ZhXShX

中学数学丛书

樊恺

怎样探索解题途径

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

ZhXShX

中学数学丛书

怎样探索解题途径

樊 恺

湖 北 教 育 出 版 社

出 版 说 明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》，本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四册，已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版。

中学数学丛书

怎样探索解题途径

樊 恺

湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行

潜江县印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本　5.5印张　1插页　116,000字

1984年8月第1版　1984年8月第1次印刷

印数：1—36,000

统一书号：7306·117　定价：0.56元

编者的话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识．这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》．根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上编一套《中学数学丛书》．我们认为，这个工作是很有意义的．于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及教学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划．

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深．编写这套书的同时，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量．

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和教学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师．编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得．

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学

概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的．丛书中每本小册子既相对独立又互相联系，同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用．学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读．另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，便于同学们自学，同时，对中学教师亦有一定的参考作用．

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好．同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见．

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

序

解题在数学教学中的重要地位是无可置疑的。为了提高学生的解题能力，国内近年出版了一些指导学生解题的参考书，不过大都局限于对具体问题的解题思路分析。至于象美国数学家波利亚的《怎样解题》* 一类的研究解题一般方法的书，尚不多见。但是，具体问题是数不胜数的；如果学生在学习解题时得不到科学方法的有效指导，而只是就具体问题反复做相当数量的练习，那就势必沉浮于"题海"而不能解脱。所以，作者认为：当前若结合我国中学数学教学的实际情况，就解题的一般规律和方法作一些探讨，还是一件有益的事。

解题的一般规律和方法，其内容很丰富，不可能在一本小册子中作全面深入的介绍。作为一个有一定基础的高中学生，通常感到困难的也并不是读不懂别人写的问题解答，而是不知道这个解答是怎样想出来的。为此，作者只准备在这本小册子中着重介绍怎样探索解题途径。至于在范例中略去的其他解题步骤，读者是不难自行补上的。

探索解题途径的过程，往往是一个相当复杂的思维过程，其中牵涉到逻辑学、心理学乃至哲学的许多问题。由于本书是写给学生看的，所以作者只力图把这本小册子写成怎样探索解题途径的实用指南，而不打算涉及逻辑学、心理学与哲学的概念（除非它们是在数学课本上惯用的）。

---

* G・Polya, How to solve it.（已有中译本）

本书是根据作者在1979年湖北省中学生数学竞赛集训班所作的几次专题讲座的提纲写成的。其中有相当一部分问题的解题思路，是作者自己探索解题途径的真实思考过程。当然，有些问题的解法肯定不是最简的，读者完全可以试行作出新的解答。

由于作者水平有限，加之时间仓促，书中不当之处在所难免，望读者及时批评指正。

樊　恺

1983年3月于武汉

目　录

1 引　言

我们知道，数学问题按它的要求可区分为两大类：一类是要求寻找某个未知对象*，属于"求解题"；一类是要求判定某个给定结论，属于"求证题"。对于解决前一类问题，通常叫做"解题"；解决后一类问题，通常叫做"证题"。虽然这两类问题在要求上是这样的不同，但读者在后面将可以看到，解决数学问题的一般思维方法通常同时适用于这两类问题，因此本书将不严格区分使用"解题"与"证题"这两个术语，而用"解题"这个术语泛指解决数学问题。

当然，为了探讨解题的一般规律和方法，只从字面上来理解"解题"这个术语的含义还是不够的。我们必须搞清楚解题实质上究竟意味着什么？为此，我们来考察一下读者很熟悉的几个简单问题的解法。首先，看一个几何证明题的解答过程：

已知：$AB /\!/ CD, EF \perp AB$（图1）。

求证：$EF \perp CD$。

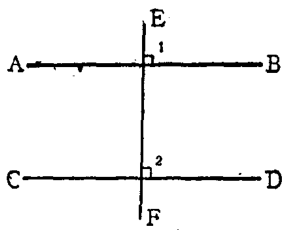


图 1

证明：

* 这里的"对象"不一定就是数，也可以是某个图形、某个结论、甚至是某种程序、某种方法。

(1) $\because$ $AB \parallel CD$(已知)，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$(两直线平行，则同位角相等)。

(2) $\because$ $EF \perp AB$(已知)，

$\therefore$ $\angle 1=90^\circ$(互相垂直的定义)。

(3) $\because$ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 1=90^\circ$(已证)，

$\therefore$ $\angle 2=90^\circ$(等量代换)。

(4) $\because$ $\angle 2=90^\circ$(已证)，

$\therefore$ $EF \perp CD$(互相垂直的定义)。

如果读者注意分析上面的解法，就会发现：解答是由一个一个的步骤组成的，其中的每一个步骤都是把数学的一般原理(定义、公理、定理、法则、定律、公式)运用于问题的条件(或条件的推论)的推理；至于整个解答则是把条件与结论串接起来的若干步骤所组成的序列。而所谓“解题”，实质上就是找出这个序列(尽管我们可以在写法上简化得多)。

上述观点一般是否适用于求解题呢？下面，再看一个代数计算题的解答过程：

化简：$5x+9x^2-10x$.

解：$5x+9x^2-10x$

(1) $9x^2+5x-10x$　　(交换律)

(2) $9x^2+(5x-10x)$　　(结合律)

(3) $9x^2+(5-10)x$　　(分配律)

(4) $9x^2-5x$.

上面的解答是用简便的连等形式表示的，因此读者容易忽略下述几点：

第一，这个问题的已知条件虽是一个明确给出的整式，但问题的要求却不是明确陈述的。不过，只要是学过了整式运算的读者，都会懂得“化简”的含义，那就是：寻找一个与已知

整式恒等的不含同类项的未知整式。

第二，解答仍可分解为一个一个的步骤。例如，(2)其实是：

(2) 由“结合律”得 $9x^2+5x-10x=9x^2+(5x-10x)$。

至于(3)还可以分解为两个更基本的步骤（当然实际在解答时是不用这样做的）：

(3) 由“分配律”得 $5x-10x=(5-10)x$；

由“等量加等量和相等”得 $9x^2+(5x-10x)=9x^2+(5-10)x$。

如果由给定整式到最后的结果，还要利用等式的传递性。

注意到了上述两点，就不难发现：每一个步骤仍是把数学的一般原理运用于已知条件(或中间的结果)的推理；而整个解答则是把已知与未知串接起来的若干步骤所组成的序列。

当然，我们实际上遇到的问题可能要比上面举出的两个例子复杂得多。但一般来说，解决它们的实质却是相同的，即找出一个把问题的条件和目标* 串接起来的步骤的序列；而每一个步骤都是把数学的一般原理运用于条件或条件的推论（中间的结果）的推理。

由此看来，我们不能认为解题就是写出解答。在写出解答之前，应有一个分清条件与目标，并找到它们联系的过程；在写出解答之后，如果是采取认真负责的态度，那还应有一个检验与讨论所得到的解答的过程。

也就是说，解题过程一般应包括：

(1) 审题：正确理解问题，分清问题的条件与目标；

---

* 求解题中所要求寻找的未知对象，以及求证题中所要求判定的给定结论，都是问题的“目标”。所不同的是求解题往往只给出了所求目标的大致范围，而求证题则是明确地给出了要达到的目标。

(2) 分析：寻找条件与目标的联系，探索解题途径；

(3) 解答：写出解答过程；

(4) 校核：检验与讨论所得到的解答。

但是，正如本书的书名所标明的那样，本书并不打算一般地讨论“怎样解题”这个大题目，而旨在集中讨论解题过程的第二个环节，即“怎样探索解题途径”这个相对来说较小的题目。

不过，从上面我们对解题的实质的讨论可以看到，一个学生是否善于探索解题途径，也不是单纯取决于他是否掌握了寻找条件与目标的联系的方法，在很大程度上还取决于他是否有扎实的基本功。

这个道理是相当简单的。因为问题的解答的每一个步骤都是把数学的一般原理运用于条件(或条件的推论)的推理，而要能熟练地把一般原理用于特殊场合，就要深刻理解数学的基本概念、基本理论与基本方法，且具有运用这些基础知识的基本技能和基本技巧。事实上，只要读者具备了这些基本功，对于一个简单问题，如果分清了条件和目标（包括隐含的或没有明确陈述的)，解题途径通常也就清楚了；即使是对于一个复杂问题，在采用各种方法去探索解题途径时，也只有具备了这些扎实的基本功，分析才能一步又一步地有效进行。

然而，正如本书开篇所说的那样，“这是一本叙述探索解题途径的一般方法的书”，而不是一本讲解数学基础知识的书。为此，在下面各节中，我们将假定读者已初步通晓中学的代数与几何*，而着力于进一步提高自己的解题能力。至于那些对课本还没有学好的学生，当然阅读下面介绍的每种方法所解决的

---

* 考虑到当前中学数学教学的实际情况，本书对教材中新增加的微积分方面的内容尚未涉及． 但本书所讲到的探索解题途径的一般方法，对于解决这些方面的数学问题是完全适用的．

前一、二个例子也许不会有困难，甚至还对提高自己的数学成绩有所帮助；但综观全局，我们还是劝他们从培养自己的基本功入手，再结合阅读本书，这样将会收益更大。

2 倒 推

读者在第1节中已清楚地看到，所谓探索解题途径，其实就是寻找联系问题的条件和目标的推理序列．显然，这里既有一个“条理性”的问题，也有一个“灵活性”的问题．其中，尤以条理性为关键，而灵活性则往往寓于条理性之中．

因此，当开始接触一个问题时，我们建议读者：首先不必考虑用一个什么巧法（除非这是自己熟悉的技巧方法）来一下子找到解题途径，而最好是有条不紊地、一步接一步地循着（推理序列的）方向去探索解题途径．至于说到什么巧法，读者在本书的后面将可看到，那往往是进行到哪一步发现的，或者甚至是找到解题途径后回过来发现的．

由于在寻找问题的条件和目标的联系时，条件和目标都可以作为我们思考的出发点，因而前面说到的推理序列的“方向”就有两种：由条件至目标，或由目标至条件．于是，相应地就有两种方向相反的定向思考方法：“顺推法”和“倒推法”*。

（一）顺推法

由条件至目标的定向思考方法，叫做顺推法．

一般来说，问题的解答通常都是按由条件至目标，既按顺推的方式写的．为了说明问题，我们先引用一个简单的例子：

* 在有的数学书籍中，“顺推法”和“倒推法”也称为“综合法”和“分析法”．但“综合”和“分析”在另外的场合还有各种很不相同的意义，因此本书避而不用．

【范例 1】 试证：平行四边形的对角线互相平分。

已知：▱$ABCD$，O是对角线AC和BD的交点(图2)。

求证：$OA=OC$，$OB=OD$。

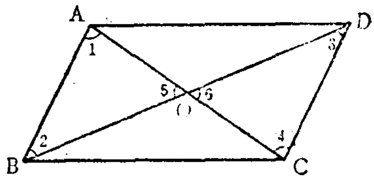


图 2

证明：∵ $ABCD$是平行四边形(已知)，

∴ $AB\parallel DC$，$AB=DC$ (平行四边形的对边平行且相等)。

又由 $AB\parallel DC$ (已证)，

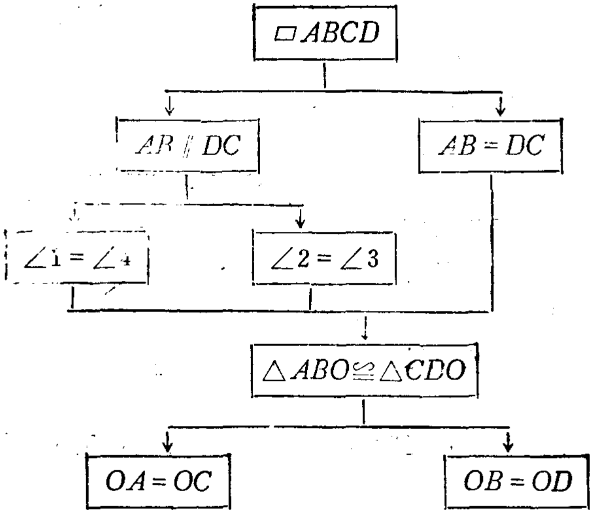
可得 $\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$ (两直线平行，则内错角相等)。

在$\triangle ABO$和$\triangle CDO$中，$\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$，$AB=DC$ (已证)，

∴ $\triangle ABO\cong\triangle CDO(ASA)$。

∴ $OA=OC$，$OB=OD$(全等三角形的对应边相等)。证毕。

上面的解答，就是按由条件至目标的方式写出的。因此，当读者(特别是初学者)揣测这个解答是怎样想出来的时，往往就会运用(也许是不自觉地运用)顺推法：



为了简明地表示出这种由条件至目标的顺推的思路，也常用下面的格式写出前面的证明过程：

$$\square ABCD \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} AB \parallel DC \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \angle 1 = \angle 4 \\ \angle 2 = \angle 3 \end{array}\right. \\ AB = DC \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \triangle ABO \cong \triangle CDO \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD. \end{array}\right.$$

正是由于顺推法的思路与解答的书写具有一致性，因此读者最开始学习(更准确地说是模仿)的探索解题途径的方法可能就是顺推法．留心的读者还会发现：在数学课本中，甚至早已明确地把解决很多所谓“常规”类型问题的顺推程序写成了步骤，只要依样画葫芦便成．例如，解一元一次方程的步骤就是：去分母，去括号，移项，合并同类项，两边同除以未知数的系数．即使有些问题不能完全归结为这些有明确解题步骤的类

型，但只要解过一定数量的类似的(或接近的)问题，仍然可以凭借经验，从条件开始顺推，把问题直截了当地加以解决．大抵说来，课本中每章、节后结合所讲授的基础知识所安排的练习和习题，都是属于这种情况．

尽管如此，读者应该认识到，用顺推法寻找不熟悉的问题的解题途径，毕竟不是十分相宜的．这是因为由一个条件可以推出的推论通常有若干个，而由这些推论可以推出的推论又可能有若干个．在这些思路中，哪些是通向目标的“直路”？哪些是“弯路”？还有哪些是“死路”？对于一个复杂的问题，要这样一一判明并不总是可行的．因此，大多数人在用顺推法解不熟悉的问题时，只好把各种可能的推理随机运用到条件上，无目标地这样试试，那样试试，结果自然不易奏效．

正是基于上述原因，在本书中将不讲述如何单独使用顺推法，而是在说到倒推法或其他的方法时，再讲述如何结合使用顺推法．

（二）第一种倒推法

由目标至条件的定向思考方法，叫做倒推法．

初学者在解题时通常习惯于从头开始，并且认定开头就是已知条件．但是，读者在第(一)小节中已看到，解题中这个习惯并不合适．如果不把注意力集中于目标，而去作一大堆推理，那就犹如大海里盲目行船，胡碰乱撞．

其实，在探索解题途径时，目标往往是比条件更好的出发点．对目标的性质了解得越多，对达到目标的方式和方法就看得越清楚．

为此，我们可以倒过来进行：假定目标已达到，把它作为条件，倒过来进行推理，直至得到已知事实为止．这就是我们