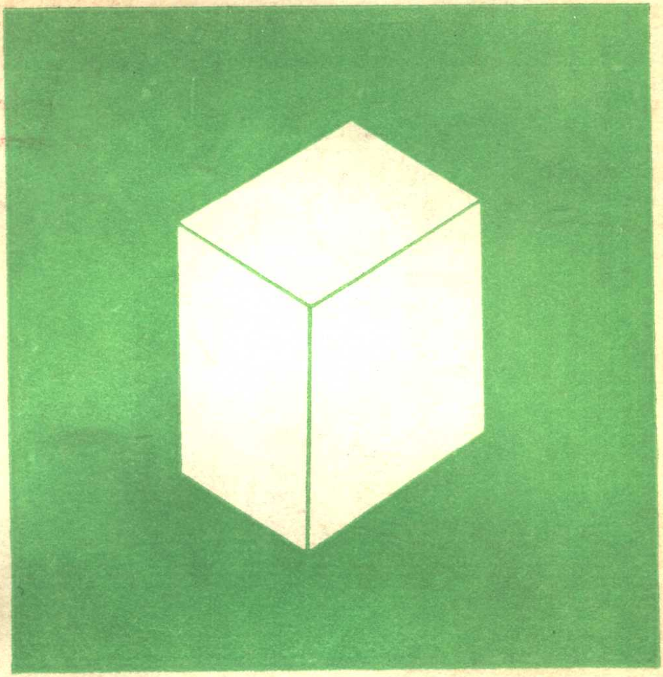

LITIJIHE BUFEN

立体几何部分

谭光宙
丁家泰
张德平
张乃凡

中学数学解题方法

北京师范大学出版社

中学数学解题方法

（立体几何部分）

谭光宙　丁家泰　张德平　张乃凡

北京师范大学出版社

中学数学解题方法
（立体几何部分）
谭光宙　丁家泰　张德平　张乃凡
*
北京师范大学出版社出版发行
全 国 新 华 书 店 经 销
朝阳展望印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：7.25 字数：151千
1989年 3月 第1版 1989年 3月 第1次印刷
印数：1－21.500

ISBN7－303－00377－0/G·168
定价：2.25元

目　录

代何基础

立 体 几 何

第二章

三角[illegible]（1）

一、内容概要

三角函数以平面几何中的圆和相似形为基础，用代数的方法研究与角有关的某些问题。它是高中数学的重要内容，又与立体几何，平面解析几何，复数等内容联系密切。本章主要内容有以下几点：

1. 角的定义以及正角、负角，象限角，终边相同角等概念。角的度量——弧度制、角度制以及它们之间的单位换算。

2. 任意角的三角函数定义，各个象限角的三角函数的符号，特殊角的三角函数值以及如何用単位圆中的线段表示三角函数值。

3. 同角三角函数的基本关系式。

4. 诱导公式。

5. 三角函数的图象和性质。

二、概念、方法、习题指导

（一）角的概念的推广

1. 角的定义：一条射线由原来的位置 OA 绕着它的端点 O 旋转到某一终止位置 OB 所形成的几何图形叫做角（如图 2—1）。

2. 正角，负角和零角：按照旋转方向分类。（如图 2—2）

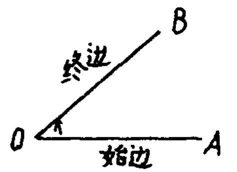

图 2—1

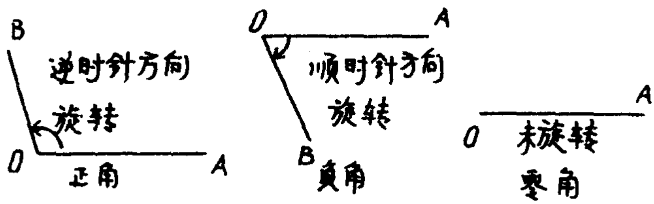

图 2—2

3. 象限角：若角的顶点在原点，始边在 X 轴的正半轴上，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限角。

终边在坐标轴上的角不属于任何象限。

4. 终边相同角：始边、终边分别重合的角叫做终边相同角。

与角 α 终边相同的角(连同 α 角在内)的集合为 $\{\beta|\beta=k\cdot360°+\alpha\cdot K\in Z\}$。

例　若 α 是第三象限角,则 2α,$\frac{\alpha}{2}$是第几象限角?在直角坐标系中画出$\frac{\alpha}{2}$终边所在的区域。

解:$\because$　$K\cdot360°+180°<\alpha<K\cdot360°+270°(K\in Z)$,

$\therefore K\cdot720°+360°<2\alpha<K\cdot720°+540°(K\in Z)$。

$\therefore 2\alpha$ 是第一或第二象限角或终边在 y 轴正向。

$K\cdot180°+90°<\frac{\alpha}{2}<K\cdot180°+135°(K\in Z)$,　当 K 为偶数时,$\frac{\alpha}{2}$是第二象限角;当 K 为奇数时,$\frac{\alpha}{2}$是第四象限角(如图 2—3)。

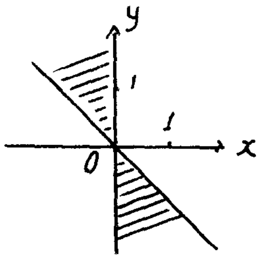

图 2—3

练习题一(A)组

1. 判断题

(1)　720°角的始边与终边重合;　(　　　)

(2)　当 $\alpha\neq K\cdot180°+\beta(K\in Z)$时,$\alpha$ 与 β 不可能是终边相同角;　(　　　)

(3)　30°与 390°表示同一个角;　(　　　)

(4)　正角与负角不可能相等;　(　　　)

(5)　锐角是第一象限角;　(　　　)

(6)　第二象限角是钝角;　(　　　)

(7) 第三象限角小于第四象限角； (   )

(8) 终边重合的角是终边相同角。 (   )

2. 填空题

(1) 第四象限角的集合是________；

(2) 与 $110°$ 角终边相同角的集合是________，其中在 $-360°$ 到 $360°$ 之间的角是________；

(3) $-720°$ 到 $0°$ 之间与 $46°26'$ 终边相同角是

________；

(4) 在直角坐标系中，以原点为角的顶点，x 轴正向为角的始边，终边在 x 轴负向的角的集合是________，终边在 y 轴正向的角的集合是________，终边在直线 $y=x$ 上的角的集合是________。

3. 解答题

(1) 怎样的角叫第二象限角？

(2) 集合 $A=\{x|x=K\cdot 360°+\alpha, K\in Z\}$，$B=\{x|x=K\cdot 720°+\alpha, K\in Z\}$，$C=\{x|x=K\cdot 720°+360°+\alpha, K\in Z\}$，这三个集合之间有什么关系？

[illegible]

1. 选择题

(1) 下列四个命题中，结论正确的有 (   )

①一条射线绕着一点旋转，形成一个角。

②锐角小于直角，大于负角

③钝角小于第三象限角

④锐角的终边在第一象限

A. ②. B. ②，④ C. ②，③ D. ③，④

(2) 以原点为角的顶点，x 轴正向为角的始边，终边在坐标轴上的角等于 (　　)

A $0°$或$90°$或$270°$　B $K\cdot 360°(K\in Z)$

C $K\cdot 180°(K\in Z)$　D $K\cdot 90°(K\in Z)$

(3) 若α是第一象限角，则$\frac{\alpha}{2}$是 (　　)

A 第一象限角　B 第一或第三象限角

C 第二象限角　D 第一或第二象限角

(4)设$M=\{\alpha|\alpha=K\cdot 360°+15°,K\in Z\}$，$N=\{\beta|\beta=-K\cdot 360°-345°,K\in Z\}$，$p=\{r|r=K\cdot 720°+15°,K\in Z\}$，则 M，N，P 的关系是 (　　)

A $M=N=P$　B $M=N\subset P$

C $P\subset M=N$　D $M=P\neq N$

(5)若$K\cdot 360°+\alpha(K\in Z)$与锐角$\beta$是终边相同角，则 (　　)

A $\alpha=\beta$　B $0°<\alpha<360°$

C $-360°<\alpha<0°$　D $\alpha=K\cdot 360°+\beta(K\in Z)$

2. 填空题

(1) 若$\alpha\in[0°,360°)$，α与4α是终边相同角，则α的值是__________；

(2) 若$-665°17'=K\cdot 360°+\alpha(K\in Z,\alpha$为锐角)，则$K=$__________，$\alpha=$__________；

(3) 以原点为角的顶点，x 轴正向为角的始边，与角α的终边关于 x 轴对称的角的集合是__________，与角α的终边关于原点对称的角的集合是__________，终边在直线$y=-x$上的角的集合是__________。

3. 解答题

(1) 设α,β是锐角，求$\alpha+\beta,\alpha-\beta$的取值范围；

(2) 设α,β是第一象限角，则$\alpha+\beta,\alpha-\beta$是第几象限角？

(二)弧 度 制

(1) 弧度制的概念：等于半径长的圆弧所对的圆心角叫1弧度的角。用“弧度”作单位来度量角的制度叫弧度制。

(2) 弧长公式：$l=|\alpha|\cdot r$（其中l为圆心角α所对的弧长，r为圆的半径）。

当α的单位是“弧度”时，这个公式才成立。

圆心角α一般用正角表示。

利用弧度制很容易推出扇形面积公式：

$S=\frac{1}{2}lR$（推导过程见课本第81页）。

其中l是扇形的弧长，R是圆的半径。

(3) 弧度制与角度制的换算：$180°=\pi$弧度。

由此可以得到：

$1°=\frac{\pi}{180}$弧度≈0.01745弧度；

1弧度$=(\frac{180}{\pi})°\approx57.30°=57°18'$。

例 如图2—4，八等分、十二等分圆周，写出以O为顶点，x轴正向为角的始边，每条分界线为终边的一切角（单位：弧度）。

解：(1)，

$OA_1,OA_2,OA_3\cdots\cdots OA_8$为终边的角依次为：$2k\pi,2k\pi+$

$\frac{\pi}{4}$，$2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$2k\pi+\frac{3}{4}\pi$，$2k\pi+\pi$，$2k\pi+\frac{5}{4}\pi$，$2k\pi+\frac{3}{2}\pi$，$2k\pi+\frac{7}{4}\pi$，$(K\in Z)$。

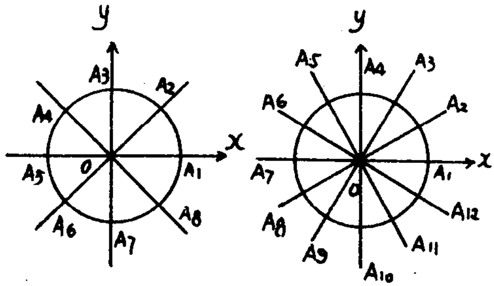

图　2—4

（2）　OA_1，OA_2，OA_3……$0A_{12}$ 为终边的角依次为：$zk\pi$，$2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$2k\pi+\frac{\pi}{3}$，$2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$2k\pi+\frac{2}{3}\pi$，$2k\pi+\frac{5}{6}\pi$，$2k\pi+\pi$，$2k\pi+\frac{7}{6}\pi$，$2k\pi+\frac{4}{3}\pi$，$2k\pi+\frac{3}{2}\pi$，$2k\pi+\frac{5}{3}\pi$，$2k\pi+\frac{11}{6}\pi$ $(K\in Z)$。

练习题二（A）组

1. 选择题

（1）把 $-885°$ 化成 $2k\pi+\alpha$（$o\leqslant\alpha<2\pi$，$K\in Z$）的形式是　　（　　）

A　$-4\pi-\frac{11}{12}\pi$　　B　$-6\pi+\frac{13}{12}\pi$

C　$-4\pi+\frac{13}{12}\pi$　　D　$-6\pi+\frac{11}{12}\pi$

（2）　第四象限角可以表示为　　（　　）

A　$(2k\pi+\frac{3}{2}\pi, 2k\pi)$　$k\in Z$

B　$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$

C　$(2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi)$　$k\in Z$

D　$[2k\pi+\frac{3}{2}\pi, 2k\pi+2\pi]$　$k\in Z$

(3)　下列命题中，结论正确的是　　　　　　　　　(　　　)

A　$2k\pi+\alpha=2k\pi+2\pi-\alpha(k\in z)$

B　若 $\alpha=2\pi+\beta$，则 $-\alpha=2\pi-\beta$

C　$-2\pi+\alpha$ 与 α 是终边相同角

D　$\frac{5}{n}\pi$ 与 $\frac{2n-5}{n}\pi$ 是终边相同角

2. 填空题

(1)$\frac{\pi}{5}=$____度，$-\frac{3}{8}\pi=$____度，$-\frac{17}{9}\pi=$____度；

(2)$-72°=$____弧度，$-315°=$____弧度，$375°=$____弧度；

(3)七边形内角和的一半＝____弧度；

(4)正五角星形的每个内角＝____弧度；

(5)半径为 2cm 的圆中，$\frac{2}{7}$cm 长的弧所对的圆心角＝____弧度≈____度；

(6)半径为 3cm 的圆 O 中，$\overset{\frown}{AB}$含有 120°的弧，则扇形 OAB 的面积是____。

3. 解答题

(1)正五边形 ABCDE 的半径为 5cm，求∠AEC 的度数和$\overset{\frown}{AC}$的长度；

(2)$\triangle ABC$中，$A+C=2B$，$A=3C$，求 A，B，C 的弧度数。

练习题二（B）组

1. 选择题

(1)下列命题中，结论正确的有　　（　　　）

① 最小角的弧度数为 0。

② 若 $\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，则 α 是直角。

③ 终边相同角的弧度数相等。

④ 1.25 弧度大于 70°。

A. ①②④　B. ①②　C. ②④　D. ④

(2)若 $-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，则 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 的大小关系是　　（　　）

A　$\alpha+\beta>\alpha-\beta$　B　$\alpha+\beta<\alpha-\beta$

C　$\alpha+\beta=\alpha-\beta$　D　无法判定

(3)　下列各角中，为第三象限角的是（　　　）

A　$k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$　　B　$-\frac{19}{3}\pi$

C　$2k\pi-\frac{4}{3}\pi(k\in Z)$　　D　$4k\pi+\frac{10}{9}\pi(k\in Z)$

(4)终边不在坐标轴上的角可以表示为　　（　　　）

A　$\{\alpha\mid\alpha\neq\frac{1}{2}k\pi\}$，B　$\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi$ 或 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},K\in Z\}$

C　$\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi-\frac{\pi}{2},K\in Z\}\cap\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi,K\in Z\}$

D　以上答案都不正确

2. 填空题

(1)与半径等长的弧所对的圆周角等于______弧度，等于半径的弦长所对的圆心角等于______弧度，与直径等长的弧所对的圆心角等于______弧度；

(2)以原点为顶点，x 轴正向为角的始边，与 $-\frac{15}{7}\pi$ 的终边关于 y 轴对称的角的集合是______；

(3)半径分别为 1，3 的同心圆中，96°的圆心角所对的扇环的面积是______；

(4)$12°=$______弧度，$\frac{\pi}{24}=$______度______分。

3. 解方程组 $\begin{cases}\alpha+3\beta=2\text{ 弧度},\\ 3\alpha-\beta=24°。\end{cases}$

(4)集合 $A=\{\alpha|\alpha=\frac{3k\pi}{4},k\in Z\}$，$B=\{\beta|\beta=\frac{5}{6}k\pi,k\in Z,-10\leqslant k\leqslant 8\}$，求与 $A\cap B$ 中的角为终边相同角的集合 S。

(三)任意角的三角函数

1. 三角函数的定义：以角 α 的顶点 O 为原点，始边为 x 轴正半轴建立直角坐标系，在角 α 终边上任取一点 p(x,y)，设 $|op|=r(r>0)$，

则：$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$。$tg\alpha=\frac{y}{x}$，

$ctg\alpha=\frac{x}{y}$，$\sec\alpha=\frac{r}{x}$，$\csc\alpha=\frac{r}{y}$，

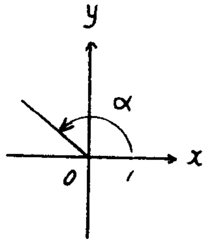

图 2—5

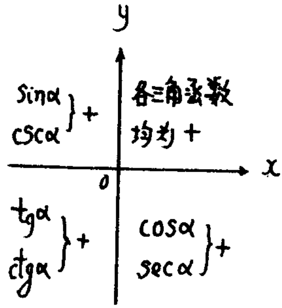

图 2—6

2. 各象限角三角函数的符号(如图 2—6)

3. 特殊角的三角函数值

① $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

② $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$

对于以上两组特殊角的正弦,余弦,正切,余切函数的值,必须记住其准确值。

4. 终边相同角的同一三角函数值相等,即:$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$,$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$,$tg(2k\pi+\alpha)=tg\alpha$,$ctg(2k\pi+\alpha)=ctg\alpha$,$(k\in z)$。

例 已知角 α 的终边经过点 $P(-\sin\frac{\pi}{4}, -\cos\frac{\pi}{3})$,求 α 的六个三角函数值。

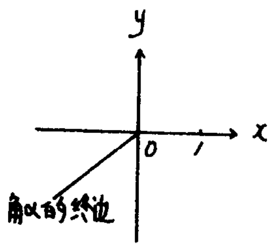

图 2—7

解:$x=-\sin\frac{\pi}{4}=$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$y=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},$$

$$\therefore \quad r=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}。$$

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2},$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}。$$