数学分析经典习题解析

孙 涛 编

高等教育出版社

数学分析经典习题解析

孙 涛 编

高等教育出版社

内容简介

本书对数学分析的基本概念、基本结论、重要方法及证明、计算技巧进行了归类和总结，对其中重要的内容进行了深入细致、全面的讨论，同时介绍了数学分析教材中不常见到的但同时又非常重要的定理。

本书收集了大量的数学分析习题，这些习题中的大部分无论其结论，还是证明这些结论的方法都是非常重要的。本书内容全面系统，由浅入深，重点突出，对提高数学分析的水平和能力都有很大帮助。有部分内容介绍了数学分析在微分方程、复变函数中的应用。

本书可作为报考数学各专业硕士研究生复习数学分析的参考书，也可供讲授数学分析课程的教师及学习数学分析课程的在校大学生作为教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析经典习题解析/孙涛编. —北京：高等教育出版社，2004.4

ISBN 7-04-013988-X

Ⅰ. 数… Ⅱ. 孙… Ⅲ. 数学分析-高等学校-解题 Ⅳ. O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第008670号

策划编辑 王瑜 **责任编辑** 李陶 **封面设计** 于涛 **责任绘图** 尹文军
版式设计 史新薇 **责任校对** 康晓燕 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网址	http://www.hep.edu.cn
总机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经销	新华书店北京发行所		
印刷	河北省财政厅印刷厂		
开本	787×960 1/16	版次	2004年4月第1版
印张	25	印次	2004年4月第1次印刷
字数	470 000	定价	28.60元

序

微积分学是人类数学史上的最大发明。自从有了微积分，自然界与人世间各种事物的运动变化规律就变成了数学题材。从而实际上它帮助催生和发展了近代和现代科学技术。

但是微积分的理论与方法是以极限原理与实数基本理论作为基础的，因此从19世纪末叶以后欧美数学家都不约而同地把初等与高等微积分统称之为“数学分析”。我国从20世纪50年代以来也一直沿用这一名称。

海内外数学教育界都公认“数学分析”是大学数学基础课程中的“重头戏”。事实上，正是它的理论结构的严密精致性与方法技巧的灵活多样性，使其久已成为培养数学科学人才的重点科目之一。

本书著者孙涛同志讲授数学分析课程十多年，现今编著出版《数学分析经典习题解析》一书，这正是他长期教学心得与经验的结晶。孙涛多年从事泛函分析方面的教学与研究，所以他对数学分析题材的内容要点、关键及难点自有透彻的理解和洞察。

正是作者丰富的教学与研究经验，使他能恰当地精选出500多个典型例习题，作出了符合认识规律的顺序安排，并依次给出了具有启发性的精细解法，有些解法还特别有趣并包含了作者自己的独到心得。例如，关于实数理论七个基本定理的等价性命题，作者给出了一个单循环式的证明，这对教师和学生来说，显然都会很感兴趣的。书中其他有趣题材，不胜列举。

总的看来，此书特色有三：一是理论框架结构完整，凡基本重要题材无一疏漏。二是讲述简明、精确而严密。这对学习者获取分析学的严谨性训练十分有益。三是书中选讲了一部分一般数学分析教程不易见到的有趣题材，如大、小Tauber定理与L'Hopital法则逆定理等等。此外，书中还有少量难度较大的综合型题目，那是供学习研究者参考的，初学者大可不必急于接触。

相信此书对数学分析的教学和教改有其独特的功能和作用，并对数学专业研究生入学考试有较大的帮助。故乐于为之做序介绍。

徐利治

2002年2月5日于北京寓所

前　　言

数学分析是数学系本科生极为重要的一门课程，在数学系研究生入学考试中也是必考的课程之一。该课程具有课时长、内容多、难度大、综合性强、与其他科目联系广的特点，是衡量数学系学生数学水平的重要标志。为了使学生能够对整个数学分析理论有系统的了解和认识，具备较高的能力和水平，本书对数学分析的主要内容进行了较为广泛、深入和系统的总结，收集了大量习题并做了详细的解答。主要内容如下：

一、在第一章中系统、全面地总结了数学分析的基本概念和基本理论，详细深入地讨论了极限（包括数列极限、函数极限）这一数学分析中最为重要的概念和与之相关的理论。强调了实数基本理论以及上、下极限在极限计算和证明中的重要作用。细致讨论了函数的连续性、导数、可积函数、级数、反常积分、参变量的积分等重要概念以及相关的重要定理，特别强调了连续函数可以用多项式一致逼近，导函数值的连通性，可积函数可以用连续函数积分逼近等性质的重要性。我们还特别讨论了单调函数和凸函数的基本性质。我们讨论了多元函数的连续性与一元函数的连续性的关系以及多元函数的偏导数、方向导数、全微分、隐函数存在定理等重要概念及基本结论。最后我们还讨论了重积分，第一、二型曲线与曲面积分的定义及有关场论的重要定理。

二、实数理论的七个基本定理构成了数学分析的重要理论基础，充分理解这些定理及熟练掌握其证明，不但对提高数学分析的水平，而且对提高逻辑思维能力起着事半功倍的作用。我们在第四章中给出了关于实数理论的七个基本定理的等价性证明，有趣的是我们所给出的证明是一个单循环的证明。我们在书中也给出了关于七个基本定理应用的例题。

三、在第六章中，我们专门讨论了涉及不等式方面的问题。该问题是数学分析研究的重要对象，也是分析中应用非常广泛的工具之一。我们给出了许多分析中重要的不等式及其证明，在此基础上又讨论了许多不等式方面的习题，这对提高数学分析的综合水平是有帮助的。

四、本书选择了一定数量涉及常微分方程的题目。常微分方程是数学系主要的课程之一，它的一般性理论和数学分析有直接的联系。引入部分常微分方程的题目对提高分析的应用水平很有帮助，同时又可以利用常微分方程的一般理论和方法来解决数学分析中的问题。

五、我们介绍了数学分析的部分重要结论，诸如处处连续处处不可导函数

的构造，幂级数在收敛区间边界上的性质（小 o 陶贝尔定理）。这些重要的结论在数学分析教材中是不易见到的。

六、全书选择了大量的习题，这些题目有的涉及数学分析中重要概念的理解，有的涉及重要定理的应用，有的涉及重要的计算，有的涉及数学分析中重要结论的补充。另外我们还重点选择了大量综合性的题目，虽然这些题目有一定难度，攻克这些题目对真正提高数学分析的能力和水平是非常必要的。我们对所有的习题都给出了详细的解答。

七、我们在部分章节习题前面列出了与之相关的概念、定理、主要结果、主要工具。虽然和第一章有部分重合之处，但其目的是针对特定的问题进行归纳总结。

八、本书有极少一部分题目难度较大，初学者可以不必接触这些题目。

此书的目的是使学生对整个数学分析的基本理论有全面、系统、深入的理解，对一些重要概念之间的关联有进一步的认识，对分析的基本技巧、主要结论、重要思想有基本的把握。

在本书的编写中，张祥德、李长军两位同志提出了很多宝贵的意见和建议，刘证、张云生两位老师提出了许多修改意见，孟鹏、陈媛媛、李岩、于延华、王欣彦、刘超等同志对本书的形成提供了帮助，对此表示衷心的感谢。

由于本人学识有限，书中差错在所难免，欢迎提出批评意见和建议。

孙　涛

2003 年 7 月于东北大学

目　　录

第一章

数学分析基本概念及主要结论

一、数列极限

极限是数学分析中非常重要的概念，极限的基本思想自始至终对解决分析中面对的问题起着关键的作用，分析中所有重要的概念，如导数、定积分、级数等均是利用极限提出的. 对极限的定义和基本性质的把握如何，是能否对整个数学分析基本理论有系统的认识的关键所在. 下面我们首先给出有关数列极限的主要定义和结论.

(1) 点列$\{x_n\}$以 x_0 为极限的**定义**　对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，

$$|x_n-x_0|<\varepsilon,$$

则称点列$\{x_n\}$当 n 趋于无穷时以 x_0 为极限. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 用数学符号简记为

$$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\text{当 } n>N\Rightarrow|x_n-x_0|<\varepsilon.$$

例　用 $\varepsilon-N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0\quad(a>1)$.

证明　设 $a=1+u$，由于 $a>1$，所以 $u>0$. 由二项式定理得

$$a^n=(1+u)^n=1+nu+\frac{n(n-1)}{2}u^2+\cdots>\frac{n(n-1)}{2}u^2,$$

因此 $\left|\frac{n}{a^n}-0\right|=\frac{n}{a^n}<\frac{2}{(n-1)u^2}<\varepsilon$，解此不等式得 $n>\frac{2}{\varepsilon u^2}+1$. 应取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon u^2}+1\right]$. 用 $\varepsilon-N$ 语言表达即为：$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon(a-1)^2}+1\right]$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n}{a^n}-0\right|=\frac{n}{a^n}<\frac{2}{(n-1)u^2}<\varepsilon.$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0(a>1)$.

(2) 点列$\{x_n\}$不以 x_0 为极限的**定义**　存在定数 $\varepsilon_0>0$，对于任意 $k>0$，存在 $n_k>k$，满足

$$|x_{n_k}-x_0|\geqslant\varepsilon_0.$$

用数学符号简记为 $\exists\,\varepsilon_0>0,\forall\,k>0,\exists\,n_k>k,|x_{n_k}-x_0|\geqslant\varepsilon_0$.

例 用 $\varepsilon-N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\neq1$.

证明 取 $\varepsilon_0=1,\forall\,n>0$,令 $k=2n+1>n$,则有 $|x_{2n+1}-1|=2>1=\varepsilon_0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在的**柯西收敛准则** 点列 $\{x_n\}$ 有有限极限的充要条件是对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $m,n>N$ 时,满足 $|x_m-x_n|<\varepsilon$.用数学符号简记为

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,N=N(\varepsilon),\text{当 } m,n>N\Rightarrow|x_m-x_n|<\varepsilon.$$

例 设 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|(n\geqslant2)$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

证明 令 $b_{n+1}=|x_{n+1}-x_n|$,于是有 $0\leqslant b_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}b_n(n=1,2,\cdots)$.利用归纳法可得

$$b_{n+1}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}b_2.$$

又对于任意的 $m>n,x_m-x_n=\sum\limits_{i=n}^{m-1}(x_{i+1}-x_i)$,于是

$$|x_m-x_n|=\sum_{i=n}^{m-1}b_i\leqslant b_n\sum_{i=n}^{m-1}\frac{1}{2^{m-1-i}}<2b_n\to0\quad(n\to\infty).$$

这表明 $\{x_n\}$ 是柯西列,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在的充要条件 存在定数 $\varepsilon_0>0$,对任意正整数 $N>0$,存在 $n,m>N$,满足

$$|x_m-x_n|\geqslant\varepsilon_0.$$

用数学符号简记为 $\exists\,\varepsilon_0>0,\forall\,N>0,\exists\,m,n>N$,使 $|x_m-x_n|\geqslant\varepsilon_0$.

例 用 $\varepsilon-N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{n}\right]$ 不存在.

证明 取 $\varepsilon_0=1,\forall\,N>0$,令 $n=N+1,m=N+2$,有

$$|x_m-x_n|=\left|(-1)^{N+1}+\frac{1}{N+1}-(-1)^{N+2}-\frac{1}{N+2}\right|\geqslant2-\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)>1,$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{n}\right]$ 不存在.

(5) 点列收敛和子点列收敛的关系 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在的充要条件是

$$\text{存在}\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\},\{x_{n'_k}\}\subset\{x_n\},\text{满足}\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\neq\lim_{k\to\infty}x_{n'_k}.$$

用数学符号简记为 $\exists\,\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\},\{x_{n'_k}\}\subset\{x_n\},\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\neq\lim\limits_{k\to\infty}x_{n'_k}$.

例 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\left[(-1)^n+\dfrac{1}{n^2+1}\right]$不存在.

证明 设 $x_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n^2+1}$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{4n^2+1}\right)=1$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[-1+\dfrac{1}{(2n+1)^2+1}\right]=-1$.这说明$\lim\limits_{n\to\infty}\left[(-1)^n+\dfrac{1}{n^2+1}\right]$不存在.

(6) **点列收敛的必要条件** 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,则$\{x_n\}$为有界点列.即存在 $M>0$,对任意 n,有$|x_n|\leqslant M$.

(7) **单调有界原理** 若$\{x_n\}$为单调有界点列,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

例 设 $a>0,x_0>0,x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\quad(n=0,1,2,\cdots)$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

证明 显然 $x_n>0\quad(n=0,1,2,\cdots)$.又

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_n}}=\sqrt{a}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

因此有

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\leqslant\frac{1}{2}(x_n+\sqrt{a})\leqslant\frac{1}{2}(x_n+x_n)=x_n\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

即点列$\{x_n\}$单调递减、下方有界.由单调有界原理知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$ 存在,且 $c\geqslant\sqrt{a}>0$.于是由等式

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\text{知}\,c=\frac{1}{2}\left(c+\frac{a}{c}\right),$$

解此方程得 $c=\sqrt{a}$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

(8) **数列极限运算的基本性质** 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 和$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在,则

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$.

在(c)中假设$\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0$.

(9) **数列的极限点** x_0 称为是$\{x_n\}$的极限点,如果存在子数列$\{x_{n_k}\}$使

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0.$$

点列$\{x_n\}$极限存在的充要条件是$\{x_n\}$的所有极限点相等.

(10) 极限的**夹逼定理**　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$，又

$$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \quad (n=1,2,\cdots),$$

则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c.$$

例　用夹逼定理证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = 1$.

证明　由不等式 $1 = \dfrac{1+1+\cdots+1}{n} < \dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} < \dfrac{\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = \sqrt[n]{n}$.

设 $x_n = 1$，$y_n = \sqrt[n]{n}$，有

$$x_n < \frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} < y_n,$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$，知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = 1$.

(11) 点列 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 单调递增上方有界，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单调递减下方有界，其极限存在，设其为 e. 即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \mathrm{e}.$$

e 有估计式，$\mathrm{e} = 1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{\theta_n}{n!\ n}$，$0<\theta_n<1$.

(12) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$x_n > 0$.

(13) 斯笃兹(Stolz)**定理**　设

(a) $y_{n+1} > y_n (n=1,2,\cdots)$；

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$；

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l$，

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = l = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

例　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = a$.

证明　令 $y_n = n$，$z_n = x_1+x_2+\cdots+x_n$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

斯笃兹定理是求数列极限非常有效的方法.

(14) 上、下极限的**定义**　设 $\{x_n\}$ 为有界点列，令 $a_n = \sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$，$b_n = \inf\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$，则有

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \cdots, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant \cdots$$

且$\{a_n\}$,$\{b_n\}$有界,于是$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$存在且$A \geqslant B$.我们称$A$,$B$分别为$\{x_n\}$的上、下极限.记为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = A = \lim_{n\to\infty} a_n, \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = B = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(15) 上、下极限的$\varepsilon - N$**定义**　设$\{x_n\}$为有界点列.

(a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = A$:

[1] 对于任意给定的$\varepsilon > 0$,存在$N > 0$,当$n > N \Rightarrow x_n < A + \varepsilon$;

[2] 存在正整数列$n_1 < n_2 < \cdots$,满足$x_{n_k} > A - \varepsilon$.用数学符号分别简记为

[1] $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \ni n > N \Rightarrow x_n < A + \varepsilon$;

[2] $\exists n_1 < n_2 < \cdots, \Rightarrow x_{n_k} > A - \varepsilon$.

(b) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = B$:

[1] 对于任意给定的$\varepsilon > 0$,存在$N > 0$,当$n > N \Rightarrow x_n > B - \varepsilon$;

[2] 存在正整数列$n_1 < n_2 < \cdots$,满足$x_{n_k} < B + \varepsilon$.用数学符号分别简记为

[1] $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \ni n > N \Rightarrow x_n > B - \varepsilon$;

[2] $\exists n_1 < n_2 < \cdots, \Rightarrow x_{n_k} < B + \varepsilon$.

(16) 若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = A$,$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = B$,则存在$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$,$\{x_{n'_k}\}$满足

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A, \lim_{k\to\infty} x_{n'_k} = B.$$

(17) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在的充要条件　$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

数列的上、下极限的定义对处理数学分析中的极限问题有时起着事半功倍的作用.上、下极限与极限的最大不同在于它总是存在的.关于上、下极限的应用见后面的例题.

二、函数的定义

(1) 函数定义　设$D \subseteq \mathbf{R}$是实数集,如果对每个$x \in D$,按照某种对应关系f,有惟一确定的实数y与之对应,则称D与f确定一个函数(D,f).D称为函数(D,f)的定义域,对$x \in D$,记$y = f(x)$称为函数(D,f)在x点的值.在一般情况下,用$y = f(x)$表示函数.

(2) 函数图像　设(D,f)是函数,称平面点集

$$\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

为函数(D,f)的图像.

(3) 反函数　设(D,f)是函数,用

$$R = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

表示函数的值域.称 $y=f(x)$ 的对应关系是一对一的,如果对于任意 $x_1\neq x_2$,$x_1,x_2\in D$,有 $f(x_1)\neq f(x_2)$.这时对任意的 $y\in R$,有惟一的 $x\in D$ 与之对应,使得 $y=f(x)$.这样就确定了在 R 上定义的新函数 (R,g),称为 (D,f) 的反函数,记为

$$x=f^{-1}(y),y\in R.$$

此时有 $y=f(x)=f(f^{-1}(y)),y\in R.x=f^{-1}(y)=f^{-1}(f(x))$.

(4) 周期函数　设函数 $y=f(x)$ 在实直线上有定义,T_0 是一正数,若对任意 $x\in\mathbf{R}$,有

$$f(x+T_0)=f(x),$$

则称 $y=f(x)$ 为以 T_0 为周期的周期函数,T_0 称为 $y=f(x)$ 的一个周期,如果存在 $T_1>0$ 是使上式成立的最小正数,则称 T_1 为 $y=f(x)$ 的最小正周期.

(5) 复合函数　设 (D,f),(U,g) 是两个函数,且 $R=f(D)\subseteq U$,由此对任意的 $x\in D$,有惟一确定 $y=f(x)\in R\subseteq U$ 与之对应,于是对此 $y\in U$,有惟一确定的 $z=g(y)$ 与之对应,这就得到新的函数 $z=g(f(x)),x\in D$ 称为 g,f 的复合函数.复合函数是数学分析中比较重要的函数概念,有关初等函数的定义及求导运算和积分运算都涉及了复合函数.

(6) 凸函数

(a) 设 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对于任意 $x,y\in I,t\in(0,1)$ 有

$$f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y),$$

则称 $y=f(x)$ 为区间 I 上的凸函数或称其在区间 I 上是凸的.若不等式严格成立,则称 $y=f(x)$ 为区间 I 上的严格凸函数或称其在区间 I 上是严格凸的.凸函数的另一表达形式是对于任意的 $x<y<z(x,y,z\in I)$,有

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leqslant\frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

(b) 若对于任意 $x,y\in I,t\in(0,1)$ 有

$$f(tx+(1-t)y)\geqslant tf(x)+(1-t)f(y),$$

则称 $y=f(x)$ 为区间 I 上的凹函数或称其在区间 I 上是凹的.若不等式严格成立,则称 $f(x)$ 为区间 I 上的严格凹函数或称其在区间 I 上是严格凹的.凹函数的另一表达形式是对于任意的 $x<y<z(x,y,z\in I)$,有

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\geqslant\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\geqslant\frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

凸函数是数学分析中相当重要的函数概念,有关凸函数的性质的研究是数学分析中重要的问题之一,不但其主要结果在数学和其他学科得到了广泛的应用,而且数学分析中相当多的重要不等式就是利用凸函数的性质得到的.

(7) 函数的确界与振幅　设 $y=f(x)$ 是有界函数,即存在常数 m、M,使得

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, x \in D,$$

我们称

$$m_* = \inf_{x \in D} f(x), M^* = \sup_{x \in D} f(x)$$

为 $y = f(x)$在 D 上的下确界与上确界，称

$$\omega = M^* - m_* = \sup_{x \in D} f(x) - \inf_{x \in D} f(x)$$

为 $y = f(x)$在 D 上的振幅，记为 $\omega = \omega(f, D)$.

(8) 几个重要的特殊函数

(a) 振荡函数

$$y = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(b) 黎曼函数

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & x = \dfrac{m}{n}, m > 0, \\ 1, & x = 0, \\ 0, & x = \text{无理数}. \end{cases}$$

(c) 狄利克雷函数

$$y = \begin{cases} 1, & x = \dfrac{m}{n}, m \geqslant 0, \\ 0, & x = \text{无理数}. \end{cases}$$

(d) 符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

三、函数极限

(1) 函数 $f(x)$当 x 趋于x_0 以 A 为极限的**定义**　对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$,则称函数 $f(x)$当 x 趋于 x_0 以 A 为极限，记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.用数学符号简记为

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

例　证明$\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

证明　$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$,当 $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |\sin x - 0| = |\sin x| \leqslant |x| < \varepsilon$.

(2) 函数 $f(x)$当 x 趋于x_0 不以 A 为极限的**定义**　存在定数 $\varepsilon_0 > 0$,对任

意 $\delta>0$,存在 x_δ,满足 $0<|x_\delta-x_0|<\delta$,且 $|f(x_\delta)-A|\geqslant\varepsilon_0$.用数学符号简记为

$$\exists\,\varepsilon_0>0,\ \forall\,\delta>0,\ \exists\,x_\delta,\ 0<|x_\delta-x_0|<\delta,\ |f(x_\delta)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的柯西收敛准则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充要条件是:

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta,0<|y-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.用数学符号简记为

$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta,0<|y-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在的充要条件是存在定数 $\varepsilon_0>0$,对任意 $\delta>0$,存在 x_δ,y_δ,满足 $0<|x_\delta-x_0|<\delta,0<|y_\delta-x_0|<\delta$,且 $|f(x_\delta)-f(y_\delta)|\geqslant\varepsilon_0$.用数学符号简记为 $\exists\,\varepsilon_0>0,\forall\,\delta>0,\exists\,x_1,x_2$ 满足 $0<|x_\delta-x_0|<\delta,0<|y_\delta-x_0|<\delta$ 且 $|f(x_\delta)-f(y_\delta)|\geqslant\varepsilon_0$.

上述结论等价于:存在定数 $\varepsilon_0>0$,点列 $\{x_n\},\{y_n\},x_n,y_n\neq x_0$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$,且

$$|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0.$$

例 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明狄利克雷函数

$$y=\begin{cases}1, & x=\dfrac{m}{n},m\geqslant 0,\\ 0, & x=\text{无理数}.\end{cases}$$

在 $x=0$ 处不连续.

证明 取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$,令 $x_n=\dfrac{1}{n},y_n=\dfrac{\pi}{n}$,点列 $x_n,y_n\neq0$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,且

$$|f(x_n)-f(y_n)|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

(5) 数列极限与函数极限的关系:

海伦定理 函数 $f(x)$当 x 趋于 x_0 以 A 为极限的充要条件是对于任意点列 $\{x_n\},x_n\neq x_0$,只要 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,就有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.用数学符号简记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\,\{x_n\},x_n\neq x_0,\lim_{n\to\infty}x_n=x_0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

函数 $f(x)$当 x 趋于 x_0 极限存在的充要条件是对于任意点列 $\{x_n\},x_n\neq x_0$,只要 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,就有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$存在.用数学符号简记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\text{存在}\Leftrightarrow\forall\,\{x_n\},x_n\neq x_0,\lim_{n\to\infty}x_n=x_0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n)\text{存在}.$$

海伦定理为处理某些函数极限提供了新的方法,即利用数列极限来讨论函