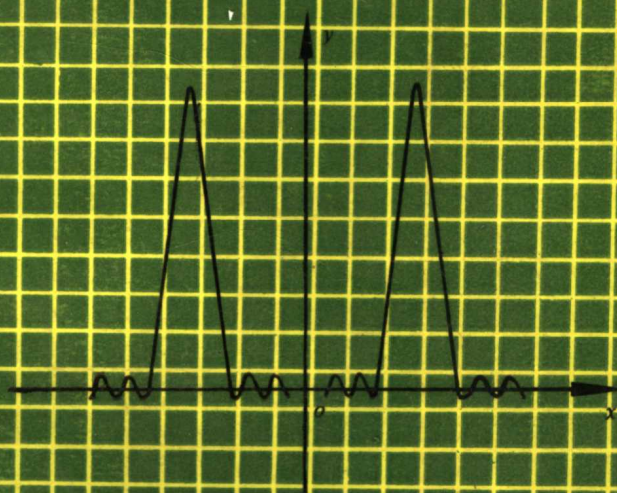


δ -函数及其应用

赵为礼 张 卿 杨有发 编著



吉林科学技术出版社

δ -函数及其应用

赵为礼 张 卿 杨有发 编著

吉林科学技术出版社

内 容 提 要

本书较系统地论述了 δ -函数的数学理论和在各科技领域内的广泛应用. 全书共八章, 其中前四章侧重阐述 δ -函数的数学理论及其在“积分变换”、“数学物理方程”等有关数学方面的应用; 后四章着重介绍 δ -函数在“随机信号分析”、“系统工程”、“数据处理”、“量子力学”、“经典物理”、“光学衍射”、“振动理论”、“地球物理勘探”、“水文地质”、“地震预报”等科技领域内的种种应用.

该书可作为理工科大、专院校高年级学生、研究生和教师的教学参考书. 对于从事应用科学的研究人员以及各科技领域内的工程技术人员来说, 也是一本较好的工具书

δ -函数及其应用

赵为礼 张 卿 杨有发 编

责任编辑: 王维义

封面设计: 张沐沉

出版	吉林科学技术出版社	850×1168 毫米 32 开本	12,125 印张
发行		插页 4	328,000 字
		1992 年 6 月第 1 版	1992 年 6 月第 1 次印刷
制版	中海直公司长春科研所	印数: 1—1200 册	定价: 7.80 元
印刷	东北师范大学印刷厂	ISBN 7-5384-0977-7/O. 48	

前 言

要想把 δ -函数的理论弄清楚,就必须学习和阅读许多抽象和繁难的泛函分析、广义函数的理论.然而,多数非数学专业的科技人员,又难以有精力和时间作到这一点,对从事电讯、电子电路理论、线性系统分析理论、振动理论、量子力学、天线理论、信息分析等科技人员,以及许多工程技术人员也难以掌握应用 δ -函数这一重要的数学工具.同时,在国内外浩瀚的书海之中,还没见到有对 δ -函数的理论加以系统地论述并给出其广泛应用的,在这种形势下,写出一本具有既能尽量不涉及或少涉及抽象的数学理论,又能较为系统、直观地阐述 δ -函数的理论和应用的书,使广大非数学专业的科技人员能很好地掌握和应用 δ -函数这个数学工具便是编著者写作的立意.

为了更好地实现这一宿愿,我们在写作过程中,力求做到以下几点:

1. 对 δ -函数的数学理论进行较为深入系统的论述.不仅通过具体实例深入浅出地引进 δ -函数的概念,详细地阐述了它的物理背景和几何意义;而且推导论证了 δ -函数的全部性质,并对与 δ -函数有关的一些基本概念及其数学理论,也进行了较为深入的讨论.

2. 我们不仅讨论了 δ -函数在一些数学领域内的应用,而且,尽量将 δ -函数在某些重要科技领域(如数据处理、振动理论、经典场论、量子力学、地球物理勘探、水文地质、电路通讯等方面)的实际应用汇集起来,使得从事研究和应用 δ -函数的有关人员,尽量开阔视野,掌握全貌,读后确有较大收获.

3. 全书力求由浅入深、循序渐进、通俗易懂,即使在用到较高深

的数学理论,如广义函数和泛函分析时,我们也恪守这一原则,因此,只要读者具有高等数学的知识水平,就可以读懂本书的基本内容.本书为了说明 δ -函数在经典场论、近代物理等方面的应用,不得不涉及到数学物理方程和量子力学中的一些内容,然而,读者只要参看书后所列的有关参考文献,也不难读懂.

在内容安排上,本书第一章是全书的基础,我们系统地阐述了 δ -函数的数学理论,最后又浅显、简捷地借助于广义函数理论,奠定了 δ -函数的理论基础.第二、三、四各章讨论了 δ -函数在数学上的某些应用.其中包括积分变换、数学物理方程中与 δ -函数关系极为密切的重要方法.因此,本书也可作为理工院校高年级学生和研究生,学习数学物理方程和应用数学课的重要参考书.本书后四章主要研究了 δ -函数在数字信号处理、振动理论、地球物理勘探及其他一些科技领域中的应用.

本书共八章,第一、二、四章,由吉林大学数学系赵为礼副教授撰写;第三、五、六、八章由长春地质学院数学教研室张卿副教授撰写;第七章由长春地质学院应用地球物理系杨有发副教授撰写.全书由张卿编审和校订.

我们在写作过程中,曾得到长春地质学院应用地球物理系何樵登教授、基础科学系数学教研室杨天行教授的热情鼓励和帮助,吉林大学数学系欧维义教授,也给予大力支持,在此一并致谢.

虽然编著者为了写本书,曾博览了大量的资料和书籍,经过了长期的准备,作了大量的推导论证,数易其稿,试图别开生面,力求写出特色,但是, δ -函数毕竟是非常抽象的非普通函数,涉及的专门知识较多,不妥之处,甚至是错误在所难免,殷切期望读者不吝指正.

编 著 者

1990年10月于长春

目 录

第一章 δ -函数	(1)
§ 1.1 δ -函数的定义	(1)
§ 1.2 弱收敛	(5)
1.2.1 弱收敛的定义	(5)
1.2.2 把 δ -函数看作普通函数的弱极限	(6)
1.2.3 磨光算子	(14)
§ 1.3 δ -函数的几何意义与物理意义	(21)
1.3.1 几何意义	(21)
1.3.2 物理意义	(22)
§ 1.4 间断函数的导数	(25)
1.4.1 弱相等的概念	(25)
1.4.2 间断函数的导数	(26)
§ 1.5 δ -函数的性质	(32)
§ 1.6 高维 δ -函数	(40)
1.6.1 高维 δ -函数的定义	(41)
1.6.2 高维 δ -函数的性质	(43)
1.6.3 高维 δ -函数的几何意义与物理意义	(55)
1.6.4 n 维磨光算子	(59)
§ 1.7 δ -函数的数学理论简介	(61)
1.7.1 有关泛函的一些基本概念	(62)
1.7.2 δ -函数与广义函数的定义	(66)
1.7.3 广义函数的基本运算	(70)
第二章 杜哈美(Duhamel)原理	(79)
§ 2.1 迭加原理	(79)
§ 2.2 一些简例的启示	(82)
§ 2.3 杜哈美(Duhamel)原理	(88)

2.3.1	杜哈美(Duhamel)原理及其证明	(88)
2.3.2	杜哈美(Duhamel)原理的实质、意义及其适用范围	(90)
§ 2.4	杜哈美(Duhamel)原理的物理意义	(92)
§ 2.5	杜哈美(Duhamel)原理的应用举例	(97)
§ 2.6	杜哈美(Duhamel)原理的另一种形式	(101)
第三章	积分变换	(106)
§ 3.1	傅氏变换	(107)
3.1.1	傅氏变换的定义	(107)
3.1.2	傅氏变换的性质	(109)
3.1.3	多元函数的傅氏变换	(121)
3.1.4	傅氏变换法的应用举例	(127)
§ 3.2	拉氏变换	(134)
3.2.1	拉氏变换的概念	(134)
3.2.2	拉氏变换存在定理	(136)
3.2.3	拉氏变换的性质	(140)
3.2.4	拉氏逆变换的求法	(148)
3.2.5	多元函数的拉氏变换	(154)
3.2.6	拉氏变换法的应用举例	(156)
第四章	解数学物理方程的格林(Green)函数法	(167)
§ 4.1	初值问题的 Green 函数与 Green 函数法	(168)
4.1.1	热传导方程初值问题的 Green 函数与 Green 函数法	(168)
4.1.2	波动方程初值问题的 Green 函数与 Green 函数法	(179)
4.1.3	Green 函数概念的进一步引伸	(194)
§ 4.2	位势方程定解问题的 Green 函数与 Green 函数法	(207)
4.2.1	三维位势方程定解问题的 Green 函数法	(207)
4.2.2	二维位势方程定解问题的 Green 函数法	(230)
§ 4.3	混合问题的 Green 函数与 Green 函数法	(238)
第五章	δ-函数在数字信号处理中的应用	(259)
§ 5.1	数字信号处理简介	(259)

§ 5.2	任意离散信号均可表示为 δ -函数的加权和	(261)
5.2.1	单位脉冲序列的概念	(261)
5.2.2	任意序列均可表示为脉冲序列的加权和	(262)
5.2.3	线性时不变系统和离散褶积	(262)
§ 5.3	等间隔脉冲序列的谱仍是脉冲序列	(265)
5.3.1	抽样序列的频谱	(266)
5.3.2	连续谱与离散谱之间的关系	(268)
5.3.3	抽样定理	(269)
5.3.4	离散傅氏变换(DFT)	(272)
5.3.5	离散傅氏逆变换	(274)
5.3.6	离散傅氏变换的性质	(278)
5.3.7	快速傅氏变换(FFT)简介	(280)
5.3.8	δ -函数在 $\mathcal{Z}$ 变换中的应用	(284)
§ 5.4	希尔伯特(Hilbert)变换	(292)
5.4.1	实连续信号的希尔伯特变换	(294)
5.4.2	实离散信号的希尔伯特变换	(297)
5.4.3	$\mathcal{Z}$ 变换谱的希尔伯特变换	(301)
5.4.4	周期序列傅氏谱的希尔伯特变换	(301)
第六章	δ -函数在振动理论中的应用	(304)
§ 6.1	线性系统	(304)
6.1.1	线性方程的经典解法	(306)
6.1.2	脉冲响应法	(308)
6.1.3	频率响应法	(310)
§ 6.2	用 δ -函数表示系统所受的力	(313)
§ 6.3	持续力表示为瞬时力的迭加	(319)
第七章	δ -函数在地球物理勘探中的应用	(327)
§ 7.1	应用 δ -函数描述地震源的脉冲波	(327)
§ 7.2	地震波波动理论的讨论	(329)
7.2.1	标量介质——时间简谐震源情况下二维波动理论 讨论中 δ -函数的应用	(329)

7.2.2	标量介质——脉冲震源情况下 δ -函数的应用	(330)
7.2.3	弹性介质——线力情况下 δ -函数的应用	(331)
7.2.4	基尔霍夫方程的积分解	(333)
§ 7.3	δ -函数在地球物理正演模拟问题中的应用	(336)
§ 7.4	地球物理反演问题中 δ -函数的应用	(337)
7.4.1	一维声波方程的波恩(Born)反演	(338)
7.4.2	三维声波方程的波恩(Born)反演	(339)
7.4.3	基尔霍夫积分偏移与频率-波数域偏移法(F-K)等价性的证明	(341)
7.4.4	拉冬(Rodon)变换	(342)
§ 7.5	δ -函数在地球物理勘探数据处理中的应用	(343)
7.5.1	系统特性的描述	(343)
7.5.2	数字滤波褶积公式的证明	(344)
7.5.3	δ -函数在脉冲反褶积中的应用	(345)
7.5.4	提高信号信噪比的处理方法	(346)
7.5.5	信号采样过程的数学描述	(350)
7.5.6	求取地层反吸收因子的方法	(353)
7.5.7	地震子波的整形处理方法	(353)
第八章	δ -函数的其他应用	(356)
§ 8.1	电动力学的基本方程和辐射能量的计算公式	(356)
8.1.1	电动力学的基本方程	(356)
8.1.2	电子的辐射能量	(359)
§ 8.2	富克尔-普朗克(Fokker-Planck)方程	(362)
§ 8.3	地下水非稳定流中群孔同时抽水的干扰井的计算公式	(366)
§ 8.4	δ -函数在光学衍射中的应用	(368)
§ 8.5	量子力学中粒子动量的平均值	(372)
参考文献		(376)

第一章 δ -函数

由于许多物理现象,具有脉冲性质,人们才提出并研究了 δ -函数.一般人初次接触 δ -函数这一概念时,都会有不可思议之感;可是,在比较系统而深入地讨论了 δ -函数的理论之后,也就会觉得顺理成章了.

本章主要是通过具体实例,由浅入深地引出了 δ -函数的概念,指出了 δ -函数的几何意义及其物理背景,论证了 δ -函数的性质,并把一维 δ -函数的有关结论,推广到高维的情形.最后借助于广义函数理论,初步奠定了 δ -函数的数学基础.

§ 1.1 δ -函数的定义

δ -函数是一类物理背景十分明显,应用相当广泛,而又有别于普通函数的函数.狄拉克(Dirac)曾称之为“非正常函数”.为了比较自然地引进 δ -函数,以便读者不仅能从形式上接受,而且能正确理解这个非常重要的概念,我们首先看两个浅显的实例.

例 1.1 设在 x 轴上除点 $x=0$ 以外的其它各点处,都没有电荷分布,而于点 $x=0$ 处,集中分布一单位电荷,试确定 x 轴上各点的电荷分布密度 $\rho(x)$.

解 设 $[a, b]$ 为 x 轴上某区间, $Q[a, b]$ 表示展布于 $[a, b]$ 上的电荷总量.若令 $\Delta=b-a$,则易见

$$\rho(0) = \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ 0 \in [a, b]}} \frac{Q[a, b]}{\Delta} = \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ 0 \in [a, b]}} \frac{1}{\Delta} = \infty.$$

当 $x \neq 0$ 时,

- $x \in [a, b]$ 表示点 x 属于区间 $[a, b]$;而 $x \notin [a, b]$ 表示点 x 不属于区间 $[a, b]$.

$$\rho(x) = \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ \xi \in [a,b]}} \frac{Q[a,b]}{\Delta} \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ \xi \in [a,b]}} \frac{0}{\Delta} = 0$$

亦即 x 轴上各点的电荷分布密度函数为

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时} \\ \infty & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (1-1)$$

此外,不难看出,还有

$$Q(-\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1 \quad (1-2)$$

例 1.2 设在 x 轴上除点 $x=\xi$ 外的其它各点处,都没有物质分布,而于点 $x=\xi$ 处集中分布一单位质量的物质. 试确定 x 轴上各点处的物质分布密度 $\mu(x)$.

解 设 $[a,b]$ 为 x 轴上某区间, $m[a,b]$ 表示展布于 $[a,b]$ 上的物质的总质量. 若令 $\Delta=b-a$, 则易见

$$\mu(\xi) = \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ \xi \in [a,b]}} \frac{m[a,b]}{\Delta} = \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ \xi \in [a,b]}} \frac{1}{\Delta} = \infty$$

当 $x \neq \xi$ 时

$$\mu(x) = \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ \xi \in [a,b] \\ x \notin [a,b]}} \frac{m[a,b]}{\Delta} = \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ \xi \in [a,b]}} \frac{0}{\Delta} = 0$$

亦即, x 轴上各点的物质分布密度函数为

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \neq \xi \text{ 时} \\ \infty & \text{当 } x = \xi \text{ 时} \end{cases} \quad (1-3)$$

此外,还不难看出

$$m(-\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x) dx = 1 \quad (1-4)$$

仔细观察例 1.1 和例 1.2, 便不难发现它们有一个明显的共性——都反映了集中分布的物理量的物理特性. 显然类似的例子不胜枚举. δ -函数则正是将诸如以例 1.1、例 1.2 为物理背景的函数 $\rho(x)$ 、 $\mu(x)$ 加以抽象概括而引入数学园地中来, 并反过来作为一个强有力的数学工具被广为应用.

综上所述, 便容易理解如下定义:

定义 1.1 我们称一个函数为 δ -函数, 并记之为 $\delta(x)$, 如果它满足

$$1^\circ \quad \delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时} \\ \infty & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

只需作一个平移变换, 便可得到与定义 1.1 等价的定义:

定义 1.2 我们称一个函数为 δ -函数, 并记之为 $\delta(x-\xi)$, 如果它满足

$$1^\circ \quad \delta(x-\xi) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \neq \xi \text{ 时} \\ \infty & \text{当 } x = \xi \text{ 时} \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\xi) dx = 1$$

运用简单的推理, 便不难得到与上述两个定义等价的, 由狄拉克 (Dirac) 最早提出的定义:

定义 1.3 我们称一个函数为 δ -函数, 并记之为 $\delta(x)$, 如果它满足

$$1^\circ \quad \delta(x) = 0 \quad \text{当 } x \neq 0 \text{ 时}$$

$$2^\circ \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

从上述定义可见, δ -函数已经不再是古典分析中所论述的函数了. 因为在古典分析中, 所谓无穷大 (即 ∞) 乃是“无限制变大”的意思, 而任何一个普通函数, 都不会在其定义域内的某一点处等于 ∞ . 在实变函数论中倒是允许函数在其定义域内某些点处等于 ∞ , 然而, δ -函数依然不是实变函数论中所涉及的函数. 事实上, 若把 δ -函数视为实变函数论中所涉及的函数, 则根据实变函数论中的一个广为人知的结果: 一个函数在零测度集合上的函数值 (无论为有限, 还是无限) 都不会影响该函数的勒贝格 (Lebesgue) 积分值, 就应该有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 0$$

这显然与 δ -函数的定义相悖.

这说明 δ -函数不能按“逐点对应”的普通函数来理解。正因为如此，自从 1926 年 Dirac 在量子力学的研究中引进了 δ -函数之后，就不断遭到维护所谓正统数学观念的纯粹数学家们的激烈反对。然而，随着 δ -函数在物理及工程技术方面的广泛应用，日益显示了这一巧妙的数学工具的强劲的生命力。因此，面对数噪和非难，非但没有把 δ -函数否定掉，反倒唤起一些颇有胆识的数学家致力于奠定 δ -函数严格的数学基础，并逐步创立了一个崭新的数学分支——广义函数论。

广义函数论的形成，虽然使得 δ -函数这个令人费解的“怪”函数，有了牢靠的理论根基，但是，也使原来虽然粗糙，却是简明而有启发性的论述，被既冗长又艰涩的逻辑推理所替代。因此， δ -函数原有的鲜明的直观意义与生动的物理背景便也随之黯然失色了；而且，由于广义函数论的内容较为艰深，也常常使得非专门从事数学工作的人们感到深奥莫测。

为了使本书具有更加广泛的适应性，除了另辟一节，对 δ -函数的数学理论略作启发性介绍外，我们尽量避免涉及广义函数论的知识，以便具备高等数学基础知识的读者，稍加努力就能掌握本章所涉及的基本内容。而且，这样做的结果，也将更加突出 δ -函数的直观意义和物理背景，从而，还 δ -函数以本来面目。不过，这样一来，关于 δ -函数的性质，我们只好在普通函数的范围内，采取初等“证明”。但是， δ -函数毕竟不是普通函数，因此，这些“证明”也只能当做示意性说明。

最后，尽管证明不易，我们还是要指出与 δ -函数的上述定义等价的另一个定义：

定义 1.4 我们称 $\delta(x-\xi)$ 为 δ -函数，如果对于任一于 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的函数 $f(x)$ ，恒有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\xi) f(x) dx = f(\xi)$$

这个定义表明，尽管 $\delta(x-\xi)$ 不是古典分析中的普通函数，然而，它和在 $(-\infty, +\infty)$ 上为连续的函数 $f(x)$ 的乘积在 $(-\infty, +\infty)$ 上

的积分运算,却不仅有确定的意义,而且其值就等于 $f(\xi)$. 后面我们将看到,正是由于 δ -函数的这一极其重要的运算性质,才使得它在广泛的实际应用中大放异彩.

§ 1.2 弱收敛

从定义 1.4 我们已经看到, δ -函数虽然不是普通函数,却和普通函数有着密切的联系. 下面将进一步指出, δ -函数可以视为普通函数的弱极限.

1.2.1 弱收敛的定义

定义 1.5 设依赖于参数 h 的函数族 $\{\varphi_h(x)\}$ 中的每一函数皆于 (a, b) 内有定义. 如果对任一于 (a, b) 内连续的函数 $f(x)$, 恒有

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \varphi_h(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx$$

则称函数族 $\{\varphi_h(x)\}$ (于 (a, b) 内), 当 $h \rightarrow \infty$ 时弱收敛于 $\varphi(x)$, 或者称 $\varphi(x)$ 为函数族 $\{\varphi_h(x)\}$ (于 (a, b) 内), 当 $h \rightarrow \infty$ 时的弱极限. 记为

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \varphi_h(x) = \varphi(x) \quad (a < x < b) \quad (1-5)$$

或者

$$\varphi_h(x) \xrightarrow{w} \varphi(x) \quad (a < x < b) \quad (1-6)$$

值得指出的是:

1° $\lim_{h \rightarrow \infty} \varphi_h(x) = \varphi(x)$ 乃是某种意义下的平均收敛——带“权”平均收敛的概念. 此权函数 $f(x)$ 并非特定的函数, 而是于 (a, b) 内连续的任一函数. 此外, 一个明显的事实是 (1-5) 式成立并不能保证当 $x \in (a, b)$ 时

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \varphi_h(x) = \varphi(x) \quad (1-7)$$

成立, 也就是说弱收敛不能保证 (在普通意义下) 收敛;

2° 函数族 $\{\varphi_h(x)\}$ 所依赖的参数 h , 既可以是连续参量, 也可以是离散参量; 所论的极限过程, 既可以如定义所述为 $h \rightarrow \infty$, 也可能

是 $h \rightarrow 0$ 或 $h \rightarrow a$ (a 为某常数) 等, 这完全视函数族 $\{\varphi_h(x)\}$ 对参数 h 的依赖关系而定;

3° 对函数族 $\{\varphi_h(x)\}$ 所要求的条件, 则常常视具体问题而定;

4° 区间 (a, b) 也可以是 $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ 或 $(-\infty, +\infty)$; 然而, 此时对权函数 $f(x)$ 除要求连续性外, 往往还要附加其它限制条件, 如要求 $f(x)$ 有界等.

1.2.2 把 δ -函数看作普通函数的弱极限

按定义 1.4 和 1.5 及其说明 4°, 易知

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_h(x) = \delta(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

的充分必要条件是对任一在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的有界函数 $f(x)^*$, 恒有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_h(x) f(x) dx = f(0) \quad (1-8)$$

事实上, 由定义 1.4

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx$$

再根据定义 1.5 及其说明 4°, 立即得证.

这里, 函数族 $\{\varphi_h(x)\}$ 所依赖的参数 h , 仍有如 1.2.1 中的 4° 所作的说明.

上述充要条件尽管非常浅显, 却提供了论证某函数族以 δ -函数为弱极限的一个适用的方法.

例 1.3 设脉冲函数

$$s_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{当 } |x| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } |x| > \frac{\epsilon}{2} \text{ 时} \end{cases}$$

证明

* 依问题的要求, 有时则对 $f(x)$ 于 $(-\infty, +\infty)$ 上附加另外的限制条件 (见例 1.7); 有时则除连续性限制条件外, 并不附加其它条件 (见例 1.3).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} s_\varepsilon(x) = \delta(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

证明 按 $s_\varepsilon(x)$ 的定义及积分中值定理知, 对任一于 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的函数 $f(x)$, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} s_\varepsilon(x) f(x) dx &= \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{\varepsilon} f(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} f(\xi) \left[\frac{\varepsilon}{2} - \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) \right] \\ &= f(\xi) \quad \left(-\frac{\varepsilon}{2} \leq \xi \leq \frac{\varepsilon}{2}\right) \end{aligned}$$

于是, 由 $f(x)$ 的连续性立即得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} s_\varepsilon(x) f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\xi) = f(0)$$

这表明

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} s_\varepsilon(x) = \delta(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

例 1.4 设半径为 ε 的一维球形函数

$$J_\varepsilon(x) = \begin{cases} (\varepsilon r)^{-1} \exp\left(\frac{-x^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right) & \text{当 } |x| < \varepsilon \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } |x| \geq \varepsilon \text{ 时} \end{cases}$$

其中

$$r = \int_{-1}^1 \exp\left(\frac{-x^2}{1-x^2}\right) dx$$

证明

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_\varepsilon(x) = \delta(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

证明 由 $J_\varepsilon(x)$ 的定义以及积分中值定理*, 对任一于 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的函数 $f(x)$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J_\varepsilon(x) f(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon r} \exp\left(\frac{-x^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right) f(x) dx$$

* 这里用到的积分中值定理是: 设 $f(x), g(x)$ 皆于 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 于 $[a, b]$ 上非负 (或非正), 则存在 $\xi \in [a, b]$ 能使:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

$$= f(\xi) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon r} \exp \left[\frac{-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2} \right] dx \quad (-\varepsilon < \xi < \varepsilon)$$

令 $\frac{x}{\varepsilon} = u$, 立见

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon r} \exp \left[\frac{-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2} \right] dx = \frac{1}{r} \int_{-1}^1 \exp \left(\frac{-u^2}{1-u^2} \right) du = 1$$

于是, 由 $f(x)$ 的连续性便知

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} J_{\varepsilon}(x) f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\xi) = f(0)$$

从而得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_{\varepsilon}(x) = \delta(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

例 1.5 设开尔文(Kelvin)热源函数

$$\Phi_t(x, \xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right] \quad (t > 0, a > 0)$$

其中 a 是常数. 证明

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi_t(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

证明 显然, 只须证明对任何于 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的有界函数 $f(x)$, 恒有

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t(x, \xi) f(x) dx = f(\xi) \quad (1-9)$$

即可. 令 $u = \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}$, 可见对任何 $t > 0$, 恒有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t(x, \xi) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1. \quad (1-10)$$

• $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$ 称为概率积分, 其值为 $\sqrt{\pi}$. 一般的高等数学书中, 都有其求法.