硕士研究生入学考试解题指南

高等数学

GAODENG
SHUXUE

安徽教育出版社

硕士研究生入学考试解题指南

高 等 数 学

程乃栋 杨有椿 马吉溥 罗庆来
张明淳 宋柏生 过智英 李延保

安 徽 教 育 出 版 社

出 版 说 明

我社自1980年开始每年出版当年“硕士研究生入学试题汇解”以来，深受广大读者欢迎。我们总结多年来出版这类书籍的经验，并根据广大读者的意见，认为它虽能为广大读者提供当前应考参考资料，但随着时间的推移，往往使人感到有它的局限性。为了有助于考生能进一步掌握有关考试学科的重要内容，尤其是尽快增强解题能力和考试中的应变能力，我们特约请中国科学技术大学、南京大学、南京工学院、安徽大学、合肥工业大学等院校的具有辅导硕士研究生入学考试复习经验的教师，编写了这套《硕士研究生入学考试解题指南》供读者学习参考。

这套丛书有《高等数学》、《工程数学》、《普通物理学》、《热力学·统计物理学》、《电动力学》、《量子力学》、《物理化学》、《无机化学》、《高分子物理和化学》和《英语》共计十一种。

鉴于本丛书不是一般的复习资料，因此本书不拘泥于本学科的自然体系分章分节，对本学科应掌握的主要知识不是条文式的罗列，而是通过问题的提出或通过解题过程让读者体会和掌握应具备的基础知识；本书又不是一本单纯的试题汇解，因此，它并非就题解题，而是以帮助读者如何正确审题，引导读者总结解决相应类型问题的基本规律。特别是对那些灵活多变、技巧性强的问题，着重向读者提供解决问题时可供选择的不同思路，给出最优解法，使读者能通过比较，

启迪解题的灵活性和技巧性。对那些容易引起混淆和易犯错误的问题，通过解题过程向读者指明，以达到正确解题的目的。

本书编写打破学科自然体系和命题学校的界限，而以问题的性质和类型进行归类。例题及习题选择既突出重点，又尽可能地覆盖本学科的主要内容。所选择的例题、习题以历届研究生入学试题(包括1985年试题)为主要素材，从中找出各年和各校入学试题的共性和个性。对提出的问题，按问题的难易、技巧性的强弱，分别给出提示、略解或详解，并给出必要的分析。

前　　言

编写一本篇幅适中，既能帮助报考硕士研究生的读者复习高等数学和工程数学基础知识又能启迪读者思维、提高解题能力的解题指南，是一项很有意义的工作。目前，供报考硕士研究生用的复习资料、试题汇解等复习辅导书种类较多，但通过问题帮助读者复习基础知识，并灵活、综合运用它，提高审题、解题能力的复习指导书尚不多见。基于这一点，编者以教育部颁发的高等理、工院校(非数学专业)的“高等数学”和“工程数学”教学大纲为依据，参照我国各高等院校招收硕士研究生对数学知识和能力方面的要求，结合编者多年辅导报考硕士研究生的在校大学生复习的经验，编写了这本“高等数学”解题指南，供广大有志报考硕士研究生的读者参考。

本书由于是一本帮助读者提高能力、掌握技巧，增强应试时的适应性和应变能力的解题指南，所以在编写时既注意参照历年来各校硕士研究生入学试题的题型以突出其共性，同时又注意强调各种不同试题的个性中所反映的解题技巧。它通过问题的解析帮助读者复习相应的内容和从解析问题的过程中逐步领会和掌握解题的基本思路和解题技巧，通过对问题的分析、注和提示等以帮助读者领会解题要领、解题方法和需要防止容易产生混淆和忽略之点。本书各单元所选讲的问题基本上反映出本单元的主要解题方法和技巧，覆盖本单元的基本内容。本书在编写上力求生动活泼，力求克服定

理、概念的复述，又防止单纯地就题解题的现象。本书提供的问题既有传统题又有难度较大、综合性及灵活性较大、技巧性较高的题目，并根据问题的难易分别给出详解、略解或提示，在题目编选中既有独立性的问题、又有逐步引伸相互关联的系列题，目的在于解题方法和技巧的指导。

本书在编写过程中得到全国高等工科院校数学教材编审委员会委员、南京工学院教务处长陶永德副教授的大力支持、热情帮助，又蒙《工科数学》杂志常务编委、合肥工业大学卢树铭副教授非常细致的审阅，修改了全稿，在此一并表示感谢。

由于时间仓促，加之水平所限，缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

一九八五年七月

目　　录

第一章　极限与连续

一、数列极限

1. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

分析　此为常见且有用的极限。利用这个极限可以求一系列与之有关的极限. 因

$$n<1+n<(1+1)^n=2^n$$

故知这个变量介于1与2之间.

解　设$\sqrt[n]{n}=1+h_n$, $h_n\geqslant 0$，于是有

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{1}{2}n(n-1)h_n^2+\cdots+h_n^n$$

$$>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2,$$

从而　$$h_n^2<\frac{2}{n-1}.$$

于是得　$$\lim_{n\to\infty}h_n=0$$

故　$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

注　此题还可以用其它方法解之. 例如可先用对数恒等式将$\sqrt[n]{n}$变形为$e^{\frac{1}{n}\ln n}$的形式，再求.

2. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$, $a>0$.

分析　容易观察出它的极限值也是1. 可以用上面方法

求．也可以利用上题的结果，如何应用上题的结果呢？下面回答这个问题．

当$a>1$时，有

$$1<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{n}，\text{当}n\text{相当大时。}$$

由取极限两边夹原理即得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

当$0<a<1$时，有

$$\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}\to 1，\text{当}n\to\infty\text{时}.$$

综上即知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1，a>0$.

3. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n+3^n}$.

分析　在本题中n次根号里起主要作用的是5^n，因为

$$\sqrt[n]{5^n+3^n}>\sqrt[n]{5^n}=5.$$

于是有 $5<\sqrt[n]{5^n+3^n}=5\sqrt[n]{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}<5\sqrt[n]{2}$.

用取极限两边夹原理及上题的结果，即得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n+3^n}=5.$$

一般容易用上述相同的作法得：

4. 求证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max(a，b)$. $a>0，b>0$.

5. 求证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_k{}^n}=\max(a_1，a_2，\cdots，a_k)$，此处 $a_1，a_2，\cdots，a_k$ 均为正的常量．

6. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p+n^q}$，$p$，$q$为常量．

分析 本题的解法也是应用取极限两边夹的原理．其关键在于能写出适应两边夹原理所需的不等式．

解 不妨假设 $p>q$，于是有

$$\sqrt[n]{n^p}<\sqrt[n]{n^p+n^q}<\sqrt[n]{2n^p}=\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n^p}$$

取极限，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p+n^q}=1$.

用本题同样的方法可得

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{p_1}+n^{p_2}+\cdots+n^{p_k}}=1$，$p_1$，$p_2$，…，$p_q$ 为常量．

注 (1)通过上面几个题目，可以看出不等式求极限两边夹的原理如何运用，而重要的是观察式内哪些是极限过程的主导方面．

(2)上面的题目也可以先用对数恒等式 $A=e^{\ln A}$ 将求极限的式子变形，然后应用洛必达法则求极限．

8. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解法一 设 $x_n=\dfrac{n!}{n}$，则 $\sqrt[n]{x_n}=\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

由定理"若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$，$x_n>0$"

即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}.$$

解法二 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}}=\exp\left[\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\dfrac{i}{n}\right]$

$$=e^{\int_0^1 \ln x dx}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

(这里用到了定积分概念：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}=\int_0^1 \ln x dx$)

比较上面两种解法，解法一方法虽然简单但需用到定理“若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$，$x_n>0$”及重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$．方法二虽然不需记住上面定理及应用重要极限，但需先对欲求极限的变量变形然后应用定积分概念，有一定的解题技巧．

9. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right]^n$，$a\geqslant 0$，$b>0$.

分析 因$\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}=1+r_n$，而$r_n\to 0$，当$n\to\infty$时.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right]^n=\lim_{n\to\infty}(1+r_n)^{\frac{1}{r_n}\cdot n\cdot r_n}.$$

$$\because n r_n=n\cdot\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}-2}{2}=\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}-2}{2\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{(a^{\frac{1}{n}}-1)+(b^{\frac{1}{n}}-1)}{2\left(\frac{1}{n}\right)}$$

由重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$，得

$$\lim_{n\to\infty}nr_n=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}.$$

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+r_n)^{\frac{1}{r_n}}=e$（重要极限）

故知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$.

与本题一样，可得

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{n}}+a_2^{\frac{1}{n}}+\cdots+a_k^{\frac{1}{n}}}{k}\right)=\sqrt[k]{a_1\, a_2\cdots a_k}$，其中$a_1$，$a_2$，$\cdots a_k$，为正数.

11. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+\sqrt[n]{64}}{3}\right)^{2n-1}$

分析 本题初看，好象难以入手，但只要设$\dfrac{2+\sqrt[n]{64}}{3}=1+r_n$，$r_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$，就可以把问题归结为求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$型的极限问题求解.

解 设$\dfrac{2+\sqrt[n]{64}}{3}=1+r_n$，$r_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\sqrt[n]{64}}{3}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}(1+r_n)^{\frac{1}{r_n}\cdot r_n(2n-1)},$$

由 $\dfrac{2+\sqrt[n]{64}}{3}=1+r_n$，得$r_n=\dfrac{\sqrt[n]{64}-1}{3}$，

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)r_n=\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)\dfrac{\sqrt[n]{64}-1}{3}$

$$=\lim_{n\to\infty}2n\frac{\sqrt[n]{64}-1}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(64)^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\ln 64=\ln 16$$

(这里应用了$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$)

又 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+r_n)^{\frac{1}{r_n}}=e$.

综上可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+\sqrt[n]{64}}{3}\right)^{2n-1}=16$.

12. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

分析 若将$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=\frac{n+1}{n^2}$表为$r_n$，利用上题解法不难求出极限值. 下面提供另一种解法.

解 设$I_n=\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$，则有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<I_n=\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right)^n$$

$$=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

利用取极限两边夹原理即得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=e.$$

本题的解题思路是根据所给变量的特征$\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$，放大和缩小这个变量，就易得出符合两边夹原理需要的不等式，从而可应用两边夹原理求得其解。放大和缩小所给变量是求解极限问题的这一种常用的技巧.

13. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n}{n^3+n}\right)$.

分析 在$n\to\infty$过程中，上式起主导作用的是n^3，同时从上式的结构中可以看出，只要把各项的分母放大成n^3+n，就可缩小原式，将分母缩小成n^3+1，就可放大原式（在缩小放大过程中分子不动），缩小放大后的式子在$n\to\infty$过程中，趋于相同的极限．故本题也是用取极限两边夹原理来解．

解 设 $I_n=\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{2}{n^3+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^3+n}$

有
$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^3+n}<I_n<\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^3+1}$$

利用取极限两边夹原理即得$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

14. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}$，$a>1$.

分析 $a>1$时，在$n\to\infty$过程中$\dfrac{1}{a^n}\to 0$的速度比$\left(\dfrac{1}{n}\right)^p\to 0$来得快，此处$p$为任何正常数，即$\left(\dfrac{1}{a}\right)^n=o\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$. 因此，可以考虑利用级数收敛的必要条件来解．

解 考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{a^n}$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n}{a^n}}=\dfrac{1}{a}<1$（由第1题）．故知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{a^n}$是收敛的，由级数收敛的必要条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0.$$

15. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^p}{a^n}$，$a>1$.

可以用上题的方法求解，读者自行补充．

16. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$.

解 考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n+1}=0<1.$$

$$\left(\text{此处 } u_n=\frac{n^n}{(n!)^2}\right)$$

知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$收敛，由级数收敛的必要条件知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0.$$

注 14、15、16是提供利用级数收敛的必要条件求极限的例子. 这里只向读者介绍求极限的一种技巧. 但是它对无穷小量的证明来说，广泛性并不太大. 14、15、16三题的解法还很多. 这里不一一介绍了.

17. 设数列当$n>N$时，单调上升且趋于$+\infty$，又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\text{存在(或为}\pm\infty\text{)，则有}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}.$$

此题就是常用于求$\dfrac{\infty}{\infty}$型数列极限的斯笃兹(stolz)定理，

证明从略，这里给出的目的不在于定理本身的证明，而在于它的应用. 这个定理的详细证明，读者如有兴趣，可参看菲赫金哥尔茨著的《微积分教程》第一卷第一分册.

18. 若$a_n\to l$(l可为$\pm\infty$)，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_n+\cdots+a_n}{n}=l$.

提示 取$x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$y_n=n$. 利用 17 题的结论，即可得证.

19. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2\cdots a_n}$，$a_n>0$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

解 取$y_n=\sqrt[n]{a_1 a_2\cdots a_n}$，取对数，得

$$\ln y_n=\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)$$

由18题，得 $$\lim_{n\to\infty}\ln y_n=\ln a.$$

从而，得 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

20. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$.

证明 取$x_1=a_1$，$x_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$，

因为 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=l.$$

由题 19，有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1 x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$.

注 题17、18、19、20是常用的几个数列极限定理，且题18～20都是利用题17来证明的．因此，熟记它们是非常必要的、利用这些定理可以求解一些数列的极限．

21. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$，$p\geqslant 0$.

解法一 由题17知，只要取$x=\sum\limits_{k=1}^{n}k^p$，$y_n=n^{p+1}$，就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{n^{p+1}-(n-1)^{p+1}}=\frac{1}{p+1}.$$