21世纪警官高等教育系列教材

高等数学

主编　李排昌　石瑞民

中国人民公安大学出版社

21世纪警官高等教育系列教材

高等数学

主编 李排昌 石瑞民

中国人民公安大学出版社

·北 京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/李排昌，石瑞民主编.—北京：中国人民公安大学出版社，2004.2

（21世纪警官高等教育系列教材）

ISBN 7-81087-637-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①李…②石… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第001847号

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编 李排昌 石瑞民

出版发行：中国人民公安大学出版社
地　　址：北京市西城区木樨地南里
邮政编码：100038
经　　销：新华书店
印 刷 厂：河北省抚宁县印刷厂

版　　次：2004年2月第1版
印　　次：2004年10月第2次
印　　张：8.25
开　　本：850毫米×1168毫米 1/32
字　　数：202千字
印　　数：1001~4000册

ISBN 7-81087-637-6/G·166
定　　价：16.00元

E-mail：cpep@public.bta.net.cn

高 等 数 学

主　编　李排昌　石瑞民
副主编　王云鹤　徐　毅　高朋香
　　　　熊允发　左　萍　蔡　瑾

前　　言

在如火如荼的高等教育改革中，教学改革是核心，而教学内容和课程体系改革又是难点。作为教学内容改革的组成部分，教材内容的整合与更新的重要性不言而喻。

公安大学现行本科专业公安业务教材基本上是20世纪90年代初编写的。这些教材在确立公安学科的地位，培养合格人才以及指导公安工作实践等方面曾发挥过重要作用。然而，形势的发展使得这些教材必须修订或重新编写。其一，在1999年6月召开的第三次全国教育工作会议上，党中央和国务院作出了《关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》。1999年11月，第二次全国公安教育工作会议就深化公安教育改革、全面实施素质教育作出了新的部署。我们的教材建设必须在此基础上重新定位。其二，我校许多课程的教材涉及法律问题，而近十年来，我国颁布和修订的法律比较多，教材的编写和修订必须与新的法律相一致。其三，我国正处于计划经济向社会主义市场经济转型时期，社会生活变化迅猛，公安机关面临的斗争形势非常严峻，而我们的理论却跟不上形势发展，有些理论严重滞后公安工作实际，无法指导公安工作实践，必须予以修正。鉴于此，公安大学党委适时作出决定，编写这套“21世纪警官高等教育系列教材”。

此次教材的编写与修订，将贯彻以下指导思想：从注重知识传授向重视能力培养转化；既充分反映当前公安工作和队伍建设的实际，贴近警务实践，又要具有前瞻性、预见性；从实践中来，又高于实践，形成比较科学、完整的体系，做到理论性、科

学性与较强的针对性、实用性的统一。

本套教材将注重“高水平”与“适用性”的有机结合，突出编写质量和社会效益。首先，编写工作将以我校在全国公安系统具有影响的学科带头人领衔，邀请各级公安部门业务领导、专家和骨干参加，形成实力强大的编写阵容。其次，在教材编写过程中，将注意吸收改革开放以来我国公安理论研究的最新学术成果，关注国际学术发展最新动向，使教材内容站在21世纪初的学术前沿。再次，针对本科教学和新时期本科学生的特点，将学术性、新颖性、可读性有机结合起来，注意运用比较生动的案例、简明流畅的语言阐释理论。最后，按照“编审分离”原则，聘请学术造诣高、实践经验丰富的学者、专家审稿，严把教材编写质量关。

我们期望并相信，经过编写者、审稿者、出版者的共同努力，这套21世纪公安业务新教材将以其质量高和特色鲜明而成为新世纪奉献给读者们的精品。

中国人民公安大学
教材编审委员会
2003年12月

编者的话

本教材是为我校公安科技及管理类专业的高等数学课程所编写的。全书共八章，前五章介绍极限、导数及其应用、积分及其应用等内容，第六章介绍多元函数的微积分，第七章介绍微分方程，第八章介绍无穷级数。

在本教材的编写中，我们严格按照高等数学教学大纲要求，既注意理论的严谨性与先进性以及结构体系的逻辑性与完整性，又兼顾了易教易学的特点。

参加本教材编写、讨论修改、审阅校对工作的有李排昌（第一章、第八章）、王云鹤（第二章、第三章）、石瑞民（第四章、第五章）、高朋香（第六章）、徐毅（第七章）以及熊允发、左萍、蔡瑾。本书由李排昌、石瑞民任主编，王云鹤、徐毅、高朋香、熊允发、左萍、蔡瑾任副主编。

由于编者水平所限，本教材不足之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编者

2003 年 12 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

高等数学的内容主要包括一元及多元的微积分和作为其理论基础的极限理论。由于构成高等数学的主体是一元及多元的微积分，所以也称高等数学为微积分。

微积分研究什么样的问题？使用什么样的方法？它同初等数学有什么联系和区别？所有这些问题，无疑都是大家开始学习这门课时所关心的问题。这一章，作为这门课程的理论基础，会初步说明这些问题，同时还要简要地复习一下已在中学学过而又为学习本课程所必须的内容，引入一些基本概念，为以后学习各章做准备。

§1.1　函数

一、变量与区间

高等数学主要研究变量和变量之间的依赖关系。

所谓**变量**，就是变化着的量，可以变动的量，说得更详细一点，就是在某一过程中可以取不同的值的量。一般用 x，y，…表示。

正如把静止看成运动的特例一样，我们也把常数看成一种特殊的变量，即在所考查的过程中，始终只取同一数值的变量。

变量的每一个值都是一个数，所有这些数所构成的数集，称为这个变量的**变域**。

在许多情形中，变量的变域都是一个**区间**。区间分以下几类：

设 a、b 为实数，且 $a<b$。

（1）满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的开区间，记做（a，b），见图 1－1，

即 $$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}。$$

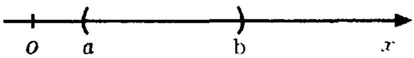

图 1－1

（2）满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的闭区间，记做 $[a, b]$，见图 1－2，

即 $$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}。$$

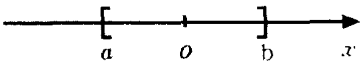

图 1－2

（3）满足不等式 $a<x \leqslant b$（或 $a \leqslant x<b$）的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的半开区间，记做 $(a, b]$（或 $[a, b)$），分别见图 1－3 和图 1－4，

即 $$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\},$$
$$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}。$$

图 1－3

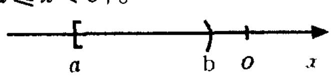

图 1－4

以上三类区间为有限区间。有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$ 称为区间的长度。

还有下面几类无限区间：

(4) $(a, +\infty) = \{x \mid a < x\}$,

$[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x\}$。

(5) $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$,

$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$。

(6) $(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$,

即全体实数的集合。

在微积分中还常常用到 x_0 的 δ **邻域**

$$(x_0-\delta, x_0+\delta) = \{x \mid |x-x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

和 x_0 的**去心 δ 邻域**

$$\{x \mid 0 < |x-x_0| < \delta, \delta > 0\}。$$

x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。

二、函数的概念

在同一个问题中，往往同时出现好几个变量，而这些变量又往往是相互联系、相互依赖的。微积分学不是孤立地研究每一个变量，而是着重研究变量之间的确定的依赖关系。变量之间的这种确定的依赖关系，就叫做函数。

例 1　关系式

$$y = x^2$$

表出了抛物线上点 (x, y) 的两个坐标之间的依赖关系（如图 1 - 5)。

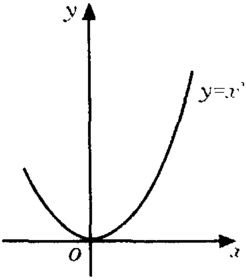

图 1 - 5

例 2　某市出租车载客运价为：在 4 公里内，一律收费 10 元；超过 4 公里后，超过部分每公里收费 1.6 元。则运费 y（元）和里程 x（公里）之间可由下述公式表出

$$y=\begin{cases}10 & 0<x\leqslant 4\\ 10+1.6\times(x-4) & x>4。\end{cases}$$

在以上例子中，撇开各自的表达形式，其共同的本质是：一个变量取定了一个数值，按照某种确定的对应关系，就可以求得另一个变量的一个相应的值。函数的一般概念正是这样抽象出来的。

1. 函数的定义

定义 1 设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变域为 D。如果对于 D 中每一个值 x，按照某一种确定的对应关系，都可以确定变量 y 的一个相应值，我们就说变量 y 是变量 x 的一个函数，记为

$$y=f(x),\quad x\in D。\tag{1.1}$$

x 称为**自变量**，y 称为**因变量**。

（1）函数关系表达式

函数 $y=f(x)$ 中的"f"代表从变量 x 到变量 y 的对应关系，称为**函数关系**。函数 $f(x)$ 通常是一个或不同区间上的几个含变量 x 的数学公式（或称**表达式**）。当自变量 x 取一定值时，因变量 y 的相应值，叫做**函数值**。当 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$的值记为 $f(x_0)$ 或$y|_{x=x_0}$。例如，对例 1 中的函数

$$y=f(x)=x^2,\quad y|_{x=2}=f(2)=4。$$

对于例 2 中的**分段函数**（不同区间上是不同的表达式）

$$y=f(x)=\begin{cases}10 & 0<x\leqslant 4\\ 10+1.6\times(x-4) & x>4,\end{cases}$$

$$y|_{x=2}=f(2)=10,$$

$$y|_{x=20}=f(20)=10+1.6\times(20-4)=35.6。$$

（2）函数的定义域和值域

在函数定义中，自变量的变域 D 称为函数的**定义域**。定义域通常为一个或几个区间。对于 D 中每一个值 x，都对应一个确

定的函数值；所有函数值的全体，叫做函数的**值域**，它就是因变量的变域。

在实际问题中，函数的定义域根据实际意义来确定。例如，在例 1 中是 $-\infty < x < +\infty$，相应的值域显然是 $0 \leqslant y < +\infty$。

以后，当我们只是在数学上一般地研究某一个由具体表达式所规定的函数关系时，函数的定义域则由表达式本身确定。例如 $y=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $-\infty < x < 0$ 和 $0 < x < +\infty$；函数

$$y=\frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

只在 $x=1$ 和 $x=2$ 没有定义；函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 只在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上有定义。

例 3 确定函数 $y=\frac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域。

解 当 $3x-2>0$ 且 $3x-2 \neq 1$ 时，即 $x>\frac{2}{3}$ 且 $x \neq 1$ 时，$\frac{1}{\lg(3x-2)}$ 才取确定实数，因此，$y=\frac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域为

$$D=\left(\frac{2}{3},\ 1\right) \cup (1,\ +\infty)。$$

有一种很特殊而又很重要的函数，其定义域 D 是全体正整数 1，2，…，n，…，因而它的函数值就依次是 $y_1=f(1)$，$y_2=f(2)$，…，$y_n=f(n)$，…。这种定义在全体正整数上的函数，特别称之为**数列**或**数值序列**，并且记为 y_n 或

$$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots。$$

例如

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots,$$

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots,$$

$$0, 1, 0, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1+(-1)^n}{n}, \cdots, \tag{1.2}$$

等等，都是数列的例子。

2. **函数的图形**

一般地说，如果 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的一个函数。在平面上引进直角坐标系 Oxy，对于 D 中的每一个 x，都可确定出平面上一点 $M(x, y)$，其中 $y=f(x)$，让 x 取遍 D 中所有值，点 $M(x, y)$ 便形成平面上的一个图形，这个图形称为函数 $y=f(x)$ 的图形。函数 $y=f(x)$ 的图形通常为一条曲线（见图 1-6）。

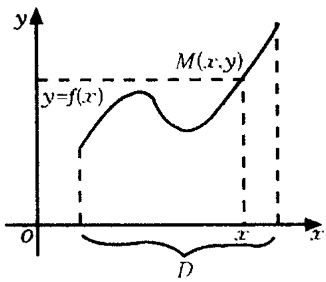

图 1-6

3. **反函数，复合函数**

（1）反函数

定义 2 设给定一个函数 $y=f(x)$。如果对于值域 R 中的每一个 y 的值，都可由关系 $y=f(x)$ 确定惟一的一个 x 的值，则得到定义在 R 上的以 y 为自变量、x 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$，称之为 $y=f(x)$ 的**反函数**。

习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量。因此我们将 $x=\varphi(y)$ 改写为以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数关系 $y=\varphi(x)$，这时我们说 $y=\varphi(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数。

$y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 的关系是 x 与 y 互换，所以它们的图形是对称于直线 $y=x$ 的，如图 1-7。

例 4 求 $y=3x-1$ 的反函数。

解 由 $y=f(x)=3x-1$ 可以求出

$$\begin{aligned} x &= \varphi(y) \\ &= \frac{y+1}{3}。\end{aligned}$$

将上式中的 x 换成 y，将 y 换成 x，因此得出 $y=3x-1$ 的反函数是 $y=\frac{x+1}{3}$，如图 1-8。

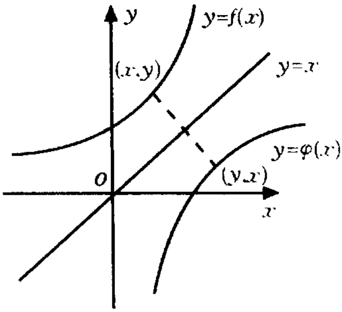

图 1-7

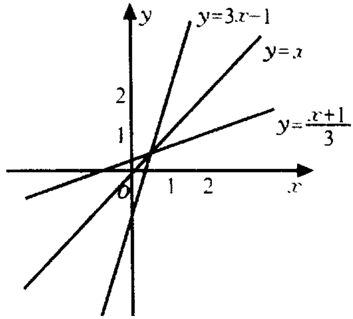

图 1-8

（2）复合函数

定义 3　已知函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为**复合函数**。x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量。

例如　由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2+1$ 构成复合函数 $y=\sqrt{x^2+1}$。

三、函数的几种简单性质

1. 函数的奇偶性

定义 4　给定函数 $y=f(x)$，$x\in D$。

（1）如果对所有的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**。

（2）如果对所有的 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**。

对于偶函数，因 $f(-x)=f(x)$，所以，点 $P(x, f(x))$ 如果在图形上，则与它对称于 y 轴的点 $P'(-x, f(x))$ 也在图