高考数学命题标准化题型练习

（修订本）

选解

中山大学数学系 编

中山大学出版社

高考数学命题标准化题型练习（修订本）选解

中山大学数学系编

中山大学出版社

高考数学命题标准化题型练习（修订本）选解

中山大学数学系编

*

中山大学出版社出版发行

广东省新华书店经销

广州新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本　7印张 14.8 万字

1988年11月第1版　1988年11月第1次印刷

印数：1—30 000册

ISBN 7-306-00128-0

G·33　定价：1.30元

前　言

《高考数学命题标准化题型练习》及其修订本的出版，受到广大读者的欢迎，许多中学把它用作高中各年级数学的教学参考书。该书出版后，不断有读者要求编写该书的题解出版。为适应需要，我们从该书的修订本中挑选了部分具有代表性和启发性的题进行解答，在解答中注意分析能力与判断能力的培养和解题思路与解题方法的开拓，希望有助于学生对基础知识与基本技能的巩固和解题能力的提高。

本书的各个章节及其标题与原书修订本的相同，其题号则自成顺序，但为方便读者对照，在每个题号的后面均写上该题在原书中的题号。

书中若有错漏或不妥之处，请读者不吝指正。

编　者

1988.7

目　录

第一部分　代　数

第二部分　立体几何

第三部分　平面解析几何

第一部分　代　数

一、幂函数、指数函数、对数函数

1．（14）如果 $f(x+1)=x^2-5x+4$，则 $f(x)=$

（A）$x^2-7x+10$。　　（B）$x^2-7x-10$。

（C）$x^2+7x-10$。　　（D）$x^2+7x+10$。

【解】（方法一）　令 $x=0$，则 $x+1=1$，即 $f(1)=4$。设 $x=1$，求出各选择项的函数值，知只有（A）当 $x=1$ 时函数值为 4。　　应选（A）

（方法二）　因为

$f(x+1)=x^2-5x+4=(x+1)^2-7(x+1)+10$，

所以 $f(x)=x^2-7x+10$。　　应选（A）

2．（21）设函数 $y=f(x)$ 的定义域是正实数集，且具有性质 $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$，又已知 $f(8)=3$，则 $f(\sqrt{2})=$

（A）1。　　（B）$-\frac{1}{2}$。

（C）$\frac{1}{2}$。　　（D）$\frac{1}{4}$。

分析　在高中数学中，定义在正实数集，且具有性质 $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ 的函数，只有对数函数。虽然题干并未说明这个函数是对数函数，但作为选择题，利用符合条件的特殊函数去判别哪个选择项是正确的，是允许的。

【解】（方法一） 因为 $f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=2f(2)$，且 $f(8)=f(4\cdot 2)=f(4)+f(2)=3f(2)=3$，所以 $f(2)=1$，又 $f(2)=f(\sqrt{2})+f(\sqrt{2})=2f(\sqrt{2})=1$，

所以 $f(\sqrt{2})=\frac{1}{2}$。 应选（C）

（方法二） 因为对数函数满足题目所给条件，可令 $y=\log_a x$。由 $\log_a 8=3$，可得 $a=2$，

则 $\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$。 应选（C）

3. （23）设函数 $y=f(x)$ 的定义域是自然数集，具有性质 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$，又已知 $f(1)=1$，则 $f(25)=$

（A）326。 （B）325。

（C）324。 （D）323。

【解】（方法一）令 $y=1$，则有

$f(x+1)=f(1)+f(x)+x=f(x)+x+1$，

所以 $f(x+1)-f(x)=x+1$。

x 分别取 $(n-1)$，$(n-2)$，…，1，

可得：$f(n)-f(n-1)=n$，

$f(n-1)-f(n-2)=n-1$，

……

$f(2)-f(1)=2$。

把所有式子相加，得：

$$f(n)-f(1)=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2。$$

所以 $f(n)=n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$，

当 $n=25$，有 $f(25)=\frac{25\cdot 26}{2}=25\cdot 13=325$。应选（B）

（方法二） 令 $y=1$，则有

$f(x+1)=f(x)+x+1$,

所以 $f(2)=f(1)+1+1=3$,

$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)+2=3+1+2=6$,

$f(5)=f(2+3)=f(2)+f(3)+6=3+6+6=15$,

$$f(20)=f(10+10)=f(10)+f(10)+100$$
$$=110+100=210,$$

$$f(25)=f(20+5)=f(20)+f(5)+100=210+15+100$$
$$=325。$$

应选(**B**)

4. (**25**) 函数 $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ 的定义域是

(A) $(-\infty, -1)$。(B) $[1, +\infty)$。

(C) $(-1, 1]$。 (D) $(-\infty, -1)\cup[1, +\infty)$。

【解】 (方法一) 取特殊值 $x=-\frac{1}{2}$，则 $\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=-3$ 与函数的定义不符，可否定(C)；又取特殊值 $x=-2$，则 $\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{-1}=3$，因此可否定(B)；再取特殊值 $x=2$，则 $\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1}{3}$，又可否定(A)。

应选(**D**)

(方法二) 由函数定义，知 $\dfrac{x-1}{x+1}\geqslant0$，故 $(x-1)(x+1)\geqslant0$，且 $x\neq-1$，解之可得 $x<-1$ 或 $x\geqslant1$。所以定义域是 $(-\infty, -1)\cup[1, +\infty)$。 应选(**D**)

5. (**30**) 函数 $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$ $(x\geqslant0)$ 的值域是

(A) $[0, 1]$。　　(B) $[0, +\infty)$。

(C) $[0, 2]$。　　(D) $[1, +\infty)$。

【解】（方法一）因为 $x\geqslant 0$，所以 $\frac{4x}{4+x^2}\geqslant 0$，

又 $\frac{4x}{4+x^2}=\frac{2(2x)}{2^2+x^2}\leqslant 1$，且当 $x=2$ 时取等号，所以函数的值域为 $[0, 1]$。　　应选(A)

（方法二）　由 $y=\frac{4x}{4+x^2}$，得出

$$4y+yx^2-4x=0,$$

由于 x 是实数，所以判别式 $\triangle\geqslant 0$，

即　$16-16y^2\geqslant 0$，解得　$-1\leqslant y\leqslant 1$，

但　$y\geqslant 0$，所以值域为 $[0, 1]$。　　应选(A)

6．(32) 函数 $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 的值域是

(A) $(-\infty, +\infty)$。　　(B) $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$。

(C) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$。　　(D) $[3, +\infty)$。

【解】因为 $yx^2+xy+y-x^2+x-1=0$，即

$(y-1)x^2+(y+1)x+(y-1)=0$，

又因为 x 是实值，所以关于 x 的二次方程的判别式必须不小于 0，即

$(y+1)^2-4(y-1)^2\geqslant 0$，

或 $y^2+2y+1-4y^2+8y-4\geqslant 0$，

整理可得：$3y^2-10y+3\leqslant 0$，

即　$(3y-1)(y-3)\leqslant 0$，所以有 $\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$。

特别地当 $x=1$ 时，$y=\frac{1}{3}$，当 $x=-1$ 时，$y=3$，

即所给函数的值域为 $\left[\frac{1}{3}，3\right]$。　　应选（B）

7．（36）给出函数 $y=\frac{|x|}{x}$，则这个函数

（A）是奇函数。　（B）是偶函数。

（C）恒为常数。　（D）既不是奇函数又不是偶函数。

【解】 利用函数 $y=|x|$ 的性质及奇、偶函数的定义就可判别。

当 $x>0$ 时，$y=\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$，

当 $x<0$ 时，$y=\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$，

因此可以否定（B）、（C）；

当 $x>0$ 时，有 $-x<0$。若表示 $f(x)=\frac{|x|}{x}$，

则有 $f(-x)=-1=-f(x)$．同理．当 $x<0$ 时，$-x>0$，

亦有 $f(-x)=1=-f(x)$。所以是奇函数。　应选（A）

若由 $y=\begin{cases}-1 & 当\ x<0\ 时\\ 1 & 当\ x>0\ 时.\end{cases}$

得出函数的图象对称于坐标原点，因此该函数是奇函数也成。

8．（41）已知函数 $f(x)=ax^3+bx+10$，其中 a、b 是常数，且 $f(1)=5$，则 $f(-1)=$

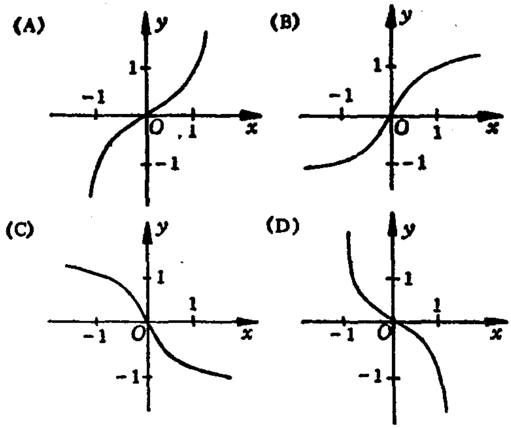
（A） 5。　（B） -5。

（C） 10。　（D） 15。

【解】 （方法一） 令 $g(x)=f(x)-10=ax^3+bx$，
显然 $g(x)$ 是奇函数，且 $g(1)=f(1)-10=-5$，
所以 $g(-1)=-g(1)=5$，而 $g(-1)=f(-1)-10=5$，
所以 $f(-1)=15$。 应选（D）

（方法二） 因为 $f(1)=a+b+10=5$，
所以 $a+b=-5$，而 $f(-1)=-a-b+10=-(a+b)+$ $+10=5+10=15$。 应选（D）

9．（42）函数 $y=-\sqrt{x^3}$ 的大致图象是



【解】 取 $x=1$，则 $y=-1$，即函数 $y=-\sqrt{x^3}$ 的图象经过点 $(1,\ -1)$，因此可以否定（A）、（B）；又取 $x=8$，则 $y=-2$，函数图象经过点 $(8,\ -2)$，又可以否定（D）。 应选（C）

10．（46）函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 0)$ 的反函数是

（A）$y=-\sqrt{1-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$。

（B）$y=-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$。

（C）$y=\sqrt{1-x^2}$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$.

（D）$y=\sqrt{1-x^2}$　$(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

【解】 因为 $y=\sqrt{1-x^2}$　$(-1\leqslant x\leqslant 0)$，

所以 $y^2=1-x^2$　$(-1\leqslant x\leqslant 0)$.

即　$x^2=1-y^2$，由于 $-1\leqslant x\leqslant 0$，

所以 $x=-\sqrt{1-y^2}$　$(0\leqslant y\leqslant 1)$.

所求的反函数为 $y=-\sqrt{1-x^2}$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$.

应选（A）

11.（49）若函数 $y=\dfrac{ax+1}{4x+3}\left(x\neq-\dfrac{3}{4}\right)$ 的反函数是 $y=\dfrac{1-3x}{4x-2}\left(x\neq\dfrac{1}{2}\right)$，则常数 a 的值是

（A）-2　　（B）2.

（C）-2或2.　　（D）1.

分析　因为函数 $y=\dfrac{1-3x}{4x-2}$ $\left(x\neq\dfrac{1}{2}\right)$的反函数就是 $y=\dfrac{ax+1}{4x+3}$ $\left(x\neq-\dfrac{3}{4}\right)$，求出 $y=\dfrac{1-3x}{4x-2}$ $\left(x\neq\dfrac{1}{2}\right)$的反函数后与 $y=\dfrac{ax+1}{4x+3}$比较就可确定 a 值.

【解】 因为　$4xy-2y=1-3x$，

所以　$4xy+3x=1+2y$，即　$x(4y+3)=1+2y$.

又　$x\neq\dfrac{1}{2}$，所以　$4y+3\neq 0$，

故有　$x=\dfrac{1+2y}{4y+3}$. 即所求的反函数为

$y=\dfrac{2x+1}{4x+3}$ $\left(x\neq-\dfrac{3}{4}\right)$，因此可得 $a=2$.　　应选（B）

12．（52）函数$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{|x-1|}$是区间$A$上的减函数，则$A$是

（A）$(-\infty, 1]$。　　（B）$(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$。

（C）$(-\infty, +\infty)$。　（D）$[1, +\infty)$。

【解】（方法一）取$x_1=-3$，$x_2=-2$，显然

$x_1<x_2$，而$\left(\frac{2}{3}\right)^{|x_1-1|}=\left(\frac{2}{3}\right)^4$，$\left(\frac{2}{3}\right)^{|x_2-1|}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$。

由于$0<\frac{2}{3}<1$，故$\left(\frac{2}{3}\right)^4<\left(\frac{2}{3}\right)^3$，

即$\left(\frac{2}{3}\right)^{|x_1-1|}<\left(\frac{2}{3}\right)^{|x_2-1|}$。

因此函数$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{|x-1|}$在$(-\infty, -1)$上不是减函数，

可以否定（A）、（B）、（C）。　　应选（D）

（方法二）因为$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{|x-1|}$的减函数区间是

函数$y=|x-1|$的增函数区间，而

$$y=|x-1|=\begin{cases}x-1 & \text{当 } x\geq 1,\\ -x+1 & \text{当 } x<1.\end{cases}$$

因此，在区间$[1, +\infty)$上，函数$y=|x-1|$是增函数，

即在区间$[1, +\infty)$上，函数$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{|x-1|}$是减函数。

应选（D）

13．（54）设a是实数，且$0<a<1$，则函数$y=\sqrt{\log_a(x-1)}$的定义域是

（A）$(1, +\infty)$。　　（B）$(2, +\infty)$。

（C）$[2, +\infty)$。　　（D）$(1, 2]$。

【解】（方法一）取$x=3$，则$\log_a(x-1)=\log_a 2$。

由于$0<a<1$，所以$\log_a 2<0$，因此可否定(A)、(B)、(C)。 应选(D)

（方法二） 由函数的定义，应满足条件：

$$\begin{cases}\log_a(x-1)\geqslant 0 & ①\\ x-1>0 & ②\end{cases}$$

由②可得：$x>1$，

由于$0<a<1$，由①可得：$x-1\leqslant 1$，即$x\leqslant 2$，综合得$1<x\leqslant 2$。 应选(D)

14.（56）函数$y=\log_{(3-x)}(x-1)$的定义域是

(A) $(1, +\infty)$。 (B) $(1, 3]$。

(C) $(1, 2)\cup(2, 3]$。 (D) $(1, 2)\cup(2, 3)$。

【解】（方法一） 取$x=2$，则$3-x=1$，而对数函数的底数不能为1，因此函数的定义域不能包含数2，因此可否定(A)、(B)；又取$x=3$，则$3-x=0$，对数函数的底数也不能为0，因此又可否定(C)。 应选(D)

（方法二） 由对数函数的定义，应满足条件：

$$\begin{cases}x-1>0,\\ 3-x>0,\ 且 3-x\neq 1.\end{cases}$$

因此可解得$1<x<3$，且$x\neq 2$，即函数的定义域是$(1, 2)\cup(2, 3)$。 应选(D)

15.（59）函数$y=\lg(x^2-4x+14)$ $(x\in R)$的值域是

(A) $[0, +\infty)$。 (B) $[1, +\infty)$。

(C) $(-\infty, +\infty)$。 (D) $[0, 1]$。

【解】（方法一） 因为$y=x^2-4x+14=(x-2)^2+10$，因此，当$x=2$时有最小值10，而函数$y=\lg x$在$(0, +\infty)$上是增函数，因此当$x=2$时，函数$y=\lg(x^2-4x+14)$有最小值1。 应选(B)

（方法二） 令 $\lg(x^2-4x+14)=0$，则 $x^2-4x+14=1$，即 $x^2-4x+13=0$。这个二次方程的判别式 $\Delta=16-4\cdot13<0$，即对于任意实数 x，$\lg(x^2-4x+14)$ 均不能等于 0，因此所给函数的值域不能包含数 0，这样可否定(A)、(C)、(D)。 应选(B)

16．(60) 若 $f(x)=-\log_5 x\ (x>0)$，则 $f^{-1}(x)$ 的定义域是

(A) $(0,+\infty)$。 (B) $(-\infty,0)$。

(C) $(-\infty,+\infty)$。 (D) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。

【解】 因为函数的值域就是它的反函数的定义域，而 $f(x)=-\log_5 x\ (x>0)$ 的值域易求得为 $(-\infty,+\infty)$，因此 $f^{-1}(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。 应选(C)

17．(63) 已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x}{1+2^x}\ (x\in R)$，则 $f^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$ 的值是

(A) $\log_2 3$。 (B) $-\log_2 3$。

(C) -2。 (D) $-\log_2 5$。

【解】（方法一） 由函数及它的反函数之间的关系可知：$\dfrac{1}{4}=\dfrac{2^x}{1+2^x}$，解得 $2^x=\dfrac{1}{3}$，所以 $x=\log_2\dfrac{1}{3}=-\log_2 3$。

应选(B)

（方法二） 因为函数 $y=\dfrac{2^x}{1+2^x}\ (x\in R)$ 的反函数是 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}\ [x\in(0,1)]$，因此当 $x=\dfrac{1}{4}$ 时有：

$$y=\log_2\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\log_2\frac{1}{3}=-\log_2 3.$$ 应选(B)

18．(65) 设$f(x)$是奇函数，当$x\in(-\infty, 0)$时，$f(x)=-x\cdot\lg(1-x)$。则当$x\in(0, +\infty)$时，$f(x)=$

(A) $-x\cdot\lg(1+x)$。 (B) $-x\cdot\lg(x-1)$。

(C) $x\cdot\lg(1+x)$。 (D) $x\cdot\lg(x-1)$。

分析 本题是求分段函数的表达式，最容易忽略题干中“$f(x)$是奇函数”这一条件，因此将$x\in(-\infty, 0)$时的表达式中的$(-x)$换成x而得出错误的结论。从本质上说，以上的错误反映出没有对函数的概念作深入的理解，因为条件“当$x\in(-\infty, 0)$时，$f(x)=-x\times\lg(1-x)$”清楚地表明，只有自变量x在$(-\infty,0)$时，函数的表达式才是$f(x)=-x\cdot\lg(1-x)$，而当x在$(0, +\infty)$时，函数的表达式尚未给出，需要运用题干的条件去求出的。

【解】 因为$f(x)$是奇函数，所以有性质$f(-x)=-f(x)$，当$x\in(0,+\infty)$时，则$-x\in(-\infty, 0)$，因此有：$f(-x)=x\cdot\lg(1+x)$〔注意：因为$-x\in(-\infty,0)$，由题给条件只要将$-x$代替x就成。〕因此$f(x)=-f(-x)=-x\cdot\lg(1+x)$，即当$x\in(0, +\infty)$时，$f(x)=-x\cdot\lg(1+x)$。 应选(A)

19．(66) 设有函数 $f(x)=\dfrac{x(e^x-e^{-x})}{2}$， $g(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$，则

(A) $f(x)$是奇函数而 $g(x)$是偶函数。

(B) $f(x)$是偶函数而 $g(x)$是奇函数。

(C) $f(x)$和 $g(x)$都是奇函数。

(D) $f(x)$和 $g(x)$都是偶函数。

【解】（方法一） 因为$f(2)=e^2-e^{-2}$，$f(-2)=-(e^{-2}-$

$e^2)=e^2-e^{-2}$，显然 $f(2)=f(-2)$，因此，$f(x)$ 不可能是奇函数，从而可否定(A)、(C)；又 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\lg\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\lg\frac{1}{3}=-\lg 3$，$g\left(-\frac{1}{2}\right)=\lg\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=\lg 3$，所以 $g\left(\frac{1}{2}\right)\neq g\left(-\frac{1}{2}\right)$。因此 $g(x)$ 不可能是偶函数而否定(D)。

应选(B)

（方法二） 因为

$$f(-x)=\frac{-x(e^{-x}-e^{x})}{2}=\frac{x(e^{x}-e^{-x})}{2}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶 函 数。又 $g(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-g(x)$，所以 $g(x)$ 是奇函数。 应选(B)

20.（68）下列所给的各对函数中，它们的图象关于直线 $y=x$ 对称的是

（A） $y=\log_2 x$ 和 $y=\lg_{\frac{1}{2}} x$。

（B） $y=\log_2 x$ 和 $y=2^{-x}$。

（C） $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 和 $y=2^{x}$。

（D） $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 和 $y=2^{-x}$。

分析 因为函数的图象和它的反函数的图象是关于直线 $y=x$ 对称的，因此求出 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的反函数就可判别。或者，点 (a, b) 关于直线 $y=x$ 对称的点