高等数学（上册）

同济大学应用数学系 编著

21世纪网络版系列教材

同济大学出版社

21世纪网络版系列教材

高等数学

上册

同济大学应用数学系　编著

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/同济大学应用数学系编著.—上海:
同济大学出版社,2002.8
21世纪网络版系列教材
ISBN 7-5608-2467-6

Ⅰ.高… Ⅱ.同… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第051292号

高等数学(上册)

作　者　同济大学应用数学系　编著

责任编辑　孙一风　责任校对　郁　峰　装帧设计　陈益平

出版发行　同济大学出版社

(上海四平路1239号　邮编200092　电话021-65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂印刷

开　本　787mm×960mm　1/16

印　张　27.75

字　数　555000

印　数　1—5200

版　次　2002年8月第1版　　2002年8月第1次印刷

书　号　ISBN 7-5608-2467-6/O·217

定　价　34.00元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

序

21 世纪，将是中华民族复兴的世纪。肩负着这一空前历史重任的人民，要求必须具有与之相适应的素质。这也将是新世纪对教育提出的新任务和新要求，也就是说，教育必须适应大众化和终身化的要求。所谓“大众化”，是指人们有着更多的机会接受教育，包括高等教育在内；所谓“终身化”，是指人生过程都伴随着接受教育的机会。

在某种意义上说，网络教育正是为适应教育大众化和教育终身化的要求而产生的。信息技术和网络技术的空前发展，为网络教育的实施提供了切实可行的手段和方式，也可以说，信息和网络技术催生了网络教育。它可不受人力、地域、场地和时空的限制。网络教育方式的出现，在提升教育使命、丰富教育理念、扩大教育规模、革新教育手段、优化教育资源和提高教育质量等方面起着重要的作用。

网络教育采用的是借助现代信息技术的一种全新的教学形式，这就为网络教育的教材编写工作提出了新的要求。它更需要以其视听性、自学性、选择性、层次性、灵活性的特点去满足读者的需要，让每一个学习者都可以寻求到适应自己层次的知识点。我高兴地看到，参加这套网络系列教材编写工作的教师，都具有深厚的专业学识、丰富的教学经验，以及对现代教育技术的理解，这是整套教材的质量水平的可靠保证。

我期望，这套教材的出版，将会有助于推动教育大众化和教育终身化的进程，有利于促进网络教学的发展，有助于满足人们日益追求知识的愿望，有助于创造一个学习型社会的氛围，为中华民族的复兴作一点贡献。

2002 年 8 月 8 日写于同济园

《21 世纪网络版系列教材》编委会

前言

网络教育是近年来出现的一种新的教育形式.本书的编写意在适应这种新型教育形式的需要,有助于它的蓬勃发展.本书主要供接受网络教育的工科高等院校本科学生学习高等数学课程时使用.为此,在编写过程中,我们注意到了如下两个方面的问题:一方面,在教学内容的取舍、展开的深广程度上尽可能符合现行的高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》;另一方面,在教学内容的叙述、例题的选择和习题的配置等环节上,尽可能适应网络教育的特点.

考虑到当前本课程的教学时数不可避免地被压缩的实际情况,以及计算机的广泛应用与数学软件的日臻完善,在本书中对某些内容作了适当的精简,例如,在不定积分这部分内容中,介绍了不定积分的基本运算方法,但是在技巧性方面不作过高要求,控制了例题和习题的难度;又如,对函数的作图、方程的近似解、数值积分等内容只介绍基本原理与方法.我们希望在条件具备的学校与教学点,充分利用计算机来完成这些内容的教学,取得更好的教学效果,同时也尽量体现网络教育的特点.

在本书的编写中,我们努力突出微积分的基本思想与基本方法,以便学生更好地学习与掌握.我们希望学生在本课程的学习过程中不断提高数学素质.

本书分为上、下两册,上册包括函数与极限,一元函数微分学,一元函数积分学与常微分方程等内容;下册包括无穷级数,空间解析几何与向量代数,多元函数微分学与多元函数积分学等内容.本书习题配置的方式是:每一节学习之后,为了达到教学的基本要求,每个学生都需要做的习题单独编制为习题册(也相应地分为上、下两册);另外,在每一章末编制有复习题,其中,大部分习题是为复习、巩固所学知识而设置的,也有一些习题可以供学生提高数学能力之用.我们希望习题的这种配置方式可以更好地适应网络教育的需要.

本书的编写得到同济大学网络教育学院和应用数学系的支持.参加本书编写的有黄珏、许新福、张华隆、任学敏.我们还感谢同济大学出版社策划部的热情帮助.

由于编者水平所限,加之时间仓促,书中必有不妥之处,错误也在所难免,希望专家、同行和广大读者批评指正.

编者

2002.4

目 录

第一章　函数、极限与连续

导读

函数是高等数学研究的主要对象.读者在中学数学课程中已经学习过一些集合、函数的知识.我们将在本章的第一节、第二节两节中,在中学数学的基础上进一步地讨论函数.首先,我们介绍集合的概念、集合的运算,还对本课程中最常用的一些集合,例如区间、邻域等的含义与记号等作详尽的介绍.紧接着我们介绍映射的概念.它也是数学中的一个基本概念,指的是两个集合之间的一种对应关系.由于这种对应关系还有可能具备各种不同的性质,所以有某个映射是满射、单射或是双射的概念.此外,我们还要进一步讨论逆映射与复合映射的概念.然后,用集合论的观点给出函数的一般定义,即一元实函数(或简称为函数)是从实数集的一个子集到实数集的一个映射.反函数与复合函数的定义也分别是从逆映射与复合映射的角度引进的.在讨论了函数的一般定义之后,着重复习函数的几个基本特征.在研究函数的性质时,函数是否具备这几个基本特征总是要首先考虑的.另外,我们介绍了基本初等函数与初等函数的概念.特别要注意的是基本初等函数的概念对于读者来说是第一次明确引进的,尽管这几类基本初等函数的基本性质在中学数学中都一一加以研究讨论过(我们也作了扼要的复习).初等函数是本课程中、也就是微积分中最主要的研究对象.

本章的主要篇幅用于极限理论的介绍.极限理论在高等数学中占有极为重要的地位,它是整个微积分学的基础.本课程中涉及到的所有数学概念的建立(例如,在上册中读者将学习的函数连续的概念、导数的概念、定积分的概念以及下册中将学习的多元函数连续的概念、偏导数的概念,重积分、曲线积分、曲面积分的概念,等等)无一不是以极限理论为基础的.我们将介绍极限的概念、性质与运算法则;介绍与极限概念密切相关且在微积分运算中起重要作用的无穷小的概念;介绍极限存在的两个准则;求得两个应用极为广泛的重要极限.学好这些内容,准确理解

极限概念，熟练掌握极限运算方法，将是学好本课程的基础.

为了帮助读者准确理解极限概念，我们遵照循序渐进、从较特殊到一般的原则，先对数列介绍数列极限的概念，讨论数列极限的性质，然后对函数，就自变量趋于有限值与绝对值无限增大两种变化情形，介绍函数极限的概念，讨论函数极限的性质. 我们还将探讨数列极限的性质与函数极限的性质之间的联系与区别. 虽然准确理解极限概念对于初学者并非易事，但是我们希望读者认真学习本章中“数列的极限”与“函数的极限”这两节的内容，克服难点，迈出学好极限理论的坚实步伐. 数列极限或函数极限的运算方法十分丰富，在本课程的以后章节中，随着相关内容的展开，我们还会学习到许多方法. 但是，毫无疑问，本章中介绍的一些方法，例如极限的四则运算法则，复合函数的极限运算法则，利用两个准则、两个重要极限，利用等价无穷小的替代性质等方法，都是最基本的、经常用到的方法. 读者务必要明确这些法则、准则等的使用条件，在此基础上熟练掌握这类极限运算方法.

本章的最后部分利用极限的方法讨论函数的连续性. 首先在函数极限概念的基础上引入函数在一点连续的概念，在一点左连续或右连续的概念，继而引入函数在开区间内连续，或在闭区间上连续的概念；在极限的运算法则的基础上讨论连续函数的运算法则. 我们还引入函数在一点不连续，即间断的概念，并且也是用极限这个工具来对函数的间断点加以分类. 读者应该注意到连续性是函数的一种重要性质，是对客观世界中广泛存在的连续变化现象的数学描述. 最后，我们还讨论了闭区间上连续函数的性质. 这些性质是易于理解的，并且很常用.

与中学阶段所学习的初等数学不同，高等数学的研究对象是变动的量（变量），并且以极限方法作为基本的研究方法. 在本章中，我们首先介绍集合与映射的概念，在映射的基础上引入函数的概念；然后介绍极限的概念、性质与运算法则. 准确理解极限概念，熟练掌握极限运算方法将是学好本课程的基础. 在本章的最后部分，我们通过极限引入函数的一种重要性质——连续

性. 连续性是客观世界中广泛存在的连续变动现象的数学描述，连续函数具有良好的性质，在理论与应用中都占有重要地位. 本课程讨论的主要对象将是连续函数.

第一节 集合与映射

一、集合

1. 集合

集合是数学中的一个基本概念. 在现实生活和数学中，常常需要把一些对象放在一起，作为一个整体来加以研究. 因此，我们把某些能够确切指定的对象看作一个整体，称它为一个**集合**，或简称为**集**. 组成一个集合的对象称为这个集合的**元素**. 集合通常用大写字母如 A,B,C 等表示，集合的元素通常用小写字母如 a,b,c 等表示. 给定一个集合，那么，对于任何一个对象都能够判定它是否为这个集合的元素，如果对象 a 是集合 A 的元素，那么，称 a 属于 A，记为 $a\in A$；如果对象 a 不是集合 A 的元素，那么，称 a 不属于 A，记为 $a\notin A$，或记为 $a\overline{\in} A$. 如果一个集合由有限个元素组成，那么，称这个集合为**有限集**；如果一个集合由无限多个元素组成，那么，称这个集合为**无限集**. 我们通常用如下的方式来表示集合：

设集合 A 由具备某种特征的对象 x 的全体组成，那么，就记为

$$A=\{x\mid x \text{ 所具备的特征}\}.$$

这种方式称为集合的描述法表示. 当一个集合是有限集时，例如集合 A 仅由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成，那么，可以记为

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

这种方式称为集合的列举法表示. 当一个集合是无限集时，只要从所列举的若干个元素中能够看出这个集合的组成规律，也可以用列举法表示这个集合.

一些常用的数集通常用特定的大写字母表示：

全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$；全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$；全体整

数的集合记为 $\mathbf{Z}$;全体非负整数即自然数的集合记为 $\mathbf{N}$;全体复数的集合记为 $\mathbf{C}$. 有时,还在表示数集的字母的右上角添加"+"、"−"、"*"等上标来表示这个数集的特定子集,例如 $\mathbf{R}^*$ 表示不等于零的实数的集合;$\mathbf{R}^+$ 表示正实数的集合;$\mathbf{R}^-$ 表示负实数的集合. 其他数集的情形类似,不予赘述.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,那么,称 A 是 B 的**子集**,A 是 B 的子集也称为 A 包含于 B(或 B 包含 A),记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$). 不含任何元素的集合称为**空集**,记为 Φ,例如集合 $\{x\mid x\in\mathbf{R}, x^2+1=0\}$ 就是空集,因为适合条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的. 规定空集是任何集合的子集.

如果集合 A 与 B,有 $A\subset B$,也有 $B\subset A$,那么,称集合 A 与 B **相等**,记为 $A=B$.

2. 集合的运算

设有两个集合 A 与 B,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**,记为 $A\cup B$;由所有既属于 A 又同时属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**,记为 $A\cap B$;由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**,记为 $A\setminus B$. 注意,作两集合 A 与 B 的差运算时,并不要求 B 是 A 的子集. 在研究某一问题的时候,我们通常把所考虑的对象的全体称为**全集**,记为 I. 此时,所涉及的一些集合都是 I 的子集. 例如,集合 A 是所涉及的一个子集,特别地,称差集 $I\setminus A$ 是 A 关于 I 的**补集**,记为 A_I^C,在不会发生混淆的时候,简称为 A 的补集,并简记为 A^C. 例如,如果取实数集 $\mathbf{R}$ 为全集,则有理数集 $\mathbf{Q}$ 的补集 $\mathbf{Q}^C$ 就是无理数集,集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$ 的补集就是 $A^C=\{x\mid x<0$ 或 $x>2\}$.

集合的并与交运算满足下列运算性质:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cap(A\cap C)$.

以上这些性质都容易根据集合相等的定义来证明.

例 1 试证明:$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

证　设 $x\in A\cup(B\cap C)$，则由并的定义，$x\in A$ 或 $x\in B\cap C$，若 $x\in A$，则由并的定义，$x\in A\cup B$ 并且 $x\in A\cup C$，故由交的定义，$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

若 $x\in B\cap C$，则由交的定义，$x\in B$ 并且 $x\in C$，故由并的定义，$x\in A\cup B$，并且 $x\in A\cup C$，于是，$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，因此

$$x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C),$$

由此即得 $A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

另一方面，设 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则由交的定义，$x\in A\cup B$，并且 $x\in A\cup C$，故由并的定义，或者 $x\in A$，或者 $x\in B$ 并且 $x\in C$，于是 $x\in A\cup(B\cup C)$，因此

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C),$$

由此即得 $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C)$.

综合以上两个方面，由集合相等的定义，就得到

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

集合的补运算满足对偶律（德·摩尔根[①]公式）：

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,(A\cap B)^c=A^c\cup B^c.$$

上述性质也容易根据集合相等的定义来证明.

对于两个集合，还可以定义笛卡儿[②]乘积，或简称为直积. 设 A 与 B 是两个集合，在 A 中任取一个元素 x，在 B 中任取一个元素 y，组成一个有序对 (x,y)，由所有这种有序对组成的集合称为 A 与 B 的**笛卡儿乘积**，或简称**直积**，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}.$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，在几何上，它表示 xOy 面内全体点的集合. $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记为 $\mathbf{R}^2$. 类似地，可以定义两个以上的若干集合的笛卡儿乘积，例如 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y,z)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R},z\in\mathbf{R}\}$，在几何上，它表示 $O\text{-}xyz$ 空间内全体点的集合，通常记为 $\mathbf{R}^3$.

---

① 德·摩尔根（de Morgan，1806—1871），英国数学家.

② 笛卡儿（R. Descartes，1596—1650），法国哲学家、数学家.