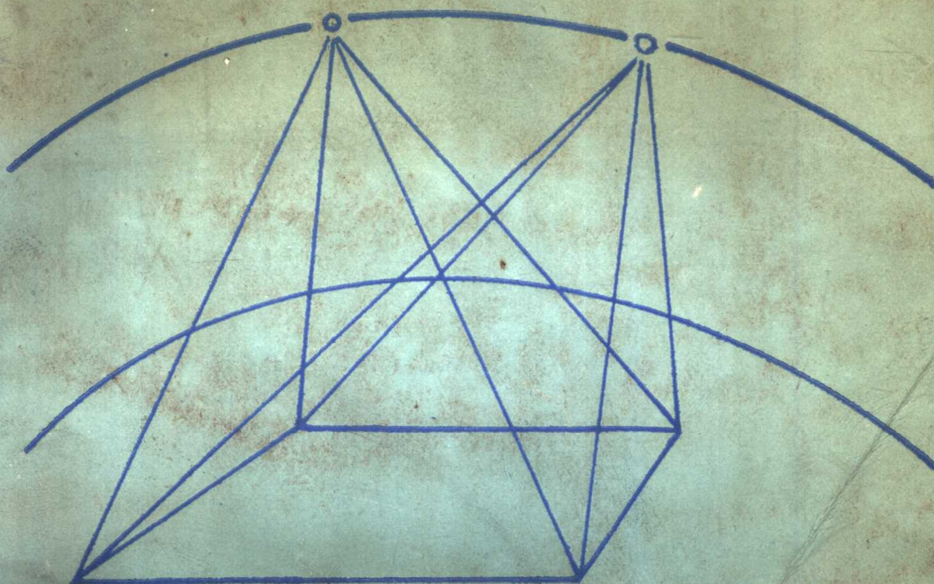
高等学校教学参考书



卫星大地测量原理

李庆海　崔春芳

测绘出版社

卫星大地测量原理

高等学校教学参考书

卫星大地测量原理

李庆海　崔春芳

测绘出版社

内 容 提 要

本书系统介绍了人造卫星的经典轨道理论及其在大地测量等领域的应用。内容丰富，文字通畅。本书可作为高等学校大地测量专业的教学参考书，也可供有关专业的工程技术人员参考。

高等学校教学参考书

卫星大地测量原理

李庆海　崔春芳

测绘出版社出版
测绘出版社印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行

开本 787×1092 1/16 印张25 字数570千字
1989年6月第一版 1989年6月第一次印刷
印数 0,001—2,000册 · 定价 5.00 元
ISBN 7-5030-0263-8/P·101

前　言

这是一本为大地测量工作者编写的关于人造卫星轨道理论及其在大地测量中应用的教学参考书。自从第一颗人造卫星被送上预定的轨道以来，卫星技术在科学技术的各个领域，包括大地测量这个领域中的应用，已经取得了十分重要的进展。有关文献资料的数量也与日俱增。大地测量这门古老科学的面貌，因而发生了深刻的变化。为了掌握人造卫星测地的理论和方法，除了通晓大地测量的知识以外，还需要了解人造卫星的运动规律、轨道理论，以及应用人造卫星大地测量技术能够解决问题的种类、数学模型及计算方法。因此，编写一本人造卫星轨道理论入门书，以在大地测量的传统教科书和卫星大地测量的浩瀚文献之间架设一座桥梁，看来是十分必要的。为此，李庆海于 1975 年编写了一本讲义——《人造地球卫星轨道原理(一)》。今由崔春芳对该讲义进行补充、修订即成了本书的主要内容。最后李庆海增添了人卫测地若干方面的应用例子及问题。

下面就本书的取材和编排，作几点说明：

一、头两章属于理论力学和天体力学的内容。我国高等学校测绘专业的教学计划中，还没有天体力学课程，理论力学的教学时数也很少。这里扼要地介绍了有关的知识，为后面的讨论打下基础。对这两门课程不熟悉的读者，可以通过阅读，顺利地进入主题。

二、第三章属于地球外部引力场的数学理论。这里主要介绍了引力位的球函数展开理论。它是人造卫星摄动理论的基础，也是动力法卫星大地测量的理论基础。

三、各种摄动理论中，我们只介绍了比较成熟、便于应用的那些。一些新的、较为复杂的理论没有包括进来，这是由本书的性质决定的。所介绍的这些理论，是由不同的研究者分别发展起来的，散见于杂志、文章和学术会议报告。本书用统一的观点加以论述，并补充了我们自己的意见和结论。掌握了这些一般方法后，对更为复杂的摄动理论是不难理解的。

四、关于轨道理论在大地测量中的应用，本书说明了测定测站坐标、轨道位置，地球引力位各种球谐函数，及其他摄动力公式系数的原理和计算方法，包括卫星轨道数值积分计算的公式。书中列举了美国航空航天局（NASA）所属戈达德空间飞行中心的戈达德地球模型的计算，这是人们常见的和认为较好的地球模型，读者由此可知这种计算的概要。但如要应用于实际，还需仔细研究和探讨。

五、叙述方式力求简明通俗，反复阐明物理意义，以便于读者理解。同时又保持了推理的严密性。对于愿意对所讨论课题进行深入研究的读者，明确的概念和严密的推理，二者都是必不可少的。

六、为了理解所涉及的内容，某些纯数学的叙述是不可避免的。如果把这些叙述放在正文里，可能显得累赘，分散读者对主题的注意力。为保持正文的连贯性，便于阅读，我们将这样的叙述作为附录，放在书末。

本书部分内容，曾在卫星大地测量专业研究生的有关课程的教学中试用，并根据试用情况，作了调整。

本书的理论部分和应用部分不是在短期内写完的，也不是一位著者编写的。应用部分中涉及范围较广。在这种情况下，书中所用符号、事物名称、名词、表达方式可能略有不同，但在同一章中应自相符合，请读者在使用本书时注意。

本书编写过程中，曾得到崔炳光、管泽霖、张范荪、唐上达、张儒杰、施品浩诸同志各方面的帮助，对此我们表示感谢。对本书审阅者唐昌先和周江文等教授、专家所提意见和评语，表示敬佩和感谢。陈春明同志曾对第十～十二章做过认真的校核，在此一并致谢。

由于编者水平有限，实际工作做得不多，书中缺点错误在所难免。我们恳望大地测量界的同事们和读者们批评指正。

编　　者

1986年3月于武汉

目　录

第一章　二体问题的椭圆运动

§1.1　引　　言

人造卫星进入自由飞行阶段后，成为人造天体，它的运动服从天体力学的基本规律。天体力学为人造卫星运动的研究提供了基础理论和方法，人造卫星的轨道理论是天体力学的一个新的分支。为了掌握人造卫星的轨道理论，熟悉天体力学的基本知识是必要的，因此，作为本书的开头，我们在第一章和第二章概要地介绍天体力学最基础的部分，为下面的叙述作一准备。

行星的椭圆运动是由刻普勒（Kepler,Johannes 1571—1630，德）进行了长期观测，并对观测资料进行整理，又由牛顿（Newton，Isaac 1642—1727，英）给予动力学解释而确定的，可以称它为刻普勒-牛顿运动。刻普勒和牛顿对行星椭圆运动的研究，奠定了现代天体力学的基础。

刻普勒接受了哥白尼（Koppernigk，Nikolaus 1473--1543，波）的思想，认为地球和行星绕太阳运动。他从他的老师第谷·布拉赫（Tycho,Brahe 1546—1601，丹麦）和他本人的大量观测资料中总结出了著名的**刻普勒行星运动三定律**：

行星在通过太阳的平面内运动，其向径扫过的面积与所经历的时间成正比——刻普勒第一定律；

行星轨道为一椭圆，太阳位于此椭圆的一个焦点上——刻普勒第二定律；

对于所有绕太阳运动的行星，它们的运动（公转）周期之平方与椭圆轨道半长轴之立方的比值为一常数——刻普勒第三定律。

牛顿为了以他的运动定律来解释刻普勒所描述的行星运动，提出了万有引力定律：

宇宙中每两个质点总是相互吸引的。吸引力的大小正比于此两质点的质量的乘积，而反比于它们之间的距离之平方。

大量的物理学实验和天文观测证明，牛顿的万有引力定律普遍地适用于宇宙中的宏观物体。在微观世界，只要原子之间的距离充分大，它们之间也有牛顿引力相互作用。天体的运动，主要受这种引力的支配。

§1.2　动力学基本方程

牛顿的运动定律可表述如下：

（1）每个质点保持其静止或匀速直线运动状态，直到作用在它上面的力使它改变这种状态；

（2）质点动量的改变率等于作用在它上面的力；

（3）两质点相互作用时，第一个质点作用于第二个质点的力与第二个质点作用于第一个质点的力，大小相等而方向相反。

在把牛顿定律应用到具体问题之前，应明确以下几个问题：

首先，运动总是相对于某一个参考系而言的，牛顿定律只对一定的参考系适用。可以应用牛顿定律的参考系称为惯性系，或牛顿参考系。互相作匀速直线运动的若干参考系，如果其中一个是惯性系，则它们之中的每一个都是惯性系。互相作变速运动的两个参考系中，如果有一个是惯性系，则另一个就不可能是惯性系。日心恒星参考系是很理想的惯性系。地球绕太阳运动，地心对日心的（向心）加速度 $a \approx A\omega^2 \approx 0.15 \times 10^{14} \times \left(\frac{2\pi}{3.15 \times 10^7}\right)^2 \approx 0.16 \mathrm{cm/s^2}$。其中$A$为日地平均距离，$\omega$为地心绕日心的平均角速度。可以看到，这个加速度与地面的重力加速度 $g = 980 \mathrm{cm/s^2}$ 相比是很小的。因此在研究近地空间内的运动时，地心参考系也可被近似地看作惯性系。

其次，作用于一质点的力可以有不同的来源，即可以有几个力同时作用于一个质点。在这种情况下，应用牛顿定律时，这几个力可用一个力——它们的合力来代替。力的合成符合平行四边形法则，即符合向量的加法定律。因此，以后我们总是把力作为向量来运算。

质点的位置、速度和加速度也是向量。在参考系中任取一固定点（原点）o，质点m的位置可用向量$\vec{r} = \overrightarrow{om}$表示（图 1-1）。$\vec{r}$称为质点对$o$点的位置向量或向径。向量$\vec{r}$的长度$r = |\vec{r}|$就是质点到$o$点的距离，它也称为向径。质点的速度定义为向径$\vec{r}$对时间的导数，它也是向量，即

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

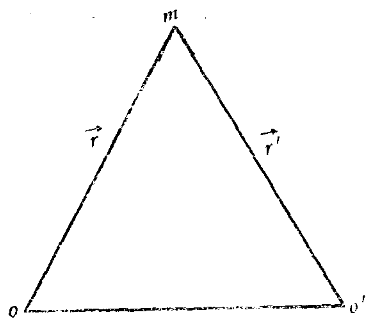


图 1-1

字母上的一点表示对时间的导数。可以看到，质点的向径与原点的选取有关，而它的速度则与原点选取无关。图 1-1 中点o和o'都是固定点，分别以这两点作原点时，质点m的向径分别为$\vec{r}$和$\vec{r'}$，由图可知

$$\vec{r} = \overrightarrow{oo'} + \vec{r'}$$

等式两边对时间取导数，由于$\overrightarrow{oo'}$是固定向量，它的导数为零，我们有

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r'}}$$

质点的动量定义为它的质量和速度的乘积，即

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$$

它也是向量。动量的改变率是向量$\vec{p}$对时间的导数。如果质量m为常数，则

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a}$$

字母上的两点表示对时间的二次导数，$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}$为质点的加速度，它也是向量。在此情形下，如果以$\vec{F}$表示作用在质点上的力，则牛顿第二定律可以写成

$$\dot{\vec{p}}=m\ddot{\vec{r}}=\vec{F} \tag{1.2.1}$$

如果没有任何力作用于所论质点，或者作用于其上的诸力之合力为零，即

$$m\ddot{\vec{r}}=0$$

则通过简单的积分可以得到，质点静止或作匀速直线运动。由此可以看到，牛顿第一定律是第二定律的特殊情形。

方程(1.2.1)是三维空间的向量方程。三维空间向量的运算，可以通过将它们投影到三个互相垂直的方向来进行，这就是笛卡儿坐标的概念。引进直角坐标系o-xyz，沿三个互相垂直的坐标轴的单位向量以$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$表示，于是

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

x、y、z为质点向径的三个分量，也称为质点的坐标。我们假设坐标系对于参考系是固定的，$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$不随时间变化，于是，上式对时间取导数，有

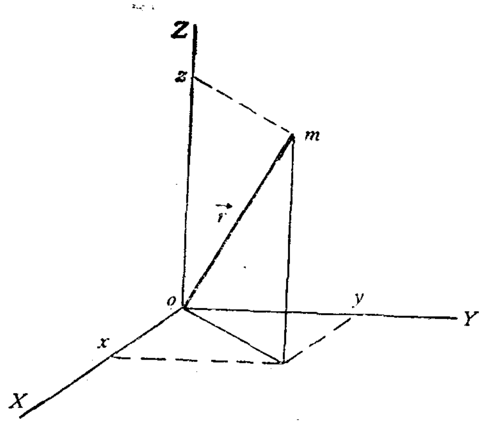


图 1-2

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}&=\dot{\vec{r}}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}\\ \vec{a}&=\ddot{\vec{r}}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}\end{aligned}\right\}$$

速度和加速度的分量分别为$\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$和$\ddot{x}$、$\ddot{y}$、$\ddot{z}$。再以F_x、F_y、F_z表示力$\vec{F}$的三个分量，则方程（1.2.1）可以写成三个分量方程：

$$\left.\begin{aligned}m\ddot{x}&=F_x\\ m\ddot{y}&=F_y\\ m\ddot{z}&=F_z\end{aligned}\right\} \tag{1.2.2}$$

引进球坐标（图 1-3）r、λ、θ，有

$$\left.\begin{aligned}x&=r\sin\theta\cos\lambda\\ y&=r\sin\theta\sin\lambda\\ z&=r\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{1.2.3}$$

其中r为向径，θ为极距，λ为经度。θ与纬度ϕ互为余角，又称余纬度。以$\vec{r}_0$、$\vec{\theta}_0$、$\vec{\lambda}_0$表示r、θ和λ增加方向的单位向量，于是，质点向径为

$$\vec{r}=r\vec{r}_0$$

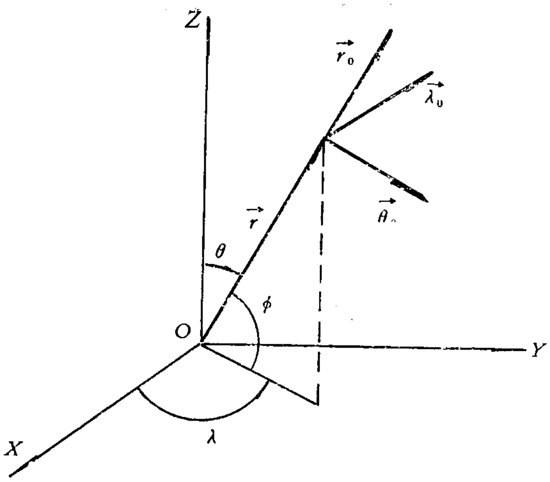


图 1-3

由附录 I（31）式，$\vec{r}_0$、$\vec{\theta}_0$、$\vec{\lambda}_0$与$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$之间的变换关系为

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}_0 &= \sin\theta\cos\lambda\,\vec{i}+\sin\theta\sin\lambda\,\vec{j}+\cos\theta\,\vec{k}\\ \vec{\theta}_0 &= \cos\theta\cos\lambda\,\vec{i}+\cos\theta\sin\lambda\,\vec{j}-\sin\theta\,\vec{k}\\ \vec{\lambda}_0 &= -\sin\lambda\,\vec{i}+\cos\lambda\,\vec{j}\end{aligned}\right\}\tag{1.2.4}$$

这一组单位向量是随质点的位置，即随r、θ和λ而变化的。利用（1.2.4）式对时间取导数，即得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_0 &= \dot{\theta}\,\vec{\theta}_0+\dot{\lambda}\sin\theta\,\vec{\lambda}_0\\ \dot{\vec{\theta}}_0 &= -\dot{\theta}\,\vec{r}_0+\dot{\lambda}\cos\theta\,\vec{\lambda}_0\\ \dot{\vec{\lambda}}_0 &= -\dot{\lambda}\sin\theta\,\vec{r}_0-\dot{\lambda}\cos\theta\,\vec{\theta}_0\end{aligned}\right\}\tag{1.2.5}$$

由此可求得质点速度的球坐标表达式：

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\frac{d}{dt}(r\vec{r}_0)=\dot{r}\vec{r}_0+r\dot{\vec{r}}_0=\dot{r}\vec{r}_0+r\dot{\theta}\vec{\theta}_0+r\dot{\lambda}\sin\theta\vec{\lambda}_0$$

此处用了方程组（1.2.5）的第一式。于是，速度在$\vec{r}_0$、$\vec{\theta}_0$和$\vec{\lambda}_0$方向的分量为

$$\left.\begin{aligned}v_r &= \dot{r}\\ v_\theta &= r\dot{\theta}\\ v_\lambda &= r\dot{\lambda}\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{1.2.6}$$

质点加速度为

$$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\lambda}^2\sin^2\theta)\vec{r}_0+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\lambda}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{\theta}_0$$
$$+(r\ddot{\lambda}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\lambda}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\lambda}\cos\theta)\vec{\lambda}_0$$

此处利用了(1.2.4)和(1.2.5)式。加速度分量为

$$\begin{aligned}a_r &= \ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\lambda}^2\sin^2\theta\\ a_\theta &= r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\lambda}^2\sin\theta\cos\theta\\ a_\lambda &= r\ddot{\lambda}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\lambda}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\lambda}\cos\theta\end{aligned}\tag{1.2.7}$$

以F_r、F_θ和F_λ分别表示力$\vec{F}$的相应分量，即得方程(1.2.1)的球坐标形式：

$$\left.\begin{aligned}
&m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\lambda}^2\sin^2\theta)=F_r\\
&m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\lambda}^2\sin\theta\cos\theta)=F_\theta\\
&m(r\ddot{\lambda}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\lambda}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\lambda}\cos\theta)=F_\lambda
\end{aligned}\right\}\tag{1.2.8}$$

有时用纬度ϕ代替极距θ较为方便，此时与(1.2.3)～(1.2.8)各式相对应，有

$$\left.\begin{aligned}
x&=r\cos\lambda\cos\phi\\
y&=r\sin\lambda\cos\phi\\
z&=r\sin\phi
\end{aligned}\right\}\tag{1.2.9}$$

$$\left.\begin{aligned}
\vec{r}_0&=\cos\lambda\cos\phi\,\vec{i}+\sin\lambda\cos\phi\,\vec{j}+\sin\phi\,\vec{k}\\
\vec{\lambda}_0&=-\sin\lambda\,\vec{i}+\cos\lambda\,\vec{j}\\
\vec{\phi}_0&=-\cos\lambda\sin\phi\,\vec{i}-\sin\lambda\sin\phi\,\vec{j}+\cos\phi\,\vec{k}
\end{aligned}\right\}\tag{1.2.10}$$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}_0&=\dot{\lambda}\cos\phi\,\vec{\lambda}_0+\dot{\phi}\,\vec{\phi}_0\\
\dot{\vec{\lambda}}_0&=-\dot{\lambda}\cos\phi\,\vec{r}_0+\dot{\lambda}\sin\phi\,\vec{\phi}_0\\
\dot{\vec{\phi}}_0&=-\dot{\phi}\,\vec{r}_0-\dot{\lambda}\sin\phi\,\vec{\lambda}_0
\end{aligned}\right\}\tag{1.2.11}$$

$$\left.\begin{aligned}
v_r&=\dot{r}\\
v_\lambda&=r\dot{\lambda}\cos\phi\\
v_\phi&=r\dot{\phi}
\end{aligned}\right\}\tag{1.2.12}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_r&=\ddot{r}-r\dot{\lambda}^2\cos^2\phi-r\dot{\phi}^2\\
a_\lambda&=r\ddot{\lambda}\cos\phi+2\dot{r}\dot{\lambda}\cos\phi-2r\dot{\lambda}\dot{\phi}\sin\phi\\
a_\phi&=r\ddot{\phi}+2\dot{r}\dot{\phi}+2r\dot{\lambda}^2\cos\phi\sin\phi
\end{aligned}\right\}\tag{1.2.13}$$

以$\vec{r}_0$、$\vec{\theta}_0$表示平面极坐标

$$\left.\begin{aligned}
x&=r\cos\theta\\
y&=r\sin\theta
\end{aligned}\right\}\tag{1.2.14}$$

的坐标单位向量，由附录Ⅰ(20)式有

$$\left.\begin{aligned}
\vec{r}_0&=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}\\
\vec{\theta}_0&=-\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}
\end{aligned}\right\}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}_0&=\dot{\theta}\,\vec{\theta}_0\\
\dot{\vec{\theta}}_0&=-\dot{\theta}\,\vec{r}_0
\end{aligned}\right\}$$

相应的速度分量为

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \tag{1.2.15}$$

此时方程(1.2.1)的形式为

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) &= F_r \\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}) &= F_\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.2.16}$$

此外,还可以按照问题的具体特点引进其他曲线坐标或广义坐标来表达方程(1.2.1),此处不赘述。应注意坐标系和参考系的区别。参考系代表观测者所处的位置,而坐标系只是用以描述观测资料的工具。

现在回过头来考察方程(1.2.1),它是动力学的基本方程。利用它可以解决两类问题:一,如果已知质点的运动,即已知它的位置随时间变化的规律$\vec{r}=\vec{r}(t)$,利用方程(1.2.1)可以求得作用在它上面的力$\vec{F}$。这是所谓**动力学第一类问题**。牛顿利用动力学定律解释刻普勒的成果而导致万有引力的发现,就是属于这一类问题。利用人造卫星轨道测定地球外部引力场也属于这一类问题。从数学上讲,这是一个简单的微分运算,它的解是明显的。二,如果已知作用在质点上的力,利用方程(1.2.1)可以求质点的运动规律。例如给定地球引力场和其他摄动力,求人造卫星的运动。这类问题称为**动力学第二类问题**,实际上它比第一类问题更常见。从数学上讲,这是一个常微分方程的积分问题,我们现在面临的是一个六阶的常微分方程组[方程组(1.2.1)包括三个方程,每个方程都含有对时间的二阶导数。]。已经证明,只要方程右方的$\vec{F}$作为t、$\vec{r}$和$\dot{\vec{r}}$的函数,满足所谓**李普希兹条件**,则方程组在$t=t_0$的某个邻域内,有唯一的一组解$\vec{r}=\vec{r}(t)$、$\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}(t)$,它满足给定的初始条件$\vec{r}(t_0)=\vec{r}_0$、$\dot{\vec{r}}(t_0)=\dot{\vec{r}}_0$。在上述条件下,方程组(1.2.1)的解包括六个独立的积分,六个积分常数由初始条件确定。顺便说明一下,李普希兹条件实际上是很松的。实际遇到的动力学问题中,这些条件总是得到满足的。

在本节结束之前,我们对牛顿的万有引力定律作两点说明,作为对上一节的补充。

设有两质点i和j,其质量分别为m_i和m_j。取定坐标原点o后,它们的位置由向径$\vec{r}_i$和$\vec{r}_j$分别确定(图1-4)。向量$\vec{r}_i-\vec{r}_j$是由j点到i点的向量,$|\vec{r}_i-\vec{r}_j|$是两质点间的距离,以$\vec{F}_{ij}$表示质点j对质点i的引力,于是牛顿万有引力定律可表示为

$$\vec{F}_{ij} = -\frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|^2}\frac{(\vec{r}_i-\vec{r}_j)}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|} \tag{1.2.17}$$

这就是牛顿万有引力定律的向量表达式。由图1-4可以看到,坐标原点的选择是任意的。如果取o'为原点,两质点的向径为$\vec{r}'_i$和$\vec{r}'_j$,则有$\vec{r}'_i-\vec{r}'_j=\vec{r}_i-\vec{r}_j$。于是(1.2.17)式不变。

(1.2.17)式中的比例常数G称为万有引力常数,采用国际单位制(SI),它的数值为

$$G=(6.673\pm0.003)\times10^{-11}\mathrm{m}^3(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2)$$

对于地球引力场内的运动,常用"地心引力常数"

$$\mu = GM_e$$

来代替万有引力常数G，其中M_e为地球质量。国际地球物理和大地测量联合会(IUGG) 1979年第十七届大会推荐的数值为

$$\mu = GM_e = 3.986005 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$$

在人造卫星轨道理论中，有时选取地球赤道半径(6 378 160 m)作为长度单位，806.813 s作为时间单位，此时μ的数值为1。

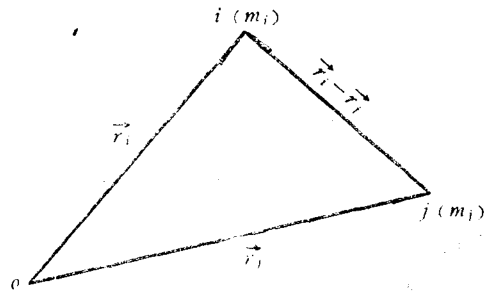


图 1-4

牛顿万有引力定律的表达式(1.2.17)是对质点而言的。第三章中，我们将讨论它对具有一定大小、形状和密度分布的物体的应用。以便对万有引力的特点有更深入的了解。

§1.3 质点在中心力作用下的运动

现在讨论天体力学中最简单的问题：求一质点的运动，作用在它上的力总是通过一固定中心o。这样的力称为**中心力**。以此固定中心为参考系，它当然是惯性系，在该系中可以应用牛顿定律。此时方程(1.2.1)可写成

$$\ddot{\vec{r}} = f\frac{\vec{r}}{r} \tag{1.3.1}$$

其中$\vec{r}$为质点向径；f为单位质量所受力的大小，一般地说，它随质点位置而变化，即f是质点向径的函数。当f为负时，质点受到中心引力；反之，受斥力。

在牛顿引力的情形下

$$f = -\frac{\mu}{r^2} \tag{1.3.2}$$

其中μ称为中心o的引力常数。此时，方程(1.3.1)可以写成

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu r^{-3}\vec{r} \tag{1.3.3}$$

1. 动量矩积分，刻普勒第一定律

我们在一般情形下讨论方程(1.3.1)。方程两边以$\vec{r}$叉乘，得

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = fr^{-1}\vec{r} \times \vec{r}$$

按乘积微分法则改写方程左端，得

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = fr^{-1}\vec{r} \times \vec{r}$$

由向量叉乘的定义，一个向量与它本身的叉乘等于零，于是上式变为

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} + \dot{\vec{r}}) = 0$$

积分一次，得

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h} \tag{1.3.4}$$

其中$\vec{h}$为积分常数。向量$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{v}$表示单位质量对点$o$的动量矩。方程（1.3.4）是方程（1.3.1）的一个初积分，它表示在中心力作用下质点对中心的动量矩守恒，所以称为**动量矩积分**。动量矩又称为角动量，故(1.3.4)式也可称为**角动量积分**。

由动量矩守恒可以得出两个重要结论。首先，由(1.3.4)式我们看到，如果$\vec{h} = 0$，则$\vec{r} \times \vec{v} = 0$，$\vec{v}$与$\vec{r}$共线，质点在通过点$o$的直线上运动；如果$\vec{h} \neq 0$，则$\vec{r}$垂直于常向量$\vec{h}$，即质点位置总处于过中心$o$而垂直于固定向量$\vec{h}$的平面内。在这两种情形下，质点都是在通过点$o$的平面上运动。

其次，从图1-5可以看到，质点向径在时间间隔dt内所扫过的面积ds为$\triangle omm'$，而$\vec{r} \times \vec{v}\,dt$的大小等于平行四边形$omm'm''$的面积，正好是$\triangle omm'$面积的两倍。于是

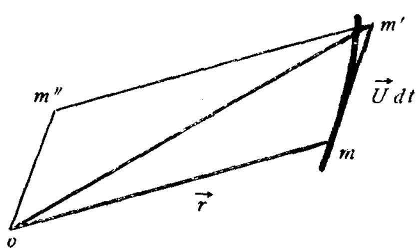


图 1-5

$$ds = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}\,dt| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|dt$$

所以

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r} + \vec{v}| = \frac{1}{2}h \tag{1.3.5}$$

式中$\frac{ds}{dt}$称为质点的**面积速度**，$h = |\vec{h}|$是单位质量动量矩的大小。由于动量矩守恒，h为常数，方程(1.3.5)说明质点的面积速度为常数。所以(1.3.4)式又称为**面积积分**。

以上两个推论正好是前面提到的刻普勒第一定律。

2．能量积分

方程(1.3.1)两边以$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$点乘，得

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = fr^{-1}\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$$

考虑到

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

及

$$\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2) = r\frac{dr}{dt}$$

上式变为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = f\frac{dr}{dt}$$

积分一次，得

$$\frac{v^2}{2} = \int f dr + A \tag{1.3.6}$$

其中A为积分常数，$\frac{v^2}{2}$是单位质量的功能。方程右方第一项称为势函数或位函数，它除了一个常数项以外是确定的。而

$$V = -\int f dr$$

是单位质点的势能或位能。以T记$\frac{v^2}{2}$，则方程(1.3.6)可以写为

$$T + V = A$$

它表示机械能守恒，A为单位质点的总机械能。所以（1.3.6）式称为**能量积分**。在牛顿引力的情形下，由方程(1.3.2)，势函数的具体形式可以求出为

$$V = -\int f dr = \int \frac{\mu}{r^2} dr$$

如果在无穷远处令势能等于零，则有

$$V = -\frac{\mu}{r}$$

此时能量积分成为

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = A \tag{1.3.7}$$

3．轨道方程，刻普勒第二定律

动量矩积分（1.3.4）式说明在中心力作用下，质点作平面运动。我们现在转到平面上来讨论质点的运动，并且限于牛顿引力的情形。在质点运动平面内引进极坐标，它与向量$\vec{h}$构成右手系，原点位于引力中心o，此时动量矩积分(1.3.4)式变为

$$r^2\dot{\theta} = h \tag{1.3.8}$$

而能量积分(1.3.7)式变为

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta})^2 - \frac{\mu}{r} = A \tag{1.3.9}$$

如果运动方程的解已求得，它必然给出质点位置与时间的关系$r=r(t)$及$\theta=\theta(t)$。从二者中消去t，就得到r和θ的关系$r=r(\theta)$，这就是质点的轨道方程。我们也可以从运动微分方程出发来求质点轨道的方程$r=r(\theta)$。为此可从方程(1.3.8)和(1.3.9)中消去时间t。按复合函数的微分法则，有