欢这种训练．在求解问题时，学生应该注意语言的使用("说出的即是你要表达的")，而且表达准确("表达的即是你要说出的")．

虽然图论中许多术语本身就表明了它们各自的定义，但太多的专业术语定义会影响内容的可读性．数学家喜欢一开始就给出一系列定义，但学生们大都愿意熟练掌握一个概念后再去接受下一个概念，这样他们会学得更好．学生的这个意愿和审稿者的建议使作者推迟了很多定义的给出，直到需要的时候．例如，笛卡儿积的定义在 5.1 节的着色问题部分给出，线图的定义则分别在 4.2 节的 Menger 定理部分和 7.1 节的边着色部分给出，诱导子图的定义和连接的定义分别推迟到 1.2 节和 3.1 节给出．

书中已经改变了对有向图介绍的位置，将其推迟到了 1.4 节．如果在介绍图的同时介绍有向图，会使学生产生迷惑．在第 1 章的最后介绍有向图相对易于学习，能够在了解两种图的差别的同时加强对基本概念的理解．在连通性问题上，本书仍会将这两个模型放在一起讨论．

本书比其他图论书籍包含了更多的内容．作为"额外主题"的可选章节，最后一章汇集了很多图论最新研究结果，使得本书适合不同层次的读者使用．本科生的教学内容可以由前七章组成(去掉大部分选修内容)，第 8 章可作为感兴趣学生的主题阅读材料．研究生的教学内容可以采用如下结构：第 1 章和第 2 章作为推荐阅读材料，在课堂上快速进入第 3 章，并讲授第 8 章的一些主题内容．第 8 章以及前面章节的选修内容也可作为高级图论课程的基本内容．

很多图论中的结论都有多个证明，这样有助于提高学生采用多种方法处理问题的灵活性．对于同一个问题，本书可能在注记中谈及一些不同的证明方法，另外一些留作练习．

很多习题都有提示，一些提示在习题中直接给出，另一些在附录 C 中给出．标记了"－"的问题比较简单，标记了"＋"的问题比较难．标记了"＋"的问题不应该作为本科生的作业．标记了"!"的问题则特别有价值、启发性或有趣．标记了"*"的问题涉及可选内容．

每个习题都以标记"－"的习题开始，根据相关章节内容的先后顺序排列，这部分习题的结束由一组点来标记．这部分习题要么是检查对概念的理解，要么是对这部分内容的结论的直接应用．作者在课堂上推荐一些这样的习题作为热身练习，在完成主要的作业题(多数这样的习题标记了"!")之前检查学生对基本概念的理解．多数标记"－"的问题是很好的考试题．如果在考试中使用其他习题，从附录 C 中选取一些提示是很好的做法．

涉及多个概念的习题在最后一个相关概念介绍完之后给出．正文中一个概念介绍完后有时会有指针指向与该概念相关的习题．全书有很多这样的指针．每一节对本节习题的引用仅由该习题在这节的习题中的相对编号给出，对其他习题的交叉引用将通过其章、节和习题编号给出．

组织和修改

本书第 1 版力求内容的承接关系以及证明难度和算法复杂性循序渐进．

在第 2 版中，本书继续保持这种风格．欧拉回路和哈密顿环仍在不同章节，并且离得更远．欧拉回路的简单介绍在 1.2 节，其中包括了与之密切相关的材料．原来 2.4 节的部分内容移到其他章节的相关部分，并删除了 Fleury 算法．

第1章被彻底改写．本书仍然没有使用术语“多重图”．它引起的问题比它能解决的问题要多，因为很多学生认为一个多重图必须有多条边．一般来说，只在需要的时候才在图的前面加上“简单”，而将“图”理解成普通的图，这样不会引起误解，因为偶尔在一些特定场合中仅考虑简单图才有意义．

第2版中对第1章的定义进行了处理，使其更加容易理解和精确，特别是路径、轨迹和通道等概念．原来1.1节对于基本定义的非正式分组已经由一个“定义”部分所取代．定义部分能够帮助学生更容易找到所需要的定义．

除了有关同构的内容，1.1节对Petersen图进行了更精确的介绍，对于分解和围长的概念也有清晰的阐述．这为以后的相关讨论提供了方便，同时也可以激发读者对图同构之外的其他问题的兴趣．

1.2节到1.4节变得更加条理清晰．对欧拉回路的处理进一步完善了1.2节．1.3节的一些内容被删除了，从而突出了度和计数，这节还包含了原1.4节有关顶点度的材料．1.4节现在主要是对有向图的介绍．

由于树和距离之间具有很多联系，所以第2章同时包含了这两部分内容．很多习题包含这些概念．计算距离的算法也会产生或用到树．

很多图论专家认为König-Egerváry定理需要一个与网络流无关的独立证明．学生在区分“k-连通”和“连通度k”时感到困难，而且“k-可染色”和“色数k”也有同样的问题．因此，书中首先介绍匹配，然后用匹配证明Menger定理．匹配和连通性都在着色问题中有所应用．

为了满足众多读者的要求，本书在3.1节结尾增加了一个可选小节，介绍支配集．作者通过强调顶点覆盖而不是增广路径，并使用很多较好的例子，使得加权二部匹配的概念更加清晰易懂．

在第1版中，Turán定理仅使用了顶点度和归纳的基本思想，因此这部分内容在第1章给出．这样的安排使学生感到Turán定理太抽象，难以理解．为此，考虑到与着色相关的极值问题，本书在1.3节仅保留了简单三角自由的情况(芒泰尔定理)，而将完整的Turán定理移至5.2节．

关于平面性的章节现在移至“边和环”的前面．当课时不足时，平面性应优先讲授，因为它比边着色和哈密顿环更重要．与平面性相关问题的可视性较强，易于被学生接受，而且许多学生在这之前已经遇到过这些问题．相对于本书前面的材料来说，平面图的一些想法似乎比证明边着色问题和哈密顿环问题使用的方法更易于接受和理解．

先讨论平面性问题将会使第7章的内容更加条理清晰．新的编排将会使平面性、边着色、哈密顿环等问题之间关系的讨论更全面，并自然引出超出四色定理的可选新内容．

当学生们发现着色和哈密顿环问题缺乏好的算法时，很多人开始关心问题的NP完全性．附录B满足了这些读者的好奇心．使用形式语言来叙述NP完全性问题会使问题更抽象，因此很多学生更喜欢用图论的术语来描述NP完全问题．NP完全性的证明也说明了“图变换”的多样性和有用性．

本书探讨了基本结果之间的关系．2-因子Petersen定理使用了欧拉回路和二部匹配；Menger定理和最大流-最小割定理的等价关系比第1版有更深入的探讨；“棒球淘汰问题”(Baseball Elimination)的应用被论述得更加详尽；k-色-临界图的k-1-连通性(第5章)用到了二部匹配；5.3节对完美图做了简要的介绍，着重强调了弦图．与其他书相比，本书不仅包括了Vizing定理的算法证明，还包括了使用Thomassen方法对Kuratowski定理的证明．

本书的前七章还有很多其他的增加和改进．第6章末尾对Heawood公式和Robertson-Seymour

定理进行了简要的讨论．7.1 节增加了关于边-色数的 Shannon 界的证明．5.3 节给出了一个有关单纯顶点的更强的结论，这使得对弦图的特征刻画变得更简单明了．在 6.3 节，删掉了 Birkhoff 菱形的可归约性证明，增加了有关卸载问题的讨论．定理证明的讨论是可选的，目的是在没有开始详细证明之前给出关于证明的思路．从这个观点出发，可归约性证明似乎不是重点．

第 8 章包含了一些图论的新内容，这些内容不适合作为本科生的教学内容．这一章比前几章的内容更复杂而且撰写得更简练．这一章的各节都是独立的，每节都从一个大的主题中选择了最具吸引力的研究结果．某些节越接近结束理解起来越困难．在讲授这部分内容时，教师应该选取某些节比较靠前的内容讲授，而不要讲授全部内容．

第 8 章和前七章的可选部分可能偶有相关，但一般都有交叉引用指出这些联系．与第 1 版相比，第 8 章的题材没有重大的改变，只是改正了错误并且许多地方的叙述更加清晰．

在《The Art of Combinatorics》一书中将更全面地讨论高级图论．其中，第Ⅰ卷介绍极值图论，第Ⅱ卷介绍图的结构，第Ⅲ卷讨论拟阵和整数规划(包括网络流)，第Ⅳ卷重点介绍组合学中的方法并讨论图特别是随机图的各个方面．

课程的设计

第 1 章到第 7 章的 22 节，每节可占用两个学时，跳过其中大部分可选内容(即标注了星号或可选小节)．作者讲课时，用 8 个学时讲解第 1 章；用 12 个学时讲解第 4 章和第 5 章，每章 6 个学时；用 20 个学时讲解第 2 章、第 3 章、第 6 章和第 7 章，每章 5 个学时．于是，本书的基本内容可以用 40 个学时讲授完毕．教师也可以在第 1 章花更多的时间，而删掉后面章节的部分内容．

在第 1 章后面的各章，最重要的内容都在第 1 节．在一学期内只讲授这部分内容，也能使学生对图论有一个大致的了解．在第 2、4、5、6、7 章的第 2 节中，分别讲授 Cayley 公式、Menger 定理、Mycielski 构造、Kuratowski 定理和 Dirac 定理，这对学生是有益的．

一些可选内容在课堂上讲授是很具有吸引力的．例如，作者经常讲授 2.1 节的不相交生成树和 3.2 节的稳定匹配等内容．作者也讲授 3.3 节有关 f-因子的可选子节．前七章的某些子节标记为可选内容，是因为以后不再涉及这些内容，而且这些内容也不属于图论的基础部分．然而，这些内容是能够引起学生兴趣的很好的应用．对学生来说，可选内容在期末考试时不会出现．

跳过前两章的研究生课程应该包括如下的内容：图序列、有向图的核、Cayley 公式、矩阵树定理和 Kruskal 算法．

如果在每年四学期制的一个学期中讲述图论课程，需要突出重点．这里建议按照下面的大纲讲授：1.1：邻接矩阵、同构和 Petersen 图；1.2：全部；1.3：度-和公式和大二部子图；1.4：讲授到强分量，加上竞赛图；2.1：讲授到树中心；2.2：讲授到矩阵树定理；2.3：Kruskal 算法；3.1：几乎全部；3.2：不讲；3.3：Tutte 定理的叙述以及 Petersen 结论的证明；4.1：讲授到块的定义，忽略 Harary 图；4.2：讲授到开放耳分解，加上 Menger 定理；4.3：流和分割的对偶性并叙述最大流与最小割之间的相等关系；5.1：讲授到 Szekeres-Wilf 定理；5.2：Mycielski 构造和 Turán 定理；5.3：讲授到着色递归，加上弦图的完美性；6.1：K_5 和 $K_{3,3}$ 的非平面性、对偶图的例子以及欧拉公式及其应用；6.2：Kuratowski 定理和 Tutte 定理的叙述和例子；6.3：五色定理和交叉数的思想；7.1：讲授到 Vizing 定理；7.2：讲授到 Ore 条件和 Chvátal-Erdös 条件；7.3：Tait 定理和 Grinberg 定理．

教学方法的进一步说明

在这一版中，作者强调可以自然地从相关材料中得到的那些结果，讲课时强调这些内容有助于内容的融会贯通．

本书更多地强调了 TONCAS 这一要点，即“显然的必要条件也是充分的”．书中明确指出，很多基本结果都可以用这种方式来理解．这既为本课程提供了一个主题，也使得等价关系中简单的一面和复杂的一面之间的区别更加明朗．

另外，第 3 章到第 5 章以及第 7.1 节中强调得较多的是极大、极小值问题间的对偶性．在图论课程中，没有人想深入钻研线性最优化问题中对偶的本质．只需理解构成对偶对的两个最优化问题具有如下性质即可：极大值问题的任意可行解的值不超过极小值问题的任意可行解的值．如果两个互为对偶问题具有相同取值的可行解，则由对偶性可知，这两个可行解都是最优的．有关线性规划的讨论在 8.1 节中给出．

其他的要点均属于证明技巧．其一是用极端化方法来简化证明并避免使用归纳法．其二就是用归纳法证明条件性命题，关于这一点在注记 1.3.25 中有明确的说明．

导出 Kuratowski 定理的过程有些长．尽管如此，最好在一个学时内完成其证明．为了节省时间，可以简单处理将该问题归约到 3-连通情况的那些预备引理．注意，用归纳法可以很自然地引出两个引理来证明 3-连通的情况．此外，还要注意证明使用了 5.2 节中定义的 S-瓣这个概念．

第 6 章的第 1 个学时不要就作图和区域等技术定义进行冗长的讨论．最好将这些概念当做直观概念，除非有学生问起它们的细节．正文中有这些概念的精确叙述．

由于在后续内容中不再涉及，1.4 节中得出有向图概念的应用例子被标记为选修内容．但这些例子可以使读者更清晰地认识到模型(图或有向图)的选取是依赖于应用的．

由于图论不强调数值计算而强调证明技巧和解释的清晰，因此是用来培养学生书面和口头表达能力的一门很好的课程．除了布置一些书面作业并要求学生仔细书写其论述过程外，作者发现组织一些“讨论式学习”也是很有成效的，这时学生们讨论问题，教师则在教室巡游、听学生的讨论并回答他们的问题．记住，考察一个人是否真正理解了证明过程的最好方法就是让们 给别人解释这个证明．参与这种讨论的学生均受益匪浅．

致谢

本书得益于许多大学在课堂教学中对其不断的改进．按时间顺序排序，使用过这本教材的教师有：Ed Scheinerman(约翰斯·霍普金斯大学)，Kathryn Fraughnaugh(科罗拉多大学丹佛分校)，Paul Weichsel/Paul Schupp/Xiaoyun Lu(伊利诺伊大学)，Dean Hoffman/Pete Johnson/Chris Rodger(厄本大学)，Dan Ullman(乔治华盛顿大学)，Zevi Miller/Dan Pritikin(迈阿密大学俄亥俄分校)，David Matula(南卫理公会大学)，Pavol Hell(西蒙·弗雷泽大学)，Grzegorz Kubicki(路易斯维尔大学)，Jeff Smith(普度大学)，Ann Trenk(韦尔兹利学院)，Ken Bogart(达特茅斯学院)，Kirk Tolman(伯明翰扬大学)，Roger Eggleton(伊利诺伊州立大学)，Herb Kasube(布拉德雷大学)，Jeff Dinitz(佛蒙特大学)．其中很多人以及他们的学生都对本书提出了宝贵的修改意见．

在此感谢 Prentice Hall 的 George Lobell. 感谢他长期的帮助并找到本教材的审阅者．审阅者 Paul Edelman，Renu Laskar，Gary MacGillivray，Joseph Neggers，Joseph Malkevitch，James Oxley， Sam Stueckle 和 Barry Tesman 提出了宝贵的意见．第 8 章的早期版本的审阅者包括 Mike Albertson，Sanjoy Barvah，Dan Kleitman，James Oxley，Chris Rodger 和 Alan Tucker. 第 2 版的审阅者有 Nate Dean，Dalibor Froncek，Renu Laskar，Michael Molloy，David Sumner 和 Daniel Ullman.

从第 1 版到第 2 版的很多修改意见来自读者．这些修改包括从排版错误到简化证明、附加习题，这对本书的完成是非常重要的．在此感谢他们对本书的评价和意见．这些人包括：Troy Barcume，Stephan Brandt，Gerard Chang，Scott Clark，Dave Gunderson，Dean Hoffman，John D'Angelo，Charles Delzell，Thomas Emden-Weinert，Shimon Even，Fred Galvin，Alfio Giarlotta，Don Greenwell，Jing Huang，Garth Isaak，Steve Kilner，Alexandr Kostochka，André Kündgen，Peter Kwok，JeanMarc Lanlignel，Francois Margot，Alan Mehlenbacher，Joel Miller，Zevi Miller，Wendy Myrvold，Charles Parry，Robert Pratt，Dan Pritikin，Radhika Ramamurthi，Craig Rasmussen，Bruce Reznick，Jian Shen，Tom Shermer，Warren Shreve，Alexander Strehl，Tibor Szabó，Vitaly Voloshin 和 C. Q. Zhang.

特别感谢 John Ganci 对本书极其认真的阅读！

在第 2 版再版时，学生们发现了许多排版错误．这些学生包括：Jaspreet Bagga，Brandon Bowersox，Mark Chabura，John Chuang，Greg Harfst，Shalene Melo，Charlie Pikscher 和 Josh Reed.

第 1 版的封面是由 Ed Scheinerman 使用美国军方 Ballistic 实验室的 BRL-CAD 完成的．第 2 版的封面是由 Maria Muyot 使用 CorelDraw 完成的．

Chris Hartman 在为第 1 版参考文献的准备方面做了重要工作，新的参考文献现在已经被加入. Ted Harding 帮助解决了第 1 版在排版方面的困难．

本书第 2 版是使用 TEX 完成的．TEX 中的科学排版系统归功于 Donald E. Knuth. 书中的插图是使用 gpic 生成的，它是一种免费的软件．

反馈

作者在这里欢迎大家对本书提出修改和建议，包括对本书主题的评论、结果的归属、更新、对习题的建议、排版错误、专业术语等．请将您的宝贵信息发送至

west@math. uiuc. edu

如果在参考文献的引用上有所遗漏，在此表示特别的抱歉，并请通知作者．

作者建立了一个 Web 网站，包括课程提纲、勘误表、更新等辅助材料，欢迎您访问！

http://www. math. uiuc. edu/～west/igt

在印刷之前作者已将所知道的所有排版和数学错误更正完毕．尽管如此，本书还难免会存在一些错误．请您帮助找到并通知作者，以便及时更正．

Douglas B. West

伊利诺伊大学厄巴纳分校

符 号 表

$\leftrightarrow$	邻接关系
$\rightarrow$	后继关系(有向图)
$\cong$	同构关系
$a \equiv b \bmod n$	同余关系
$\Rightarrow$	蕴涵
$\lfloor x \rfloor$	数的下取整
$\lceil x \rceil$	数的上取整
$[n]$	$\{1, \cdots, n\}$
$\lvert x \rvert$	数的绝对值
$\lvert S \rvert$	集合的大小
$\{x: P(x)\}$	集合描述
∞	无穷
$\varnothing$	空集
$\cup$	并
$\cap$	交
$A \subseteq B$	子集
$G \subseteq H$	子图
$G[S]$	由 S 诱导的 G 的子图
$\bar{G}, \bar{X}$	图或集合的补
G^*	(平面)对偶
G^k	图的 k 次幂
S^k	S 的 k 元组的集合
$[S, \bar{S}]$	边割
$[S, T]$	源点/接收点割
$G-v$	顶点的删除
$G-e$	边的删除
$G \cdot e$	边的收缩
$G+H$	图的不相交并
$G \vee H$	图的并
$G \square H$	图的笛卡儿积
$G \Delta H, A \Delta B$	对称差
$G \circ x$	顶点复制
$G \circ h$	顶点多重复制
$A \times B$	集合的笛卡儿积
$A-B$	集合的差
$\binom{n}{k}$	二项式系数
$\binom{n}{n_1 \cdots n_k}$	多项式系数
$\mathbf{1}_n$	所有项均为 1 的 n-向量
$Y \mid X$	条件变量或事件
$A(G)$	邻接矩阵
$\mathrm{Adj}\ A$	转置伴随矩阵
$B(G)$	带宽
$\boldsymbol{B}_M$	拟阵的基
$\boldsymbol{C}_M$	拟阵的回路
C_n	具有 n 个顶点的环
C_n^d	环的幂
$c(G)$	分支数
$c(G)$	周长
$C(G)$	(哈密顿)闭包
$c(e)$	代价或容量
$\mathrm{cap}(S, T)$	割的容量
$d_1, \cdots, d_n$	度序列
$d(v), d_G(v)$	顶点的度
$d^+(v), d^-(v)$	出度，入度
D	有向图
$D(G)$	距离和
$d(u, v)$	从 u 到 v 的距离
$\mathrm{diam}\ G$	直径
$\det A$	行列式
$E(G)$	边集
$E(X)$	期望值
$e(G)$	大小(边数)
$f^+(v), f^+(S)$	全出口流
$f^-(v), f^-(S)$	全入口流
f	函数，流
f	面数

G	图(或有向图)	$\mathbf{R}^2$	$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$
G^p	模型 A 中的随机图	r_M	拟阵的秩函数
$H_{k,n}$	Harary 图	S_γ	具有 γ 个手柄的表面
$\boldsymbol{I}_M$	拟阵的独立集	Spec (G)	谱(特征值)
I	单位矩阵	A^{T}	矩阵的转置
J	所有元都为 1 的矩阵	T	树，竞赛图
K_n	完全图	$T_{n,r}$	Turán 图
$K_{r,s}$	完全二部图	$t_r(n)$	Turán 图的大小
$L(G)$	线图	$U_{k,n}$	均匀拟阵
$l(e)$	流的下界	$u(e)$	流的上界
$l(D)$	路径的最大长度	$\mathrm{val}(f)$	流 f 的值
$l(F)$	面的长度	$V(G)$	顶点集
$\lg x$	以 2 为底的对数	$\boldsymbol{W}_n$	具有 n 个顶点的轮
$\ln x$	自然对数	$w(e)$	边的权
M	匹配	$\mathbf{Z}$	整数集
$M(G)$	关联矩阵	$\mathbf{Z}_p$	整数模 p
$M(G)$	G 的圈拟阵	$\alpha(G)$	独立数
M^*	对偶遗传系统	$\alpha'(G)$	匹配的最大尺寸
$M.\ F$	M 到 F 的收缩	$\beta(G)$	顶点覆盖数
$M\mid F$	M 到 F 的限制	$\beta'(G)$	边覆盖数
$\mathbf{N}$	自然数集	$\gamma(G)$	亏格，支配数
N	网络	$\Delta(G)$	最大度
$N(v)N_G(v)$	(开)邻域	$\Delta^+(G)$，$\Delta^-(G)$	最大出度，最大入度
$N[v]$	闭邻域	$\delta(G)$	最小度
$N^+(v)$，$N^-(v)$	出邻域，入邻域	$\delta^+(G)$，$\delta\ (G)$	最小出度，最小入度
$n(G)$	阶(顶点的个数)	$\partial\ (v)$	顶点处的需求
$O(f)$，$o(f)$	增长率	$\varepsilon_G(u)$	G 中 u 的离心率
$o(H)$	奇分支数	$\Theta(f)$	增长率
$P(A)$	事件的概率	$\theta(G)$	团覆盖数
P_n	具有 n 个顶点的路径	$\theta'(G)$	交数
pdim G	乘积维	$\kappa(G)$	(顶点)连通度
qdim G	塌陷立方体维	$\kappa'(G)$	边-连通度
Q_k	k-维超立方体	$\kappa(x, y)$	局部连通度
rad G	半径	$\kappa'(x, y)$	局部边-连通度
$R(k, l)$	拉姆齐数	$\kappa(r; G)$	局部-全局连通度
$R(G, H)$	图拉姆齐数	$\lambda(x, y)$	最大 # 不相交路径
$\mathbf{R}$	实数集	$\lambda'(x, y)$	最大 # 边-不相交路径

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$	特征值
$\mu_1, \cdots, \mu_n$	特征值
$\mu(e)$，$\mu(G)$	边重数
$v(G)$	交叉数
$\prod$	乘积
$\rho(G)$	最大密度
$\sum$	和
σ，π，τ	置换
$\sigma(v)$	顶点处的供应
σ_M	生成函数
$\tau(G)$	生成树的个数
$\Upsilon(G)$	荫度
$\phi(G;\lambda)$	特征多项式
$\chi(G)$	色数
$\chi'(G)$	边-色数
$\chi(G;k)$	色多项式
$\chi_l(G)$	序列色数
$\psi(G;\lambda)$	最小多项式
$\Omega(f)$，$\omega(f)$	增长率
$\omega(G)$	团数

目　录

第1章 基本概念

1.1 什么是图

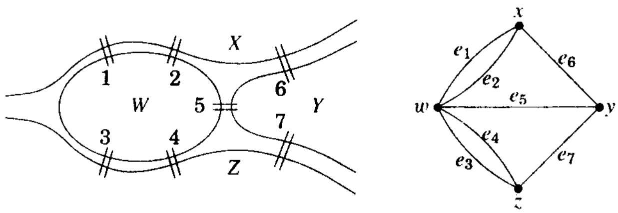
怎样布线才能使得每一部电话都互相连通，并且花费最小？从首府到每州州府的最短路线是什么？n 项任务怎样才能最有效地由 n 个人完成？管道网络中从源点到汇集点的单位时间最大流是多少？一个计算机芯片需要多少层才能使得同一层的线路互不相交？怎样安排一个体育联盟季度赛的日程表使其在最少的周数内完成？一位流动推销员要以怎样的顺序到达每一个城市才能使得旅行时间最短？我们能用 4 种颜色来为每张地图的各个区域着色并使得相邻的区域具有不同的颜色吗？

这些问题以及其他的一些实际问题都涉及图论．在这本书里，我们将介绍图的一些理论并将其应用于这些问题．我们假定读者具有附录 A 提供的数学背景，即基本的数学对象和语言．

定义

我们常说的下面这个导致图论诞生的问题将启示我们给出图的基本定义．

1.1.1 例（哥尼斯堡（Königsberg）桥问题） 哥尼斯堡城坐落于普鲁士的普莱格尔河畔．城区包括 Kneiphopf 岛和河的两岸区域．这四个地区通过下图所示的 7 座桥连接．市民们想知道如果他们从家出发，经过每一座桥恰好一次，是否又能返回家．这个问题被简化为遍历右侧的图，图中的黑点表示陆地，曲线表示桥． 1



由右侧的模型易知这样的遍历是不存在的．每当我们到达并离开一块陆地时，要通过两座连接到这个地区的桥．我们也可以把出发的第一座桥和返回地区的最后一座桥作为一对．这样所需的遍历要求每块陆地与偶数座桥相连．这个必要条件在哥尼斯堡问题中是不存在的． ■

在 1.2 节当我们说明哪种结构具有可遍历性时，哥尼斯堡桥问题变得更加有趣．同时，哥尼斯堡问题为讨论这样的问题提出了一个通用模型．

1.1.2 定义 一个**图** G 是一个三元组，这个三元组包含一个**顶点集** $V(G)$，一个**边集** $E(G)$ 和一个关系，该关系使得每一条边和两个顶点（不一定是不同的点）相关联，并将这两个顶点称为这条边的**端点**．

在纸上**作图**就是将每一个顶点定位到一个点上并将边用连接其端点的曲线来表示．

1.1.3 例 在例 1.1.1 的图中，顶点集为 $\{x, y, z, w\}$，边集为 $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$，每条边的端点如图所示．

注意 e_1 和 e_2 具有同样的端点，边 e_3 和 e_4 也是如此．如果在一个小水湾上有一座桥，那么桥的两端将在同一块土地上，所以我们要画一条其两个端点在同一点的曲线来表示它．我们有确切的术