中国科学院规划教材
物理

大学物理（新版）

习题分析与解答

DAXUE WULI XITI FENXI YU JIEDA

康 颖 主编

科学出版社
www.sciencep.com

大学物理(新版)习题分析与解答

康　颖　主编

李定国　陈　聪　等编
刘华波　秦国斌

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是康颖教授主编《大学物理(新版)》教材配套的习题分析与解答，所选题目是以教育部2004年重新制订的《非物理类理工学科大学物理课程教学基本要求》为根据，结合工科院校的教学实际，经过多次筛选、反复推敲编写而成.选题力求具有典型性、综合性，难易层次分明，涵盖知识点全面；解题过程力求思路清晰，逻辑严密，步骤简洁，注意引导和启发.

全书包括主教材中力学、振动与波、热学、电磁学、光学、近代物理等各个部分的习题，共计503题.

为了引发读者对矢量的关注，本书采用书写体表示矢量.为了减少篇幅，本书省去了一些代人具体数据的运算过程.

本书可供在高等工科院校本科各专业、军队院校技术类专业、理科非物理类专业以及成人教育等从事大学物理教学工作的教师参考，也可供自学者使用.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理(新版)习题分析与解答/康颖主编. —北京：科学出版社，2006

ISBN 7-03-016908-5

Ⅰ.大… Ⅱ.康… Ⅲ.物理学-高等学校-解题 Ⅳ.O4-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第011868号

责任编辑：昌 盛/责任校对：赵桂芬

责任印制：张克忠/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006年4月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2006年4月第一次印刷 印张：13 1/2

印数：1—5 000 字数：260 000

定价：18.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

目　录

第 1 章 质点的运动

1.1 回答下列问题：

(1) $|\Delta\vec{r}|$和$|\Delta r|$有何区别？$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|$和$\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|$有何区别？

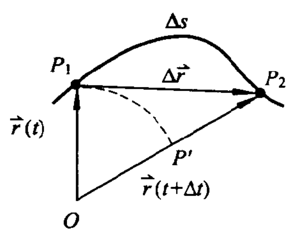
(2) 路程和位移有何区别？速度和速率有何区别？

答 (1) $|\Delta\vec{r}|$是 Δt 时间内位矢 $\vec{r}$ 增量的模，即位移的大小；$|\Delta r|$则是 Δt 时间内位矢 $\vec{r}$ 大小的增量的绝对值. 图中$|\Delta\vec{r}|=\overline{P_1P_2}$，而$|\Delta r|=\overline{P'P_2}$.

$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|$是加速度的大小，而$\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|$是加速度的切向分量的大小，两者关系为

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}\geqslant\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|$$

(2) 路程是质点在一段时间内在运动轨道上实际经历的路径长度，是标量，只取非负值；位移是质点在一段时间内由起点指向终点的有向线段，是矢量. 题 1.1 图中路程 $\Delta s=\widehat{P_1P_2}$，而位移 $\Delta\vec{r}=\overrightarrow{P_1P_2}$.



题 1.1 图

速率是速度的大小. 速度是矢量，速率则是标量，且不取负值.

1.2 分析以下说法是否正确？

(1) 运动物体的加速度越大，物体的速度也越大；

(2) 物体沿直线向前运动时，若物体向前的加速度减小了，则物体前进的速度也随之减小；

(3) 物体加速度的值很大，而速度的值可以不变，这是不可能的.

答 (1) 错. 加速度反映速度随时间变化的快慢，与速度无直接关系. 加速度大时，速度不一定大. 例如，竖直上抛物体到达最高点时，速度为零，而加速度是重力加速度 $\vec{g}$.

(2) 错. 向前的加速度虽在减小，但仍有向前的加速度，故速度仍在增大，只是速度的增加越来越慢了.

(3) 错. 这是可能的. 当加速度很大而切向加速度为零时，就只有法向加速度. 法向加速度只改变速度方向，不改变速度大小. 这时速度的值不变，而加速度的值可以很大.

1.3 匀变速运动是否一定是直线运动？匀速圆周运动是不是匀变速运动？

答 作匀变速运动的物体，其加速度 $\vec{a}$ 不变，即加速度的大小和方向均不变.

匀变速运动不一定是直线运动. 例如,当空气阻力不计时,各种抛射体的加速度 $\vec{a}=\vec{g}=$常矢量,但斜抛体的运动轨道是曲线而不是直线. 匀速圆周运动是匀速率圆周运动的习惯说法,它有向心加速度,其值虽然不变但方向时刻在变. 所以匀速圆周运动不是匀变速运动.

1.4 斜上抛物体在轨道上哪一点法向加速度最大? 轨道上哪一点曲率半径最小?

解 斜上抛物体在轨道上任一点的法向加速度大小为 $a_n=g\cos\theta$,θ 是质点运动到该点时速度方向与水平方向的夹角. 在轨道最高点处 $\theta=0$,此处法向加速度为最大. 由 $a_n=v^2/\rho=g\cos\theta$,得曲率半径 $\rho=v^2/(g\cos\theta)$. 斜抛体在最高点处速率最小而 $\cos\theta$ 最大,所以轨道最高点处的曲率半径最小.

1.5 一质点由水平面作斜抛运动,用 t_1 代表落地时间.

(1) 说明下面三个积分的意义:

$$\int_0^{t_1} v_x \mathrm{d}t;\quad \int_0^{t_1} v_y \mathrm{d}t;\quad \int_0^{t_1} \vec{v}\mathrm{d}t$$

(2) 用 A 和 B 代表抛出点和落地点,说明下面三个积分的意义:

$$\int_A^B \mathrm{d}\vec{r};\quad \int_A^B |\mathrm{d}\vec{r}|;\quad \int_A^B \mathrm{d}r$$

解 (1) 当以抛出点为坐标原点、x 轴沿水平方向、y 轴竖直向上时,若斜抛体在飞行时间内的水平射程为 R,则

$\int_0^{t_1} v_x\mathrm{d}t=\int_0^{t_1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_0^{x_B}\mathrm{d}x$ 原积分表示水平方向的总位移,其值 $\Delta x=x_B-0=R$.

$\int_0^{t_1} v_y\mathrm{d}t=\int_0^{t_1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_0^{y_B}\mathrm{d}y$ 原积分表示竖直方向的总位移,其值为零.

$\int_0^{t_1} \vec{v}\mathrm{d}t=\int_0^{t_1}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_0^{\vec{r}_B}\mathrm{d}\vec{r}$ 原积分表示总位移 $\Delta\vec{r}$,$\Delta\vec{r}=R\vec{i}$.

(2) 积分 $\int_A^B\mathrm{d}\vec{r}$ 表示飞行的总位移 $\Delta\vec{r}$,$\Delta\vec{r}=\overrightarrow{AB}=R\vec{i}$;

积分 $\int_A^B|\mathrm{d}\vec{r}|$ 表示飞行路径的总长度;$\int_A^B\mathrm{d}r=r_B-r_A=R$.

1.6 如图所示,一质点从 O 点出发,以恒定速率 v 作逆时针旋转的圆周运动,圆周半径为 R. 试求:(1) 该质点的运动方程;(2) 质点自 O 点走过 1/6 圆周这段时间内的平均速度;(3) 质点自 O 点走过 1/2 圆周这段时间内的平均加速度.

解 如图,质点的角速度 $\omega=v/R$,转过角度 $\theta=\omega t=vt/R$.

(1) $x=R\sin(\pi-\omega t)=R\sin(\omega t)=R\sin\left(\frac{v}{R}t\right)$

$$y=R+R\cos(\pi-\omega t)=R[1-\cos(\omega t)]=R\left[1-\cos\left(\frac{v}{R}t\right)\right]$$

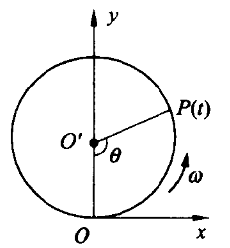
亦可表示为

$$\vec{r}=R\sin\left(\frac{v}{R}t\right)\vec{i}+R\left[1-\cos\left(\frac{v}{R}t\right)\right]\vec{j}$$

(2) 转过 1/6 圆周所需时间 $\Delta t=t=\pi R/3v$,此段时间内的位移为

$$\Delta x=R\sin\left(\frac{v}{R}t\right)=R\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$\Delta y=R\left[1-\cos\left(\frac{v}{R}t\right)\right]=R\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{R}{2}$$



题 1.6 图

因此,平均速度分量为

$$\bar{v}_x=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{3\sqrt{3}v}{2\pi}$$

$$\bar{v}_y=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{3v}{2\pi}$$

平均速度的大小为

$$|\vec{\bar{v}}|=\sqrt{\bar{v}_x^2+\bar{v}_y^2}=\frac{3v}{\pi}$$

平均速度的方向与 x 轴正向的夹角为

$$\alpha=\arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=30^\circ$$

(3) 走过 1/2 圆周需时间 $\Delta t=\pi R/v$,初速度 $\vec{v}_0=v\vec{i}$,末速度 $\vec{v}=-v\vec{i}$,故$\Delta\vec{v}=\vec{v}-\vec{v}_0=-2v\vec{i}$. 平均加速度为

$$\vec{\bar{a}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=-\frac{2v^2}{\pi R}\vec{i}$$

1.7 质点的运动方程为 $x=-10t+30t^2$ 和 $y=15t-20t^2$,式中 x、y 以米计,t 以秒计. 试求:(1) 初速度的大小和方向;(2) 加速度的大小和方向.

解 (1) 速度 $v_x=\frac{dx}{dt}=-10+60t$, $v_y=\frac{dy}{dt}=15-40t$

由 $t=0$ 得初速度 $v_{0x}=-10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,$v_{0y}=15\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 初速度大小为

$$v_0=\sqrt{v_{0x}^2+v_{0y}^2}=18.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$\vec{v}_0$ 与 x 轴正向夹角为第二象限角,其值为

$$\alpha=\pi-\arctan\left(\frac{15}{10}\right)=123^\circ42'$$

(2) 加速度为

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=60\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=-40\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$a=|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=72.1\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$\vec{a}$ 的方向与 x 轴正向夹角为第四象限角,其值为

$$\beta=\arctan\frac{a_y}{a_x}=\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)=-33^\circ41'$$

1.8 质点在 Oxy 平面内运动,其运动方程为 $\vec{r}=a\cos\omega t\vec{i}+b\sin\omega t\vec{j}$,其中 a、b、ω 均为大于零的常量.(1) 试求质点在任意时刻的速度;(2) 证明质点运动的轨道为椭圆;(3) 证明质点的加速度恒指向椭圆中心.

解 (1) 速度为

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-a\omega\sin\omega t\vec{i}+b\omega\cos\omega t\vec{j}$$

(2) 由 $x=a\cos\omega t$ 和 $y=b\sin\omega t$ 消去 t 得轨道方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

此为椭圆方程,表明质点作椭圆运动.

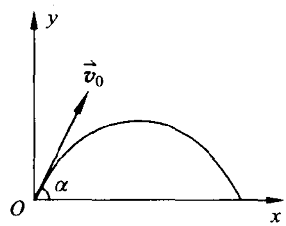
(3) 加速度为

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-\omega^2(a\cos\omega t\vec{i}+b\sin\omega t\vec{j})=-\omega^2\vec{r}$$

因 $\omega^2>0$,所以 $\vec{a}$ 的方向恒与 $\vec{r}$ 相反,即 $\vec{a}$ 恒指向椭圆中心.

1.9 试求无阻力斜抛运动的轨道方程.设抛体的初速为 v_0,抛射角为 α.

解 建立如题 1.9 图所示的坐标系,依题意,抛体的加速度为



题 1.9 图

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{g}$$

对 $\mathrm{d}\vec{v}=\vec{g}\mathrm{d}t$ 积分,有

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}}\mathrm{d}\vec{v}=\int_0^t\vec{g}\mathrm{d}t$$

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{g}t$$

因 $\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$.则 $\mathrm{d}\vec{r}=\vec{v}\mathrm{d}t$,考虑到初始 $\vec{r}_0=0$,积分可得运动方程,即

$$\vec{r}=\int_0^t\vec{v}\mathrm{d}t=\int_0^t(\vec{v}_0+\vec{g}t)\mathrm{d}t=\vec{v}_0t+\frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

写成分量式,则为

$$\begin{cases}x=v_0\cos\alpha\cdot t\\ y=v_0\sin\alpha\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

由以上两式消去 t,即得三点运动的轨道方程

$$y=x\tan\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2\qquad(x\geqslant 0)$$

本题亦可由加速度的分量式逐步积分求得.

1.10 一小球沿斜面向上运动,其运动方程为 $s=5+4t-t^2$,式中 s 以米计,t 以秒计.试求:(1) 小球运动到最高点的时刻;(2) 从 $t=0$ 到小球运动到最高点这段时间内的位移大小.

解 (1) 小球速度

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 4 - 2t$$

到达最高点时 $v=0$，代入得 $t=2$ s.

(2) 因前 2 s 内有 $v\geqslant 0$，表明前 2 s 内小球沿斜面向上作单方向运动. $t=0$ 时 $s_0=5$ m，$t=2$ s 时，$s=9$ m，因而位移大小为

$$\Delta s = s - s_0 = 4 \text{ m}$$

1.11 有一开始静止于 x_0 处的质点，以加速度 $a=-k/x^2$ 沿 Ox 轴负方向运动，k 为正值常量. 求质点的速度与其坐标间的关系.

解 由 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\frac{k}{x^2}$ 得

$$\int_0^v v\mathrm{d}v = -k\int_{x_0}^x \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$v^2 = 2k\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)$$

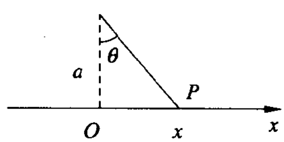
因质点向 x 轴负方向运动，所以有

$$v = -\sqrt{2k\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)}$$

本题若 $x_0>0$，则在由 x 轴正的一侧向原点($x=0$)运动时，加速度和速度都将趋于负无穷大，但又不能通过原点，因为一旦通过原点后，$x<0$，上式根号中为负数而无解，这种情况是不合理的. 所以，本题只存在 $x_0<0$，即质点从 x 轴负的一侧由静止开始向负方向运动才是合理的.

1.12 距河岸(看成直线)500 m 处有一艘静止的船，船上的探照灯以每分钟 1 转的转速转动. 当光束与岸边成 60 度角时，求光束沿岸边移动的速度.

解 沿岸边取坐标如题 1.12 图. 设某时刻探照灯光照射在岸边的 P 点，其坐标为 x，则有 $x=a\tan\theta$，其中 $a=500$ m. 光束沿岸边移动的速度为



题 1.12 图

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a\sec^2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = a\,\omega\sec^2\theta$$

代入 $\omega=\frac{2\pi}{60}\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$，$\theta=30°$，得

$$v = 69.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

1.13 一质点具有恒定加速度 $\vec{a}=2\mathrm{m\cdot s^{-2}}\vec{i}+4\mathrm{m\cdot s^{-2}}\vec{j}$，$t=0$ 时，其速度为零，位置矢量 $\vec{r}_0=5\mathrm{m}\vec{i}$. 求：(1) 任意时刻的速度 $\vec{v}$ 和位置矢量 $\vec{r}$；(2) 质点在 Oxy 平面上的轨道方程.

解 (1) 已知 $a_x=2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，$a_y=4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，初速度 $v_{0x}=v_{0y}=0$，初位置 $x_0=5$ m，$y_0=0$. 由 $a_x=\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t=2$ 得

$$\int_0^{v_x}\mathrm{d}v_x = \int_0^t 2\mathrm{d}t,\qquad v_x = 2t(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

类似地，有

$$\int_0^{v_y} \mathrm{d}v_y = \int_0^t 4\mathrm{d}t, \qquad v_y = 4t(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

所以

$$\vec{v} = (2t\vec{i} + 4t\vec{j})(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

由

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$$

得

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t 2t\mathrm{d}t, \qquad x = x_0 + t^2 = (5 + t^2)\ (\mathrm{m})$$

又有

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4t$$

得

$$\int_0^y \mathrm{d}y = \int_0^t 4t\mathrm{d}t, \qquad y = 2t^2(\mathrm{m})$$

所以

$$\vec{r} = [(5+t^2)\vec{i} + 2t^2\vec{j}](\mathrm{SI})$$

(2) 由 $x=5+t^2$ 和 $y=2t^2$ 消去 t 得轨道方程为

$$y = (2x - 10)\ (\mathrm{m}) \quad (x \geqslant 5)$$

1.14 由静止从原点出发的质点的加速度在 Ox 轴和 Oy 轴上的分量分别为 $a_x = 10t$ 和 $a_y = 5t^2$，式中各量均采用 SI 单位. 求 $t=5$ s 时质点的速度矢量和位置矢量.

解 初始条件为 $v_{0x} = v_{0y} = 0, x_0 = y_0 = 0$. 据 $a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = 10t$ 有

$$\int_0^{v_x} \mathrm{d}v_x = \int_0^t 10t\mathrm{d}t, \quad v_x = 5t^2(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

据 $a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t = 5t^2$ 有

$$\int_0^{v_y} \mathrm{d}v_y = \int_0^t 5t^2\mathrm{d}t, \quad v_y = \frac{5}{3}t^3(\mathrm{SI})$$

所以

$$\vec{v} = \left(5t^2\vec{i} + \frac{5}{3}t^3\vec{j}\right)(\mathrm{SI})$$

$t=5$ s 时，由上式得

$$\vec{v}_5 = \left(125\vec{i} + \frac{625}{3}\vec{j}\right)(\mathrm{SI})$$

据 $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 5t^2$ 和 $v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{5}{3}t^3$，经积分后可得位矢为

$$\vec{r} = \left(\frac{5}{3}t^3\vec{i} + \frac{5}{12}t^4\vec{j}\right)(\mathrm{m})$$

$t=5$ s 时，位矢为

$$\vec{r}_5 = \left(\frac{625}{3}\vec{i} + \frac{3125}{12}\vec{j}\right)(\mathrm{m})$$

1.15 升降机以加速度 a 上升时，一螺钉从它的天花板上脱落. 如升降机的天

花板与其底面的距离为 H，求：(1) 螺钉从天花板落到底面所需的时间；(2) 螺钉相对升降机外固定柱子的下落距离(设螺钉离开天花板时的速率为 v_0).

解　如题 1.15 图所示，(a)、(b)分别表示螺钉开始脱落和落至底面时的情况，y 轴的原点取在螺钉开始脱落时升降机的底面处.

(1) 螺钉脱落后对地的运动方程为

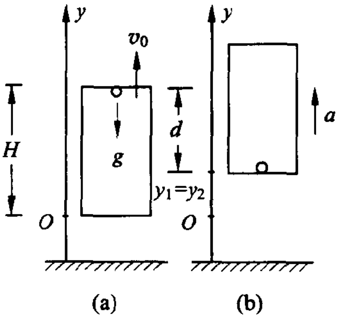
$$y_1 = H + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

升降机底面对地的运动方程为

$$y_2 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

当螺钉落至底面时，有 $y_1 = y_2$，代入上两式得螺钉下落时间为

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g+a}}$$



题 1.15 图

(2) 由图(b)知螺钉相对于 y 轴或机外固定柱子的下落距离为

$$d = H - y_1 = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

将 t 值代入得

$$d = \frac{H}{g+a}g - v_0\sqrt{\frac{2H}{g+a}}$$

1.16　由长为 l 的刚性细杆相连的两个物体 A、B 可以在光滑轨道上滑行，如题 1.16 图所示. 如物体 A 以恒定的速率 v 向左滑行，当 $\alpha = 60°$ 时，求物体 B 的速度.

解　取坐标如图. 物体 A 的速度为

$$\vec{v}_A = \frac{dx}{dt}\vec{i} = -v\vec{i}$$

物体 B 的速度为

$$\vec{v}_B = \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

由 $x^2 + y^2 = l^2$，得

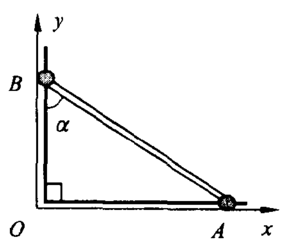
$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

故有

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

将 $\frac{dx}{dt} = -v$，$\tan\alpha = \frac{x}{y}$ 代入上式，即得

$$\vec{v}_B = v\tan\alpha\vec{j}$$



题 1.16 图

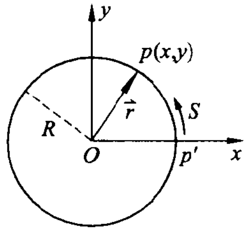
当 $\alpha = 60°$ 时，$v_B = \sqrt{3}v$.

1.17　一质点作逆时针旋转的匀速圆周运动，圆周半径为 R，角速度为 ω. 试

分别写出用直角坐标位矢、自然坐标表示的质点运动方程.

解 坐标系如题 1.17 图.设质点经过 x 轴上 p' 点的时刻为计时起始时刻,即 $t=0$,则 t 时刻质点即在位置 p 的坐标为

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \end{cases}$$



题 1.17 图

因此,用直角坐标位矢表示的质点运动方程为

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{i} = R\cos\omega t\vec{i} + R\sin\omega t\vec{j}$$

取图中 p' 点为自然坐标原点,以逆时针方向为自然坐标正向,解到自然坐标表示的运动方程为

$$S = R\omega t$$

1.18 在重力场中的两个运动粒子,$t=0$ 时刻的状态分别为 $\vec{r}_{10}$、$\vec{v}_{10}$ 和 $\vec{r}_{20}$、$\vec{v}_{20}$. 试给出这两个粒子在空间发生相撞的条件.并证明:若 $\vec{r}_{10}=6\vec{i}+20\vec{j}+10\vec{k}$,$\vec{v}_{10}=8\vec{j}+4\vec{k}$;$\vec{r}_{20}=36\vec{j}$,$\vec{v}_{20}=3\vec{i}+9\vec{k}$,式中各量均采用 SI 单位,则这两个粒子经过 2 s 后相撞.

解 两粒子的加速度均为 $\vec{g}$,因而运动方程分别为

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{10} + \vec{v}_{10}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{20} + \vec{v}_{20}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

相撞时有 $\vec{r}_1=\vec{r}_2$,由此得这两个粒子相撞的条件为

$$\vec{r}_{10} - \vec{r}_{20} = -(\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20})t$$

由上式可知,发生相撞的条件由初始条件确定,即粒子 1 对粒子 2 的初始相对位矢与相应的初始相对速度大小成比例而方向相反.

根据题中给定的 $\vec{r}_{10}$、$\vec{r}_{20}$、$\vec{v}_{10}$ 和 $\vec{v}_{20}$,有

$$\vec{r}_{10} - \vec{r}_{20} = 6\vec{i} - 16\vec{j} + 10\vec{k} = -(\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20})t = (3\vec{i} - 8\vec{j} + 5\vec{k})t$$

解得 $t=2$ s,即两粒子经 2 s 后相撞.

1.19 北京正负电子对撞机的储存环的周长为 240 m,电子沿环以非常接近光速的速率运行.问这些电子运动的向心加速度是重力加速度的几倍?

解 设储存环半径为 R,则由 $s=2\pi R$ 得

$$R = \frac{s}{2\pi} = \frac{240}{2\times 3.14} = 38.22(\text{m})$$

取电子速度 $v\approx c=3\times 10^8$ m,则有

$$a_n = \frac{v^2}{R} \approx \frac{c^2}{R} = \frac{(3\times 10^8)^2}{38.22} = 2.35\times 10^{15}(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

因此

$$\frac{a_n}{g} = \frac{2.35\times 10^{15}}{9.8} \approx 2.4\times 10^{14}$$

1.20 汽车在半径 $R=400\ \mathrm{m}$ 的圆弧弯道上减速行驶.设在某一时刻,汽车的速率为 $v=10\mathrm{m\cdot s^{-1}}$,切向加速度的大小为 $a_\tau=0.20\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. 求汽车的法向加速度和总加速度的大小和方向.

解 该时刻汽车的法向加速度为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{10^2}{400}=0.25(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

又知切向加速度 $a_\tau=0.2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,则总加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{0.20^2+0.25^2}\approx 0.32(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

$\vec{a}$ 与该时刻 $\vec{v}$ 的夹角为

$$\theta=\arctan\left(\frac{a_n}{a_\tau}\right)=\arctan\left(\frac{0.25}{0.20}\right)=128°40'$$

1.21 一个半径为 $R=1.0\ \mathrm{m}$ 的圆盘,可以绕水平轴 O 自由转动.一根轻绳绕在盘子的边缘,其自由端拴一物体 A(如题 1.21 图所示).在重力作用下,物体 A 从静止开始匀加速地下降,在 $\Delta t=2.0\ \mathrm{s}$ 内下降的距离 $h=0.4\ \mathrm{m}$. 求物体开始下降后 3 s,边缘上任一点的切向加速度与法向加速度.

解 设 A 下降的加速度为 a_A,有 $h=\frac{1}{2}a_A\Delta t^2$,则在 3 s 末圆盘边缘任一点的切向加速度为

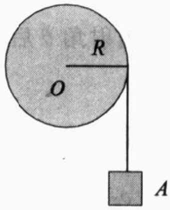
$$a_\tau=a_A=\frac{2h}{\Delta t^2}=\frac{2\times 0.4}{2.0^2}=0.2(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

该时刻边缘上任一点的速率为

$$v=a_At=0.2\times 3.0=0.6(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

法向加速度为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{0.6^2}{1.0}=0.36(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$



题 1.21 图

1.22 一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$ 运动,v_0、b 是正值常量.求:(1) 在时刻 t 质点的总加速度;(2) t 为何值时,总加速度的大小等于 b;(3) 当总加速度的大小为 b 时,质点沿圆周运行的圈数.

解 (1) 由运动方程得速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-bt \qquad ①$$

切向加速度为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-b$$

法向加速度为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

所以总加速度为

$$\vec{a}=-b\vec{\tau}+\frac{(v_0-bt)^2}{R}\vec{n} \quad ②$$

(2) 由 $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{b^2+\frac{(v_0-bt)^4}{R^2}}=b$ 得

$$t=\frac{v_0}{b}$$

(3) 此时 $t=v_0/b$，代入式①知此时 $v=0$. 当 $t>v_0/b$ 时，$v<0$，质点将往回运动，而 $t<v_0/b$ 时，$v>0$. 所以在 $t=v_0/b$ 前，质点作单方向圆周运动，走过的路程为

$$s=\frac{v_0^2}{b}-\frac{v_0^2}{2b}=\frac{v_0^2}{2b}$$

转过的圈数则为

$$n=\frac{s}{2\pi R}=\frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$

1.23 从某点 P 以同样速率 v_0 沿着同一竖直平面内的不同方向同时抛出几个小球. 试证明在任意时刻这几个小球总是散处在某一圆周上.

解 各小球的运动方程均为

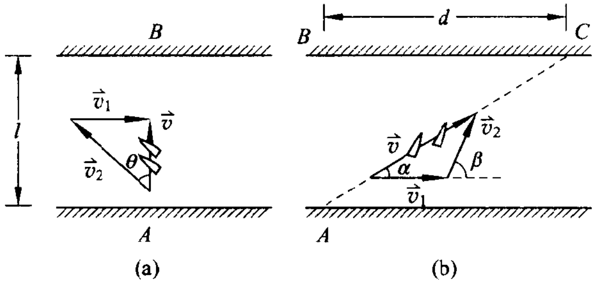
$$x=v_0\cos\theta t,\quad y=v_0\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2$$

消去抛射角 θ 后得

$$x^2+\left(y+\frac{1}{2}gt^2\right)^2=(v_0t)^2$$

上式是一个以 $\left(0,-\frac{1}{2}gt^2\right)$ 为圆心、以 v_0t 为半径的圆，它与 θ 无关. 这表明以相同速率 v_0 向不同方向抛出的小球，在任一时刻都处在一个圆心在加速下降而半径在不断扩大的一动态圆周上.

1.24 一人能在静水中以 $1.1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度划船前进，今欲横渡一宽为 4000 m、水流速度为 $0.55\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的大河. (1) 若要到达河正对岸的一点，应如何确定划行方向？需要多少时间？(2) 如希望用最短时间过河，应如何确定划行方向？船到达对岸的位置在何处？



题 1.24 图

解 (1) 设河宽为l，水对岸的速度为$\vec{v}_1$，船对水的速度为$\vec{v}_2$，则船对岸的速度为

$$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2 \qquad ①$$

船要能到达正对岸，其对地速度$\vec{v}$应直指对岸，因而由题1.24图(a)可知$\vec{v}_2$应指向上游方向，偏向上游的角度为

$$\theta = \arcsin\frac{v_1}{v_2} = \arcsin\frac{0.55}{1.1} = 30^\circ$$

到达对岸所需时间为

$$\Delta t = \frac{l}{v} = \frac{l}{v_2\cos\theta} = 4199\ \text{s} \approx 70\ \text{min}$$

(2) 由图(b)可知，$\vec{v}_1$与岸平行，而$\vec{v}_2$与岸成一般夹角β，可将后者分解为平行于岸和垂直于岸两部分

$$v_{2/\!/} = v_2\cos\beta,\quad v_{2\perp} = v_2\sin\beta$$

则由式①有

$$v_{/\!/} = v_1 + v_{2/\!/} = v_1 + v_2\cos\beta$$
$$v_{\perp} = v_{2\perp} = v_2\sin\beta$$

因此船航行到对岸所需时间为$t=\dfrac{l}{v_{2\perp}}=\dfrac{l}{v_2\sin\beta}$. 可见，要使船以最短时间到达对岸，应尽可能增大$v_\perp$. 也即，当$\beta=90^\circ$时，$v_\perp$最大.

这表明$\vec{v}_2$的指向即船头的指向应垂直于河岸，才能以最短时间到达对岸. 由式②得最短时间为

$$t_{\min} = \frac{l}{v_2} = \frac{4000}{1.1} = 3636(\text{s}) = 60.6(\text{min})$$

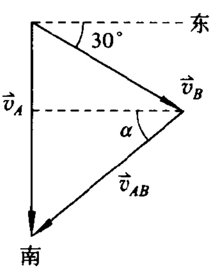
到达对岸时，偏向下游的距离为

$$d = v_1 t_{\min} = 0.55\times 3636 \approx 2000(\text{m})$$

1.25 飞机A以$v_A=1000\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$的速率(相对地面)向南飞行，同时另一架飞机$B$以$v_B=800\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$的速率(相对地面)向东偏南30°角方向飞行. 求$A$机相对于$B$机的速度.

解 如题1.25图所示，设A机相对于B机的速度为$\vec{v}_{AB}$，则$\vec{v}_A=\vec{v}_{AB}+\vec{v}_B$，分量式为

$$v_A = v_B\sin30^\circ + v_{AB}\sin\alpha$$
$$0 = v_B\cos30^\circ - v_{AB}\cos\alpha$$



题1.25图

因而有

$$v_{AB}\sin\alpha = v_A - v_B\sin30^\circ$$
$$v_{AB}\cos\alpha = v_B\cos30^\circ$$

上两式平方后相加，得

$$v_{AB} = \sqrt{(v_A - v_B\sin30^\circ)^2 + (v_B\cos30^\circ)^2} = 916.5\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$$

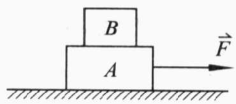
$$\alpha = \arccos\left(\frac{v_B\cos30^\circ}{v_{AB}}\right) = \arccos0.7559 = 40^\circ54'$$

所以，$\vec{v}_{AB}$的方向为西偏南 $40^\circ54'$.

第 2 章　牛顿运动定律

2.1　关于摩擦力的概念，以下几种说法是否正确？举例说明之.（1）摩擦力的方向总是与物体的运动方向相反；（2）摩擦力总是阻碍物体间的相对运动.

答　（1）不对. 摩擦力的方向与物体运动方向不一定相反. 例如，题 2.1 图中当物体 A 在 $\vec{F}$ 作用下作加速运动时，只要物体 B 在 A 上不发生滑动，则使 B 随 A 一起向前加速的力就来源于 A 作用于 B 的向前的静摩擦力.



题 2.1 图

（2）对.

2.2　质量为 m 的小球用轻绳 AB、BC 连接，如题 2.2 图所示. 试求剪断绳子前后的瞬间，绳 BC 中张力之比.

解　剪断前小球受力如题 2.2 图. 设此时 BC 绳上张力为 $T=T_1$，则按物体平衡条件有

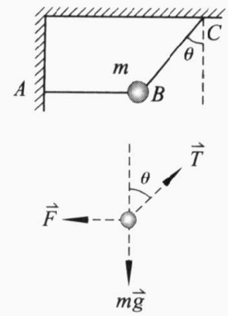
$$T_1\cos\theta = mg \qquad ①$$

剪断后，F 消失，m 开始向下摆动. 在剪断后瞬间，m 的速度为零，因而沿 BC 方向的法向加速度为零. 设此瞬间绳上张力 $T=T_2$，则

$$T_2 - mg\cos\alpha = ma_n = 0 \qquad ②$$

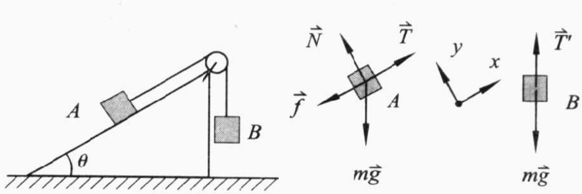
由式①、式②得

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$



题 2.2 图

2.3　如题 2.3 图所示，斜面与水平面的夹角 $\theta=30°$，A 和 B 两物体的质量均为 $m=0.2$ kg，并以轻绳相连，物体 A 与斜面的滑动摩擦系数 $\mu=0.4$，滑轮的质量及轴的摩擦均忽略不计. 试求物体运动的加速度及绳对物体的拉力.



题 2.3 图

解　分别取 A、B 为研究对象，作示力图，其中 $\vec{T}$ 和 $\vec{T}'$ 为绳对物体的拉力，$\vec{N}$ 为斜面对物体的支持力，$\vec{f}$ 为斜面对物体的摩擦力，建立如图所示的直角坐标系.