北京市高等教育自学考试资料

高等教育自学考试试题及参考答案汇编（七）

（数学专业、物理专业、计算机软件专业、工业与民用建筑专业）

北京市高等教育自学考试委员会办公室　编

北京师范大学出版社

高等教育自学考试试题
及参考答案汇编（七）

（数学专业、物理专业、计算机软件专业、
工业与民用建筑专业）

北京市高等教育自学考试委员会办公室　编

北京师范大学出版社

高等教育自学考试

试题及参考答案汇编（七）

（数学专业、物理专业、计算机软件专业

工业与民用建筑专业）

北京市高等教育自学考试委员会办公室　编

•

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

国营五二三厂印刷

•

开本：787×1092　1/32　印张：10.25　字数：20千

1986年7月第1版　1986年7月第1次印刷

印数：1—13,500

统一书号：7243·445　定价：1.50元

目　　录

1984年微分几何试题及参考答案要点

一、填写题（共20分）

1. 曲率和挠率都是常数的曲线是圆柱螺线。

2. 可展曲面的类型有锥面、柱面、切线曲面。

3. 球面上的短程线是大圆。

4. 设Γ是曲面S上的曲线，$P\in\Gamma$，则Γ在P点的曲率k和S在P的主曲率k_1、k_2之间有关系（要说明所用记号的意义）

$$k\cos\theta = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi$$

其中θ是Γ在P点的主法矢和S在P点的法矢间的夹角，φ是对应于k_1的主方向与Γ在P点的切向间的夹角。

5. 如取曲率线网为坐标曲线网，则曲面的基本方程是

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right]_v + \left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right]_u\right\}$$

$L_v = HE_v$，$N_u = HG_u$。

二、给定曲线，$x = a(t-\sin t)$，$y = a(1-\cos t)$

$z = 4a\cos\frac{t}{2}$，$(a>0)$．试求：曲线在点$(\pi a，2a，0)$的曲率、挠率、主法线方程和密切平面方程，以及曲线介于此点和$(4\pi a，0，4a)$之间的弧长．（20分）

解：$\boldsymbol{r}(t)=a\left(t-\sin t, 1-\cos t; \ 4\cos\frac{t}{2}\right)$，

$$\boldsymbol{r}'=a\left(1-\cos t, \ \sin t, \ -2\sin\frac{t}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{r}''=a\left(\sin t, \ \cos t, \ -\cos\frac{t}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{r}'''=a\left(\cos t, \ -\sin t, \ \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\right).$$

$$|\boldsymbol{r}'|^2=8a^2\sin^2\frac{t}{2}. \quad \therefore \quad |\boldsymbol{r}'|=2\sqrt{2}\,a\left|\sin\frac{t}{2}\right|.$$

点（πa，$2a$，0）和（$4\pi a$，0，$4a$）分别对应于参数值 $t=\pi$ 和 $t=4\pi$。故所求之弧长为

$$S=\int_{\pi}^{4\pi}|\boldsymbol{r}'|dt=\int_{\pi}^{4\pi}2\sqrt{2}\,a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$$

$$=\int_{\pi}^{2\pi}2\sqrt{2}\,a\sin\frac{t}{2}dt-\int_{2\pi}^{4\pi}2\sqrt{2}\,a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=12\sqrt{2}\,a.$$

又 $\boldsymbol{r}'(\pi)=a(2, \ 0, \ -2)$，$|\boldsymbol{r}'(\pi)|=2\sqrt{2}\,a$，

$$\boldsymbol{r}''(\pi)=a(0, \ -1, \ 0),$$

$$\boldsymbol{r}'''(\pi)=a\left(-1, \ 0, \ \frac{1}{2}\right).$$

$\therefore$ $\boldsymbol{r}'(\pi)\times\boldsymbol{r}''(\pi)=a^2(-2, \ 0, \ -2)$，

$$\boldsymbol{r}'(\pi)\times\boldsymbol{r}''(\pi)\cdot\boldsymbol{r}'''(\pi)=a^3(2-1)=a^3.$$

$\therefore$ $\kappa(\pi)=|\boldsymbol{r}'(\pi)\times\boldsymbol{r}''(\pi)|/|\boldsymbol{r}'(\pi)|^3$

$$=2\sqrt{2}\,a^2/(2\sqrt{2})^3a^3=1/8a.$$

$$\tau(\pi)=\boldsymbol{r}'(\pi)\times\boldsymbol{r}''(\pi)\cdot\boldsymbol{r}'''(\pi)/|\boldsymbol{r}'(\pi)\times\boldsymbol{r}'(\pi)|^2$$

$$=a^3/(2\sqrt{2})^2a^4=1/8\,a.$$

曲线在 $t=\pi$ 点的副法矢

$\boldsymbol{r}(\pi)//\boldsymbol{r}'(\pi)\times\boldsymbol{r}''(\pi)//(1,\ 0,\ 1)$.

∴ 密切平面方程为

$$(x-\pi a、y-2a,\ z-0)\cdot(1,\ 0,\ 1)=0$$

即 $x+z-\pi a=0$.

法平面方程为

$$(x-\pi a,\ y-2a,\ z-0)\cdot(1,\ 0,\ -1)=0$$

即 $x-z-\pi a=0$.

∴ 主法线方程为$\begin{cases}x+z-\pi a=0\\x-z-\pi a=0\end{cases}$ 或

$x=\pi a,\ y=t,\ z=0$（t 任意）.

三、设曲线 C 在一坐标系中的参数方程是

$$\boldsymbol{r}=(x(t),\ y(t),\ z(t)),\ a<t<b.$$

试证：由表达式 $|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|/|\boldsymbol{r}'|^3$确定的值与坐标系和参数的选取无关. （10分）

解：在坐标变换下，设 C 的方程为 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}(t)$，其中$\boldsymbol{S}$为 C 上的点在新坐标系中的径矢，则

$$\boldsymbol{S}(t)=\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{a},\quad(\boldsymbol{a}\text{ 是常矢}),$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{S}=\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{S}''=\boldsymbol{r}''.$$

$$\therefore\ \frac{|\boldsymbol{S}'\times\boldsymbol{S}''|}{|\boldsymbol{S}'|^3}=\frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}.$$

其次，在参数变换 $t=t(u)$下，设

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t(u))=\boldsymbol{R}(u),$$

则

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{du}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{du},\quad \frac{d^2\boldsymbol{R}}{du^2}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{du}\right)^2+\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^2t}{du^2}.$$

$$\therefore \frac{\left|\frac{d\boldsymbol{R}}{du}\times\frac{d^2\boldsymbol{R}}{du^2}\right|}{\left|\frac{d\boldsymbol{R}}{du}\right|^3}=\frac{\left|\boldsymbol{r}'\frac{dt}{du}\times\left[\boldsymbol{r}''\left(\frac{dt}{du}\right)^2+\boldsymbol{r}'\frac{d^2t}{du^2}\right]\right|}{\left|\boldsymbol{r}'\frac{dt}{du}\right|^3}$$

$$=\frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|\ \left|\frac{dt}{du}\right|^3}{|\boldsymbol{r}'|^3\left|\frac{dt}{du}\right|^3}=\frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}.$$

或由于$\frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}=$曲率$\kappa=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$，它表示曲线的切向相对于弧长的转动率，而曲线上相邻两点间的弧长和切向间的夹角，都与坐标系和参数的选取无关。所以，由表达式$\frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}$所定义的量与坐标系和参数的选取都无关。

四、设曲面 S 的第一基本齐式为

$$ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2$$

求 S 上两条曲线 $u+v=0$ 和 $u-v=0$ 的交角。(10分)

解：

曲线 $u+v=0$ 和 $u-v=0$ 的交点为 $(u,v)=(0,0)$。

沿曲线 $u+v=0$ 的 $du=-dv$，

沿曲线 $u-v=0$ 的 $\delta u=\delta v$，

所以两曲线的交角 θ 之余弦为

$$\cos\theta=\left.\frac{d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}|\,|\delta\boldsymbol{r}|}\right|_{(0,0)}$$

$$=\left.\frac{du\delta u+(u^2+a^2)dv\delta v}{\sqrt{du^2+(u^2+a^2)dv^2}\sqrt{\delta u^2+(u^2+a^2)\delta v^2}}\right|_{(0,0)}$$

$$=\frac{(1-a^2)du\delta u}{\sqrt{(1+a^2)du^2}\sqrt{(1+a^2)\delta u^2}}=\pm\frac{1-a^2}{1+a^2}.$$

五、 试证明由下列方程给定的曲面是常数全曲率的：

$$\boldsymbol{r}=\left(u\cos v,\ u\sin v,\ hv+\int\sqrt{\frac{1}{a-k^2u^2}-\frac{h^2}{u^2}-1}du\right)$$

$(k>0)$

并问它与怎样的球面等距等价？（15分）

解： 设 $f(u)=\sqrt{\frac{1}{a-k^2u^2}-\frac{h^2}{u^2}-1}$ ，则

$$f^2(u)=\frac{1}{a-k^2u^2}-\frac{h^2}{u^2}-1,$$

$$2ff'=\frac{2k^2u}{(a-k^2u^2)^2}+\frac{2h^2}{u^3}.$$

$\boldsymbol{r}_u=(\cos v,\ \sin v,\ f(u))$，

$\boldsymbol{r}_v=(-u\sin v,\ v\cos v,\ h)$，

$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_u=(h\sin v-uf(u)\cos v,\ -uf(u)\sin v$
$-h\cos v,\ u)$.

$\boldsymbol{r}_{uu}=(0,\ 0,\ f'(u))$，

$\boldsymbol{r}_{uv}=(-\sin v,\ \cos v,\ 0)$

$\boldsymbol{r}_{vv}=(-u\cos v,\ -u\sin v,\ 0)$

$\therefore\quad E=\boldsymbol{r}_u^2=1+f^2(u)$，$F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=hf(u)$，

$G=\boldsymbol{r}_v^2=h^2+u^2$.

$$g=EG-F^2=u^2+h^2+u^2f^2(u)=\frac{u^2}{a-k^2u^2};$$

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v/\sqrt{g}.$$

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{uf'(u)}{\sqrt{g}},\ M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{h}{\sqrt{g}},$$

$$N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{u^2f(u)}{\sqrt{g}},\ \therefore\ k=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

$$=\frac{u^3ff'-h^2}{g^2},$$

而 $u^3ff'=\frac{k^2u^4}{(a-k^2u^2)^2}+h^2$.

$$\therefore K=\frac{k^2u^4}{(a-k^2u^2)^2}\Big/\frac{u^4}{(a-k^2u^2)^2}=k^2.$$

∴ 曲面的全曲率 K 是常数 k^2，由于具有相同的常数全曲率曲面总是等距等价的，如 $k\neq 0$，则曲面与半径为 $1/|k|$ 的球面等距等价，如 $k=0$，则与平面等距等价。

六、1. 什么叫曲面的内蕴几何？曲面的全曲率、中曲率、曲率线、短程线、短程曲率、短程挠率等概念中哪些是属于内蕴几何学的？（7分）

2. 阐述曲面在一点的全曲率的几何意义。（8分）

解：1. 曲面的内蕴（即内在）几何，就是研究由第一基本齐式所确定的曲面的性质，从而也就是在等距变换下保持不变的曲面的性质。两个可以互相贴合的曲面，虽然它们在空间所呈的形状不一定相同（如正螺旋面和悬链面，可展曲面和平面等）．从局部来说它们的内蕴几何是相同的。

全曲率、短程曲率和短程线都属于曲面的内蕴几何学，其余的则不是。

2. 设 P 是曲面 S 上的任意一点，$K(P)$ 是 S 在 P 点的全曲率，$\Delta\sigma$ 是 S 上包含 P 在其内部的一小块 ΔS 的面积，$\Delta\bar{\sigma}$ 是 ΔS 的球面象的面积，则

$$|K(P)|=\lim_{\Delta S\to P}\frac{\Delta\bar{\sigma}}{\Delta\sigma}.$$

如 $K(P)>0$，则 P 是 S 的椭圆点，S 在 P 的法截线都朝 S 于 P 点的切平面 π 的同侧弯曲；如 $K(P)<0$，则这些法

截线有的朝 π 的这一侧、有的朝另一侧弯曲

$K(P)$的符号也可解释如下：因为

$$\boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}_v=K\qquad\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$$

所以当 $K(P)>0$ 时，在 S 上由参数 u，v 在P点确定的法矢，与通过球面表示在单位球面上由 u、v 在 P 的象点确定的法矢同向；当 $K(P)<0$ 时，这两个法矢反向。

七、在曲面 S 上取曲率线网为坐标曲线网，点$P\in S$，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 S 在 P 点的一个单位切矢，在 P 点对应于主曲率 k_1 的主方向到 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转角为 θ，试证：S上以$\boldsymbol{\alpha}$为切矢的短程线在 P点的挠率

$$\tau=\frac{1}{2}(k_2-k_1)\sin 2\theta.\quad(10分)$$

解：设 u 曲线和 v 曲线的单位、切矢分别为$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，则

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_1\cos\theta+\boldsymbol{e}_2\sin\theta.$$

由于坐标曲线是曲率线，从关于主方向的罗德里克方程，有

$$\boldsymbol{n}_u=-k_1\boldsymbol{v}_u,\quad\boldsymbol{n}_v=-k_2\boldsymbol{r}_v.$$

如Γ 是 S 上过P点与 $\boldsymbol{\alpha}$ 相切的短程线，则 Γ 在 P 点的挠率 τ 等于 S 沿 $\boldsymbol{\alpha}$ 的短程挠率 τ_g。沿Γ对于Γ的弧长参数求导，有

$$\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}_u\dot{u}+\boldsymbol{r}_v\cdot\dot{v}=\boldsymbol{e}_1\cos\theta+\boldsymbol{e}_2\sin\theta,$$

$$\therefore\quad\boldsymbol{r}_u\dot{u}=\boldsymbol{e}_1\cos\theta,\quad\boldsymbol{r}_v\dot{v}=\boldsymbol{e}_2\sin\theta$$

及 $$\dot{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{n}_u\dot{u}+\boldsymbol{n}_v\dot{v}=-k_1\boldsymbol{r}_u\dot{u}-k_2\boldsymbol{r}_v\dot{v}$$

$$=-k_1\cos\theta\boldsymbol{e}_1-k_2\sin\theta\,\boldsymbol{e}_2,$$

$$\therefore\quad\tau=\tau_g=(\dot{\boldsymbol{r}},\ \boldsymbol{n},\ \dot{\boldsymbol{n}})$$

$$=(\cos\theta\,\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\,\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{n},\ -k_1\cos\theta\,\boldsymbol{e}_1-k_2\sin\theta\boldsymbol{e}_2).$$

由于 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n}) = 1$，故

$$\tau = (k_2 - k_1)\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}(k_2 - k_1)\sin 2\theta.$$

或 $$\tau = \tau_g = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ E & 0 & G \\ L & 0 & N \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\dot{u}\dot{v}\begin{vmatrix} E & G \\ L & N \end{vmatrix}.$$

而 $\sqrt{E}\,\dot{u} = \cos\theta, \sqrt{G}\,\dot{v} = \sin\theta.$

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}, \quad D = \sqrt{EG},$$

$$\therefore \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{EG}}(EN - GL)$$

$$= \left(\frac{N}{G} - \frac{L}{E}\right)\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(k_2 - k_1)\sin 2\theta.$$

1985年微分几何试题
及参考答案要点

一、选择题（将答案的标记字母填入括弧中）（20分）

1．向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 平行于一个固定方向的充要条件是 (B) 。

(A) $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\equiv 0$， (B) $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'\equiv 0$， (C) $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\equiv 0$.

2．曲率是常数的空间曲线一定是 (A) .

(A) 贝特朗曲线， (B) 直线， (C) 圆.

3．若平面与曲面沿曲线 C 相切，则 C 上的点是曲面的 (A) .

(A) 抛物点， (B) 双曲点， (C) 椭圆点.

4．空间曲线必是其 (B) 族的包络上的短程线.

(A) 法平面， (B) 从切平面， (C) 密切平面 .

5．在曲面的等距变换下， (C) 保持不变.

(A) 短程挠率， (B) 主曲率， (C) 全曲率.

二、试求曲线 C 的曲率和挠率与其渐伸线 $\overline{C}$ 的曲率和挠率之间的关系，并证明当 C 是定倾曲线时 $\overline{C}$ 是平面曲线. (20分)

解：设 C： $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，则 $\overline{C}$： $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)-(c-s)\alpha$，

$\boldsymbol{r}'=(c-s)k\beta$.

$\boldsymbol{r}''=-(c-s)k^2\alpha+[(c-s)k'-k]\beta+(c-s)k\tau\gamma$.

$$\boldsymbol{r}''' = [2k^2 - 3(c-s)kk']\alpha + [(c-s)k'' - 2k' - (c-s)k[k^2+\tau^2)]\beta + [(c-s)(2k'\tau + k\tau' - 2k\tau]\gamma.$$

$$\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = (c-s)^2k^3\gamma + (c-s)^2k^2\tau\alpha.$$

$$\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' \cdot \boldsymbol{r}''' = (c-s)^3k^3(k\tau' - \tau k')$$

$$\therefore \quad \overline{K} = \frac{\sqrt{k^2+\tau^2}}{|c-s|\,k},$$

$$\overline{\tau} = \frac{k\tau' - k'\tau}{(c-s)k(k^2+\tau^2)} = \frac{-\tau^2}{(c-s)k(k^4+\tau^2)}\left(\frac{k}{\tau}\right)'$$

$\therefore$ C 是定倾曲线，即 $\left(\frac{k}{\tau}\right)' \equiv 0$，

$\overline{\tau} \equiv 0$，即 $\overline{C}$ 是平面曲线。

三、给定旋转曲面 $\boldsymbol{r} = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ u)$ $(f(u)>0)$。

1．求它的第一、二基本齐式和 K，H；

2．证明悬链面是唯一的使 $H\equiv 0$ 的一类旋转曲面。(25分)

解：1．$E = 1 + f'^2$，$F = 0$，$G = f^2$，

$$L = -\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}},\quad M = 0,\quad N = \frac{f}{\sqrt{1+f'^2}}.$$

$$\therefore \quad K = -\frac{f''}{f(1+f'^2)^2},$$

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{1+f'^2 - ff''}{f(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2．$H\equiv 0 \Longleftrightarrow 1 + f'^2 - ff'' = 0$。

其通解为 $f(u) = a\,\mathrm{ch}\dfrac{u+b}{a}\ (a\neq 0)$。

$\therefore$ 曲面有一子午线为 $x = a\text{ch}\dfrac{z+b}{a}$，这是一悬链线，因此 $H\equiv 0$ 的旋转曲面只有悬链面。

四、证明：在球面、柱面和马鞍面 $z = x^2 - y^2$ 之间不存在等距对应。（15分）

证：球面之 $K = \dfrac{1}{a^2} > 0$。

平面之 $K \equiv 0$。

马鞍面之 $K = \dfrac{-4}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}} < 0$。

在等距变换下 K 保持不变，所以在这三种曲面之间不可能存在等距对应。

五、证明：曲面上非直线的短程线同时又是曲率线的充要条件是它为平面曲线。（10分）

证：设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 之法矢。曲线 C 之切矢、主法矢、副法矢、曲率、挠率和弧长分别为 α，β，γ，k、τ 和 s；则

C 是 S 之测地线 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{n} = \pm\boldsymbol{\beta}$，

C 是 S 之曲率线 $\Longleftrightarrow d\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{\alpha}$，

$\therefore$ C 同时是 S 之测地线和曲率线 $\Longleftrightarrow$

$d\boldsymbol{n} = \pm d\boldsymbol{\beta} = \pm(-k\boldsymbol{\alpha} \quad \tau\boldsymbol{\gamma})ds \parallel \boldsymbol{\alpha}$

$\Longleftrightarrow \tau \equiv 0$，即 C 是平面曲线。

六、证明：任意一条空间曲线都可以保持它的长度和曲率不变而连续地变形为一条平面曲线。（10分）

证：设空间曲线 C 的自然方程为 $k = k(s)$，$\tau = \tau(s)$。S 在 $s = s_0$ 处的 Frenet 标架是 $\{\boldsymbol{r}(s_0)；\boldsymbol{e}_1，\boldsymbol{e}_2，\boldsymbol{e}_3\}$。考虑微分方程组

$$\frac{dX}{ds} = \boldsymbol{X}_1,$$

$$\frac{d\boldsymbol{X}_1}{ds} = \qquad k(s)\boldsymbol{X}_2,$$

$$\frac{d\boldsymbol{X}_2}{ds} = \qquad -k(s)\boldsymbol{X}_1 \qquad +\lambda\tau(s)\boldsymbol{X}_3,$$

$$\frac{d\boldsymbol{X}_3}{ds} = \qquad -\lambda\tau(s)\boldsymbol{X}_2.$$

及初始条件 $\boldsymbol{X}(s_0)=\boldsymbol{r}(s_0)$，$\boldsymbol{X}_i(s_0)=\boldsymbol{e}_i(s_0)$ （$i=1, 2, 3$）．其解 $\boldsymbol{X}(s, \lambda)$ 对 λ 连续，且曲线 C_2：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{X}(s,\lambda)$ （λ固定）的弧长、曲率、挠率分别为 s，$k(s)$，$\lambda\tau(s)$，从而与 C 有相同的弧长和曲率．

根据曲线论基本定理，$\lambda=1$时的曲线 C_1 即给定的曲线 C，$\lambda=0$ 时的曲线 C_0 是平面曲线，所以当 λ 以 1 连续地变到 0 时，曲线 C 经过曲线族 C_λ （$1\geqslant\lambda\geqslant0$） 连续地变成平面曲线 C_0，且在变化过程中弧长和曲率保持不变．