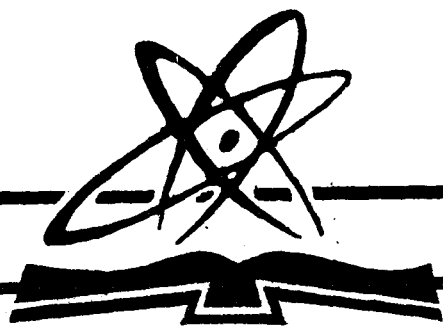


# 自动控制原理与系统

下 册

清华大学 郑大钟 石纯一编

国防工业出版社



# 自动控制原理及系统

(下 册)

清华大学 郑大钟 石纯一编

国防工业出版社

**自动控制原理及系统(下册)**

清华大学 郑大钟 石纯一编

国防工业出版社出版

北京市书版业 营业许可证出字第 074 号

解放军七二二六厂印刷 内部发行

787×1092<sup>1</sup>/<sub>16</sub> 印张 16<sup>1</sup>/<sub>2</sub> 392 千字

1980 年 6 月第一版 1980 年 6 月第一次印 印数: 1—18,000册

统一书号 N 15084 (四教 24) 定价: 1.70 元

## 内 容 简 介

本书是高等学校工科电子类自动控制专业统编（试用）教材之一，分为上下两册。上册重点介绍频域方法的古典控制理论，下册侧重介绍状态空间方法的现代控制理论的基础性内容。附有习题。

下册内容包括状态空间分析法，能控制和能观测性，Ляпунов 稳定理论，以及有关控制系统综合的几个专门问题（极点配置，解耦问题，观测器，实现问题等）。其中，以讨论线性定常系统为主。此外，专有一章讨论平稳随机信号作用下线性系统的分析，作为上册内容的延续。

本书也可供在自动控制方面工作的技术人员参考。

# 前 言

本书是高等学校工科电子类自动控制专业统编（试用）教材之一，分为上下两册。

本课程课内学时总数约 250，其中讲课学时约 190。本书内容大致包括三个部分：

1. 调节原理部分 首先通过典型系统举例引入自动控制的一些基本概念，然后着重分析控制系统的运动规律。以频率法为主、兼及根轨迹法。在讲清线性连续系统理论的基础上，扼要介绍分析非线性系统和采样系统的方法。

2. 控制系统部分 着重叙述对控制系统进行校正和设计的方法，包括对随动系统、恒值调节系统、多环系统以及双输入系统进行综合的方法，并介绍控制系统的试验和调整技术。仍以频率法做为主要工具。

以上两部分编入本书上册，在章节安排上略有交叉。

为满足后续课程需要，本书下册以一章篇幅分析线性系统在平稳随机过程信号作用下的运动，但不涉及综合问题。

3. 现代控制理论部分 指六十年代以来发展起来的新的控制理论，编入本书下册，主要叙述状态空间分析法、能控与能观测性问题，以及一些有关线性系统综合的问题，并介绍 ЛЯПУНОВ 稳定理论的概念。

学生在学习本课程之前，应当已经学过复变函数、积分变换和线性代数等课程以及有关各种控制元件和电子线路的知识。虽然如此，本书中对有关的数学知识在适当地方都安排了复习。因此，即使只学过微积分和微分方程以及线性代数基础知识的读者，也可以阅读本书而至于有太大的困难。本书大部分的章附有习题。

本书第一、二、三、八各章由清华大学自动化系吴麒执笔，第四、七两章由自动化系冯元琨执笔，第五、六两章由计算机系张钺执笔，下册第九章由计算机系石纯一执笔，第十至十四各章由自动化系郑大钟执笔。全书由上海交通大学张钟俊、施颂椒、韩慧君、张乃光、赵祚连、曹广益、陈学中、袁天鑫以及海军工程学院张文林等同志审稿。

为了赶上 1977 届学生使用，本书编写过程十分仓促，因此疏漏失误很多，不及一一订正，希望使用院校的教师和学生以及各方面读者对本书提出批评指正。

编 者

1979 年 7 月

# 下 册 目 录

<b>第九章 平稳随机信号作用下线性系统的分析</b> .....	(1)
9-1 引言.....	(1)
9-2 随机变数的分布函数和数字表征.....	(1)
9-3 二维概率分布.....	(4)
9-4 正态分布和 Poisson 分布.....	(5)
9-5 相关系数.....	(6)
9-6 随机函数.....	(9)
9-7 平稳过程.....	(12)
9-8 Ergodic 性质.....	(13)
9-9 相关函数、能量频谱密度的性质.....	(15)
9-10 两种方法建立相关函数和能量频谱密度.....	(17)
9-11 平稳过程的相关函数、能量频谱密度.....	(18)
9-12 平稳线性系统的分析.....	(22)
9-13 统计方法确定系统的特性.....	(27)
9-14 综合问题的提法.....	(29)
习 题.....	(31)
<b>第十章 状态空间分析法：控制系统的状态空间描述</b>	
10-1 引言.....	(32)
10-2 状态空间表达式.....	(34)
10-3 系统按其状态空间描述的分类.....	(41)
10-4 化系统的输入——输出时域描述为状态空间表达式.....	(44)
10-5 化系统的输入——输出频域描述为状态空间表达式.....	(49)
10-6 系统的特征值和状态方程的特征值规范形.....	(53)
10-7 由状态空间表达式导出传递函数阵.....	(63)
10-8 组合系统的状态空间表达式.....	(70)
习 题.....	(73)
<b>第十一章 状态空间分析法：线性控制系统的运动分析</b> .....	(77)
11-1 线性时不变系统的自由运动.....	(77)
11-2 矩阵指数函数.....	(79)
11-3 线性时不变系统的状态转移矩阵.....	(89)
11-4 线性时不变系统的强迫运动.....	(91)
11-5 线性时变系统的运动.....	(94)
11-6 线性连续系统状态空间方程的离散化.....	(97)

11-7	线性时不变离散系统的运动 .....	(100)
11-8	线性时变离散系统的运动 .....	(104)
	习 题 .....	(105)
<b>第十二章</b>	<b>线性控制系统的能控性和能观测性 .....</b>	<b>(107)</b>
12-1	问题的提法 .....	(107)
12-2	能控性的定义及推论 .....	(111)
12-3	线性系统的能控性判据 .....	(114)
12-4	能观测性的定义及推论 .....	(120)
12-5	线性系统的能观测性判据 .....	(123)
12-6	对偶性原理 .....	(126)
12-7	离散化系统保持能控和能观测的条件 .....	(129)
12-8	能控性能观测性和传递函数阵 .....	(135)
12-9	能控规范形和能观测规范形 .....	(139)
12-10	线性系统结构按能控性能观测性的分解 .....	(149)
	习 题 .....	(157)
<b>第十三章</b>	<b>Ляпунов 第二方法和控制系统的稳定性 .....</b>	<b>(159)</b>
13-1	引言 .....	(159)
13-2	准备知识 .....	(161)
13-3	稳定性的基本定义 .....	(166)
13-4	Ляпунов 第二方法的定理 .....	(169)
13-5	线性定常系统的稳定性分析 .....	(176)
13-6	非线性系统的稳定性分析: 变量梯度法和 Krasovskii 方法 .....	(182)
13-7	非线性系统的稳定性分析: Лурье 方法 .....	(188)
	习 题 .....	(192)
<b>第十四章</b>	<b>线性定常控制系统的综合 .....</b>	<b>(195)</b>
14-1	控制系统的构成及特性 .....	(195)
14-2	极点配置问题 .....	(197)
14-3	镇定问题 .....	(209)
14-4	解耦问题 .....	(211)
14-5	最优控制问题和极大值原理 .....	(221)
14-6	线性定常系统二次型性能指标的最优控制问题 .....	(229)
14-7	状态重构问题: 观测器理论 .....	(233)
14-8	利用观测器构成的状态反馈系统 .....	(241)
14-9	实现问题 .....	(247)
	习 题 .....	(256)

# 第九章 平稳随机信号作用下 线性系统的分析

## 9-1 引 言

前些章节介绍了控制系统的分析和综合，系统的输入函数均为确定的已知的时间函数，例如是单位阶跃函数、正弦函数等，这种分析方法是基本的重要的，使用这种方法解决了大量的控制系统的问题。然而在随机噪声比较明显的情况或系统的输入信号是随机信号时就不能局限于上述方法了，需要采用统计方法来讨论，方能得到满意的结果。例如，雷达天线的随动系统中，系统应跟踪飞机，但飞机的航迹应视为随机函数，另外空中的各种干扰噪声也是必须考虑的随机函数。

关于随机信号作用下线性系统的分析与综合早有讨论，特别是输入信号是平稳过程时 Wiener 建立了较完善的结果。

随着计算技术的飞速发展，如何使用数字计算机来解决随机信号作用下的线性系统的分析，综合取得了很大进展，60年代初期 Kalman 给出了可在计算机上实现的线性递推滤波算法。而且对信号平稳性限制可以去掉。Kalman 滤波方法已有实际的应用。

这一章我们仅就平稳信号作用下的系统的分析问题做一介绍，要求读者对概率论的基础知识略有了解。

## 9-2 随机变数的分布函数和数字表征

自然现象可分为两类，一类是有因果关系的，如简单的机械运动，物体受力后必然产生加速度而且可由 Newton 第二定律计算出加速度的值来，又如在标准气压下水加热到  $100^{\circ}\text{C}$  必然沸腾等。这类现象称为确定性现象可用通常的数学工具来描述。另一类是原因一定而结果却有多种可能性的现象，如某射击手在一定条件下进行射击，问能否击中目标？这是无法给出肯定回答的，射手水平再高也有射不中目标的可能性，又如在外界条件无显著变化的情况下，重复测量同一回路的电流，所得的数值也不尽相同，这类现象称为不确定性现象或称为概率型现象，这种概率型现象正是我们要讨论的。

一般地说，在同一条件下重复观测同一事件，所得结果是一组数  $x_1 \cdots x_n \cdots$ （而  $x_i, x_j$  当  $i \neq j$  时不一定相等），若用  $X$  表示这一组观测结果，则变量  $X$  便是随不同的观测而变化的量，我们称之为随机变数或随机变量，这样随机现象就可用随机变数来描述了。

严格地讲，随机变数是点的函数而非独立变数，更不能理解为可随意变化的变数，它也是有规律的，可以研究的，但要从大量现象的规律着眼来进行讨论。

给了随机变数，就要进一步研究它，我们希望用确定的函数或确定的数值来刻画带有不



确定性的随机变数，下面先介绍随机变数的分布函数和概率密度函数，为直观将比拟着力学中质量分布函数，质量密度函数来引入。

### 一维刚体

为方便，讨论质量集中于一条直线上而且质量总和为 1 的一维刚体，那么要想弄清楚刚体的运动情况，就需引入——

质量分布函数

$$M(x) = M(X < x)$$

表示在  $x$  点左边的刚体的质量。

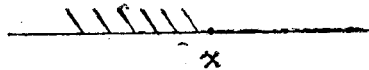


图 9-1

质量密度函数

$$\begin{aligned} m(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M(X < x + \Delta x) - M(X < x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} \\ &= M'(x) \end{aligned}$$

表刚体在  $x$  点的质量密度，它刚好是  $x$  点质量分布函数的导数，而且有

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_{-\infty}^x m(x) dx \\ M(-\infty) &= 0 \\ M(+\infty) &= 1 \end{aligned}$$

当然知道了  $M(x)$  或  $m(x)$  便能够全面确定刚体的运动了，但这是十分困难的难以求得的。而且研究一维刚体的运动也不必要知道  $m(x)$  或  $M(x)$  只需知道它的重心，转动惯量就够了，再者重心和转动惯量也可在不知  $M(x)$ 、 $m(x)$  的情况下计算出来，所以十分有必要介绍重心和转动惯量这两个量了。

质量中心——重心

$$\bar{X} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xm(x) dx}{\text{总质量}} = \int_{-\infty}^{\infty} xm(x) dx$$

对重心的转动惯量

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 m(x) dx$$

### 随机变数

仿照一维刚体情形，对随机变数很容易建立分布函数、概率密度函数、数学期望和方差，只需将质量的概念换之以概率便可。概率是衡量随机事件发生可能性的的大小的量，很自然地约定概率是介于 0 与 1 之间的一个量。

随机变数  $X$  的分布函数

$$F(x) = P(X < x)$$

表随机变数  $X$  发生在  $x$  点左边的概率,  $F(x)$  是非降的取值于 0 与 1 之间的函数, 且

$$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$$

随机变数  $X$  的概率密度函数

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= F'(x) \end{aligned}$$

表随机变数  $X$  发生在  $x$  点的概率密度, 同样有

$$f(x) \geq 0$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (F(-\infty) = 0)$$

且

$$\begin{aligned} P(a \leq X < b) &= P(X < b) - P(X < a) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

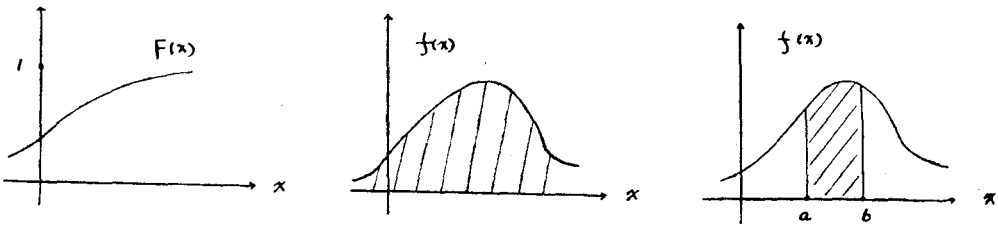


图 9-2

$F(x)$ ,  $f(x)$  全面地刻画了随机变数  $X$ , 但得知  $F(x)$  或  $f(x)$  常常是十分困难的, 而且对  $X$  基本性质的了解也不必知道  $F(x)$  或  $f(x)$ , 我们感兴趣的是从  $f(x)$  确定的两个特征量。

随机变数  $X$  的数学期望或称平均值

$$E(x) = \bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

这个数反映了随机变数  $X$  的集中性。有如一维刚体中, 重心  $\bar{X}$  反映了质量的中心一样, 这儿的  $E(x)$  表示的是随机变数  $X$  取值的一个期望数, 如有的随机变数所有的取值都集中在该随机变数的数学期望的近旁。

随机变数  $X$  的方差

$$D(x) = \sigma^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 f(x) dx$$

这个量反映了随机变数对其数学期望 $\bar{X}$ 的离散程度，当 $X$ 表某一随机误差量时， $\sigma^2$ 较小是较好的，因为这时出现大误差的可能性小，而 $\sigma^2$ 较大是不好的，因为这时出现大误差的可能性较大。这个量相当于一维刚体的转动惯量。

数学期望、方差等均称为随机变数的数字表征，其它的数字表征这里不再介绍了。有的随机变数的分布函数仅只由这两个数所确定，从这儿也可看出这两个量的重要性。

### 9-3 二维概率分布

有如数学分析中对二元函数的讨论，我们有必要同时研究两个或多个随机变数。当我们研究某电路时，常是同时量测电流和电压这两个量的，同时研究两个随机变量有助于我们讨论这两个随机变量间的关系。

我们只对二维随机变数作个简单介绍，但不难看出更多维的情形与二维情形并无本质的差别。今以 $(X, Y)$ 表二维随机变数，其中 $X, Y$ 均为随机变数，设 $(X, Y)$ 的取值为

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n) \dots$$

我们如同一维的讨论也要建立二维分布函数，密度函数等。

二维分布函数

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

表 $X < x$ 且 $Y < y$ 同时发生的概率。 $F(x, y)$ 是非负、非降的二元函数。

二维密度函数

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x, y \leq Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

表 $(X, Y)$ 发生在 $(x, y)$ 点的密度，同样是非负的二元函数。

有

$$P((X, Y) \in G) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_G f(x, y) \Delta x \Delta y$$

$$= \iint_G f(x, y) dx dy$$

即 $(X, Y)$ 发生在区域 $G$ 的概率，可由二维密度函数在区域 $G$ 上的二重积分来表示。

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

随机变数乘积 $XY$ 的数学期望为

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy$$

随机变数 $X, Y$ 的相关矩为

$$E[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})(y - \bar{Y})f(x, y) dx dy$$

其中  $\bar{X}, \bar{Y}$  分别是随机变数  $X$  和  $Y$  的数学期望。

随机变数  $X, Y$  称为相互独立的, 如果

$$\begin{aligned} P(x \leq X < x + \Delta x, y \leq Y < y + \Delta y) \\ = P(x \leq X < x + \Delta x) \cdot P(y \leq Y < y + \Delta y) \end{aligned}$$

直观之意是随机变数  $X$  的发生与  $Y$  的发生与否是无关的。若  $X, Y$  独立则有

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

其中  $f_1(x)$  是随机变数  $X$  的概率密度函数,  $f_2(y)$  是随机变数  $Y$  的概率密度函数。

### 9-4 正态分布、Poisson 分布

随机变数是多种多样的, 从而它们的分布函数  $F(x)$  也是各不相同的, 但实际问题中所出现的随机变数常常近似遵从正态分布或 Poisson 分布。事实上正态分布、Poisson 分布是由大量随机现象所遵从的分布规律抽象而得, 其它的分布律我们不一一研究了。

#### 正态分布

概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

的随机变数称为具有正态分布的随机变数。

不难计算出正态分布的数学期望和方差

$$E(X) = \bar{X} = a$$

$$D(X) = \sigma^2$$

正态分布完全由  $(a, \sigma)$  两个参数决定, 而且这两个参数一个是平均值  $a$ , 一个是方差  $\sigma^2$ 。所以很简单, 只要知道这两个数字表征正态分布就完全确定了。

正态分布的概率密度函数是对  $a$  点对称的曲线、是在  $a$  点取最大值的单峰曲线、 $\sigma$  越小曲线越陡, 还可证明

$$P(|X - a| < \sigma) \geq 65\%$$

$$P(|X - a| < 2\sigma) \geq 95\%$$

$$P(|X - a| < 3\sigma) \geq 99\%$$

一个随机变数常可写成独立随机变数之和, 当每个分量对总和影响不明显时, 这独立随机变数之和当分量无限加多时常从正态分布为其极限分布。如量测误差是由多方面因素引起的, 而每个因素却无决定性作用, 所以量测误差是近似于正态分布的。再者直观地看正态分布的概率密度曲线是两边小中间大, 符合这种规律的自然现象是不少的, 这些都是正态分布有着广泛应用的理由。

今后的讨论中, 一旦假设输入信号是正态平稳过程

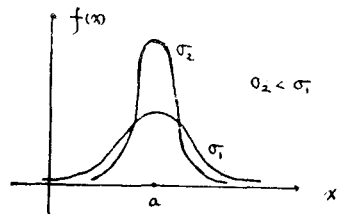


图 9-3

时, 相应线性系统的输出也是正态平稳过程。

### Poisson 分布

另一类常见的分布律是 Poisson 分布, 它描述的是不连续的离散随机变数的分布规律。分布规律如下给出

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

其中  $\lambda$  为参数,  $m$  取值  $0, 1, 2, \dots$

从而分布函数

$$F(x) = \sum_{m < x} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

不难验证 Poisson 分布的数学期望、方差均为  $\lambda$ 。

Poisson 分布的  $P(m)$  曲线如图 9-4 所示。

在机械工业中, 机械的停工、人身事故的发生, 还有  $\tau$  时间内电话交换台呼换的次数、 $\tau$  时间内电子管阴极发射到阳极的电子数目都可近似地认为遵从 Poisson 分布。特别是幅值为  $\pm h$ 、宽度、方向都是随机的方波在  $\tau$  时间内“0”出现 (改变方向)  $m$  次的概率为

$$P(m) = \frac{(\mu\tau)^m}{m!} e^{-\mu\tau}$$

其中  $\mu$  是单位时间内“0”出现的平均数, 这显然是数学期望为  $\mu\tau$  的 Poisson 分布。

Poisson 分布的  $P(m)$  曲线如图 9-4 所示。

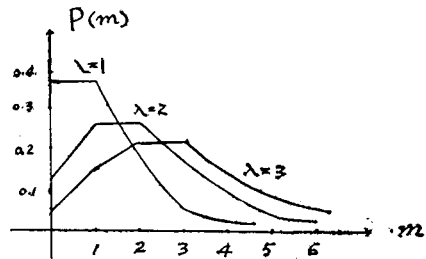


图 9-4

## 9-5 相关系数

介绍相关系数的目的在于理解相关函数的概念。

### 回归直线

自然界中变量间的关系有函数关系, 即有确定的单值依赖关系, 如欧姆定律等。变量间的关系更多的是无确定规律可循的, 如粮食产量与雨量有关, 但雨量一定粮食产量却不能确定, 电子仪器的发热量与时间的关系也是这样; 这种量间的关系性正是我们所要研究的, 希望给出个指标来衡量两个量间的相关性。

如随机变数  $X$  取值  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$Y$  取值  $y_1, y_2, \dots, y_n$

希望知道  $X = x^*$  时  $Y = ?$  若认为  $Y = y^*$  其可能性如何?

首先将点  $(x_i, y_i)$  画在平面上, 为方便考虑

$$\Delta x_i = x_i - \bar{X}$$

$$\Delta y_i = y_i - \bar{Y}$$

其中 
$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

从图象上粗略地观察，要给出  $\Delta x, \Delta y$  的近似关系，最简单地想法是用一条直线来表示（或分段用直线来逼近），我们就从这一想法入手。

设 
$$\Delta y = K \Delta x$$

为所配的直线，问题在于根据什么原则来取  $K$  的值呢？常用的是采用最小二乘法，即使

$$Q = \sum_{i=1}^n (\Delta y_i - \Delta y)^2 = \min$$

将  $Q$  看成  $K$  的函数，为使  $Q = \min$  自然可以

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 0$$

求得使  $Q$  取最小的  $K$  的值来。

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^n (\Delta y_i - \Delta y)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\Delta y_i - K \Delta x_i)^2 \end{aligned}$$

从而

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 2 \sum_{i=1}^n (\Delta y_i - K \Delta x_i) \times (-\Delta x_i)$$

令

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 0$$

有

$$\sum_{i=1}^n \Delta y_i \Delta x_i = K \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2$$

推得

$$K = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i}{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}$$

于是依  $Q$  取最小（误差平方和为最小）为指标，选取的直线为

$$\Delta y = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i}{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2} \right) \cdot \Delta x$$

这直线称为点  $(x_1, y_1) \cdots (x_n, y_n)$  的回归直线。

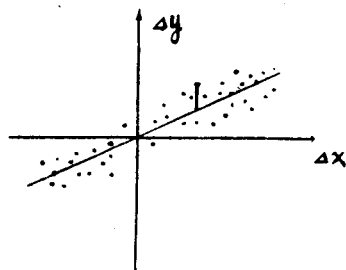


图 9-5

我们就用这直线近似表示  $X, Y$  间的依赖关系。要求任一点  $x^*$ ,  $Y$  应取何值, 就可直接从回归直线计算出。

### 相 系 数

下面来讨论当以  $\Delta y = K\Delta x$  来描述  $X, Y$  的关系时, 准确程度怎样? 当然最直接的办法是计算误差的平方和  $Q$ , 但这计算起来不方便, 而是通过  $Q$  另引入一个量——相关系数  $\rho$  来描述  $X, Y$  的相关程度。

令

$$B = \sum_{i=1}^n \Delta y_i^2$$

而规定

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{Q}{B}}$$

$Q \leq B$  是不难证明的, 这样  $1 - \frac{Q}{B} \geq 0$ , 所以  $\rho$  是实数。

而且  $\rho$  具有下述性质:

当  $Q=0$  时,  $|\rho|=1$ , 这时  $Q=0$ ,  $(x_i, y_i)$  点均在一直线上, 可认为  $X, Y$  是完全线性相关的。而  $\rho$  的正负可用来区分  $\Delta x$  增加时  $\Delta y$  是增加还是减少。

当  $Q=B$  时,  $\rho=0$  这时  $Q$  值最大了, 即误差平方和取最大值了, 这可认为  $X, Y$  的线性相关程度是最差的情形, 也可称  $X, Y$  是线性不相关的。

当  $Q < B$  时, 是一般情形, 有  $0 < |\rho| < 1$ , 体现了  $X, Y$  的线性相关程度是一般的。

这样看来, 使用  $X, Y$  的相关系数  $\rho$ , 便可刻画  $X, Y$  的线性相关程度了, 而且  $|\rho|$  近于 1, 表示了较强的直线关系,  $|\rho|$  近于 0, 表示了较弱的直线关系, 当  $\rho=0$  时也可认为  $X, Y$  的关系不能用直线代之。

### 相关系数的计算

下面的问题是怎样计算  $\rho$  的值了, 直接由定义计算不方便, 下面给出计算方法。

$$\begin{aligned} \rho^2 &= 1 - \frac{Q}{B} \\ &= \frac{B - Q}{B} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2 - \sum_{i=1}^n (\Delta y_i - K\Delta x_i)^2}{\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2} \\ &= \frac{2K \sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i - K^2 \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}{\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2} \\ &= \frac{2 \left( \sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i \right) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i}{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i}{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}{\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}{\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2\right)}. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2\right)}} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i\right) / n}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2 / n\right)\left(\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2 / n\right)}} \end{aligned}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 可用概率密度函数来计算, 设  $X$  的概率密度为  $f(x)$  而  $Y$  的概率密度为  $g(y)$ ,  $(X, Y)$  的联合二维概率密度函数为  $\phi(x, y)$ , 则  $\rho$  的分子的极限为

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta x \Delta y \phi(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})(y - \bar{Y}) \phi(x, y) dx dy \end{aligned}$$

记作  $\sigma_{XY}$ .

而分母的极限为

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Delta x^2 f(x) dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Delta y^2 g(y) dy\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 f(x) dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} (y - \bar{Y})^2 g(y) dy\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

分别记为  $\sigma_x, \sigma_y$ .

于是有

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

而我们今后要用到的相关函数, 实际上就是  $\rho$  的表示式的分子  $\sigma_{XY}$ .

## 9-6 随机函数

有关随机变数的知识已作了概述, 而我们要讨论的控制系统的输入输出信号都是和时间有关的随机量, 仅限于随机变数的讨论就不够了, 需要随机函数的工具了。随机函数是依赖于时间又有随机性的函数。

例如在研究调节系统的性能时, 我们做过这样的实验, 假设各个组所进行的同一实验的仪器设备是相同的, 考虑单位阶跃函数输入下系统的过渡过程, 从理论上讲各组所得的输出



函数应该是完全相同的，但实验结果并非如此。

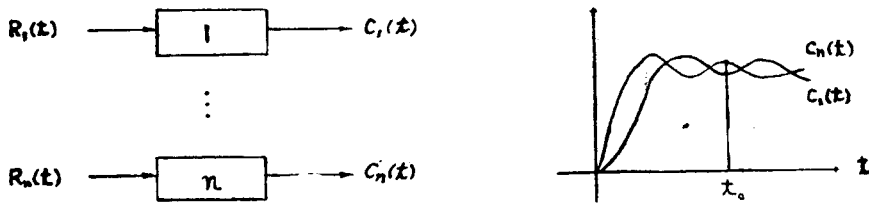


图 9-6

于是便提出这样的问题，从所得的很多不同的结果如何说明系统的特征呢？

一方面是同一条件下的实验结果是多条曲线

$$C_1(t), \dots, C_n(t)$$

另一方面我们从任一时刻  $t$  来观察输出  $C_1(t) \dots C_n(t)$ ，得到的是一组数。对任一确定的时刻  $t_0$  而言  $C(t_0)$  是个随机变数，取值

$$C_1(t_0), \dots, C_n(t_0)$$

这样一来，所讨论的输出信号  $C(t)$  是一族随机变数了（对不同的  $t$  而言），或说是依赖于时间参数  $t$  的随机函数，或说  $C(t)$  是随机函数。

如果用  $X(t)$  表随机函数，则  $X(t)$  可表一族时间函数  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ ，也可表一族随机变数  $X(1), X(2), \dots$

这样看来随机函数是既有随机性又有时间性的函数，有时也称为随机过程或 Stochastic 过程。而每个  $x_i(t)$  称为随机函数  $X(t)$  的一个实现。

例：
$$X(t) = at + b$$

其中  $a$  为随机变数， $b$  为常数， $t$  为时间变量时， $X(t)$  为随机函数。

$$X(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

其中  $A, \varphi$  均为随机变数， $\omega$  是常数， $t$  是时间变量时， $X(t)$  是一个随机函数。

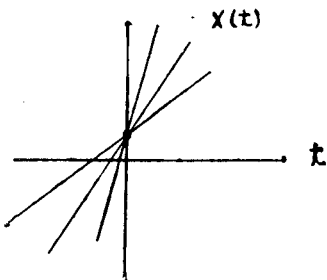


图 9-7

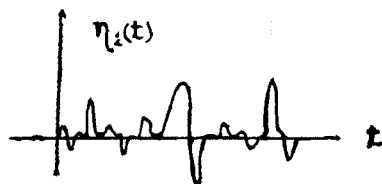


图 9-8