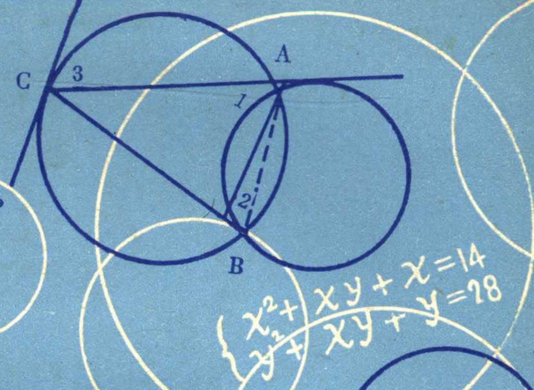
数理化基础知识



代数

（二）

山东科学技术出版社

数理化基础知识

代　　数

（二）

烟台师专　编写

山东科学技术出版社

一九八〇年·济南

内 容 提 要

本书是《数理化基础知识》中的一本，系统地介绍了指数、对数、集合、函数、数列等方面的基础知识。书中介绍的内容，简明扼要，通俗易懂，联系实际，对重点、难点都作了较详细的说明，并附有较多的例题和练习题，以提高广大读者分析问题和解决问题的能力。

本书可供中等业余学校作教材用，也可作为知识青年和干部的自学用书，还可供考大学的青年和在校学生学习参考。

数理化基础知识

代　　数

（二）

烟台师专编写

*

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　8.25印张　169千字

1980年7月第1版　1980年7月第1次印刷

印数：1—34,200

书号13195·28　　定价 0.63 元

编者的话

数学、物理、化学是重要的基础学科。它已经渗透到人们的全部实践活动。纵览宇宙，运算天体，探索粒子之微，揭示生命之谜，从高深抽象的科学理论，到人们丰富繁杂的日常生活无处不用数理化。今天，在向四化进军中，越来越显示出学好数学、物理、化学的重要作用。

从提高整个中华民族的科学文化水平出发，为配合业余教育的全面开展，满足广大读者业余自学的急切需要，特别是为了帮助考大学的青年和在校学生加深对课本知识的理解，提高分析问题和解决问题的能力，我们编写了这套《数理化基础知识》。其中，《代数》3册，《几何》、《三角》、《解析几何》、《微积分》各一册；《物理》4册；《化学》2册。

在编写过程中，我们根据成人和速成的特点，参照教育部现行中学教学大纲的内容，由浅入深，循序渐进，着重讲清数学、物理、化学的基本概念和基本知识，对每一章中的关键性问题都做了重点介绍，并重视了运算技巧的训练和分析总结解题规律。每册书都选有一定数量的综合性习题，在选习题时还注意了习题的典型性，以培养读者举一反三的能力。每章后有小结，难度大的习题有提示，每册书末有答案备查。

这套基础知识丛书，可供中等业余学校作教材用，也可作为知识青年和干部的自学用书，还可供考大学的青年和在校学生学习参考。

目　　录

第五章　指数与对数

在第二章里，我们只讲过正整数指数幂的概念和运算法则．但在实际问题中，除了正整数指数幂以外，还会遇到零、负整数、分数和无理数指数幂．因此，有必要把指数的概念从正整数指数加以推广．在此基础上，再反过来研究由已知幂求指数的问题，从而，引出对数的概念及其运算法则．应用对数能使一些繁杂的计算化成简单的计算．

§5·1　指数概念的推广

1.零指数

我们以前遇到的幂的指数都是正整数，并且已经掌握了正整数指数幂的一些运算法则．即：

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；

(2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$, $m > n$)；

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$；

(4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$；

(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ ($b \neq 0$)．

在上面第(2)个运算法则中，如果$m=n$，将会出现什么情况呢？我们来看下面的例子：

$$7^2 \div 7^2, \quad a^4 \div a^4 \ (a \neq 0).$$

如果应用同底数的幂相除的法则，就得

$$7^2\div7^2=7^{2-2}=7^0,$$

$$a^4\div a^4=a^{4-4}=a^0\ (a\neq0).$$

这时就出现了零指数.

另一方面，同底数的幂相除，当被除式的指数等于除式的指数时，得到的商是1.

$$7^2\div7^2=\frac{7^2}{7^2}=1,\quad a^4\div a^4=\frac{a^4}{a^4}=1\ (a\neq0).$$

为了使法则（2）在 $m=n$ 时仍适用，规定零指数幂的意义为：

$$a^0=1\quad(a\neq0).$$

这就是说，任意一个不等于零的数的零指数幂等于1.

根据以上规定，上面的例子就可以用同底数的幂的除法法则来计算.

$$7^2\div7^2=7^{2-2}=7^0=1,$$

$$a^4\div a^4=a^{4-4}=a^0=1\quad(a\neq0).$$

应当注意，零的零次幂没有意义.

注：以上所以要说明零指数幂的意义，是为了使同底数的幂的除法法则在 $m=n$ 时，也能适用，并不是证明 $a^0=1$.

零的零次幂没有意义的道理在于零不能做除数.

【例1】 (1) $(-0.8)^0=1$； (2) $(3\sqrt{2})^0=1$；

(3) $-0.8^0=-1$；

(4) $\frac{2}{5}(x-y)^0=\frac{2}{5}\ (x\neq y)$.

2. 负整数指数

在 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ($a\neq0$，$m>n$) 中，如果 $m<n$，又将

出现什么情况呢？我们来看下面的例子：

$$7^2 \div 7^5, \qquad a^2 \div a^6 \ (a \neq 0).$$

如果应用同底数的幂相除的法则，就得

$$7^2 \div 7^5 = 7^{2-5} = 7^{-3},$$

$$a^2 \div a^6 = a^{2-6} = a^{-4} \quad (a \neq 0).$$

这时就出现了负整数指数.

另一方面，

$$7^2 \div 7^5 = \frac{7\cdot 7}{7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7} = \frac{1}{7\cdot 7\cdot 7} = \frac{1}{7^3},$$

$$a^2 \div a^6 = \frac{a\cdot a}{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a} = \frac{1}{a\cdot a\cdot a\cdot a}$$

$$= \frac{1}{a^4} \quad (a \neq 0).$$

为了使法则（2）在 $m<n$ 时仍适用，我们规定负整指数幂的意义为：

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \ (a \neq 0，m \text{ 是正整数}).$$

这就是说，任意一个不等于零的数的负整数指数幂，等于把幂的指数变号后所得的幂的倒数.

这样规定后，上面例子就可以用同底数的幂的除法法则来计算.

$$7^2 \div 7^5 = 7^{2-5} = 7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343},$$

$$a^2 \div a^6 = a^{2-6} = a^{-4} = \frac{1}{a^4} \quad (a \neq 0).$$

应当注意，零的负整数次幂没有意义.

【例 2】 (1) 10^{-4}; (2) $\left(\frac{1}{4b}\right)^{-3}$; (3) $(-a)^{-5}$.

解 (1) $10^{-4}=\frac{1}{10^{4}}=\frac{1}{10000}=0.0001$;

(2) $\left(\frac{1}{4b}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{4b}\right)^{3}}=\frac{1}{\frac{1}{64b^{3}}}=64b^{3}$;

(3) $(-a)^{-5}=\frac{1}{(-a)^{5}}=\frac{1}{-a^{5}}=-\frac{1}{a^{5}}$.

【例 3】用小数表示下列各数:

10^{-7}, 5×10^{-6}, 4.2×10^{-8}.

解 $10^{-7}=\frac{1}{10^{7}}=0.0000001$,

$5\times10^{-6}=5\times\frac{1}{10^{6}}=5\times0.000001=0.000005$,

$4.2\times10^{-8}=4.2\times\frac{1}{10^{8}}=4.2\times0.00000001$

$=0.000000042$.

【例 4】 用一位整数(或者带一位整数的小数)与10的负整数次幂的积的形式表示下列各数:

0.00000000004, 0.00000000708.

解 $0.00000000004=4\times0.00000000001$

$=4\times\frac{1}{10^{11}}=4\times10^{-11}$,

$0.00000000708=7.08\times0.000000001$

$$=7.08\times\frac{1}{10^9}=7.08\times10^{-9}.$$

把一个小数写成 $a\times10^n$ 的形式，其中 a 大于 1 或等于 1 而小于10，n 为负整数时，n 的绝对值等于原数中第一个不等于零的数字前面所有的零的个数（包括小数点前面一个零在内）．这种表示法比较简便，在物理、化学、工程技术中是经常用的．

【例 5】利用负整数指数，把下列各式化成不含分母的式子：

(1) $\frac{a}{3bc^2}$；　(2) $\frac{3}{2a^{-3}b^{-1}c^2}$．

解　(1) $\frac{a}{3bc^2}=\frac{1}{3}a\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c^2}=\frac{1}{3}ab^{-1}c^{-2}$；

(2) $\frac{3}{2a^{-3}b^{-1}c^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{a^{-3}}\cdot\frac{1}{b^{-1}}\cdot\frac{1}{c^2}$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{a^3}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{b}}\cdot\frac{1}{c^2}=\frac{3}{2}a^3bc^{-2}.$$

这里，数字系数习惯上不写成负整数指数幂的形式．

零指数幂和负整数指数幂的引入，初步推广了幂的概念．关于正整数指数幂的运算法则，对于零指数和负整数指数幂仍能适用．例如，

$$a^3\cdot a^0=a^{3+0}=a^3,\quad a^{-3}\cdot a^{-2}=a^{-3+(-2)}=a^{-5}.$$

【例 6】计算 $\frac{(a^{-2}b^{-3})(-4a^{-1}b)}{12a^{-4}b^{-2}c}$．

解 $\dfrac{(a^{-2}b^{-3})(-4a^{-1}b)}{12a^{-4}b^{-2}c}$

$=-\dfrac{4}{12}a^{(-2)+(-1)-(-4)}b^{(-3)+1-(-2)}c^{-1}$

$=-\dfrac{1}{3}ab^0c^{-1}=-\dfrac{1}{3}ac^{-1}$.

【例 7】计算 $(x^2-y^{-2})\div(x-y^{-1})$.

解 $(x^2-y^{-2})\div(x-y^{-1})=\dfrac{[x^2-(y^{-1})^2]}{x-y^{-1}}$

$=\dfrac{(x-y^{-1})(x+y^{-1})}{(x-y^{-1})}=x+y^{-1}$.

习 题 1

1.（口答）(1) 0.25^0, $(-\sqrt{3})^0$, $5x^0$, $(5x)^0$, $2(a-b)^0$, $2a^0-(2a)^0$, a^0+b^0; (2) 1^{-10}, $(-1)^{-1}$, $(-2)^{-3}$, $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-5}$, -0.2^{-2}, $(a+b)^{-1}$, $a^{-1}+b^{-1}$.

2. 口答下列各式的值:

$a^{-3}\cdot a^5$, $a^{-4}\cdot a^3$, $3^0\cdot 3^{-3}$, $a^3\div a$, $a^2\div a^{-1}$, $a^{-2}\div a^{-2}$, $(a^{-2})^4$, $(a^{-2})^{-4}$, $(a^{-2})^0$, $(a\times a^{-1})^{-4}$.

3. 计算下列各式:

(1) $(-2)^3-(-1)^0$;

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^0+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$;

(3) $(-3)^3-(-3)^{-3}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3$;

(4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\div\left(-\frac{1}{3}\right)^{0}$；

(5) $\left(\frac{8}{15}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{15}{16}\right)^{-3}$；　(6) $\left[\frac{5}{8}-\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\right]^{-1}$.

4．试将下列各式改写为不带负整数指数的式子：

(1) $2a^{-2}b$；　(2) $\frac{3c^{-2}}{b^{-3}}$；　(3) $(3ab)^{-2}$；

(4) $(a^{-n})^{2}$；　(5) $\frac{1}{2a^{-2}b^{-3}c}$；　(6) $\left(\frac{a+2b}{2a-b}\right)^{-2}$；

(7) $\frac{(x-y)^{-3}}{(x+y)^{-1}}$；　(8) $\frac{1}{(a^{-1}-b^{-1})^{-1}}$.

5．利用负整数指数，把下列各式化成不含分母的式子：

(1) $\frac{1}{y^{5}}$；　(2) $\frac{a^{2}}{b^{3}}$；　(3) $\frac{m^{2}}{x^{5}y}$；

(4) $\frac{2x-y}{(x+y)^{2}(x-y)}$；(5) $\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}$.

6．氧分子的质量是5.31×10^{-23}克，电子的质量是9.1×10^{-28}克，把这两个数分别用小数表示出来.

7．把下列各数化成一位整数（或者带一位整数的小数）乘10的负整数次幂的积：

(1) 原子的直径约是0.00000001厘米；

(2) 氢核的半径是0.0000000000027厘米.

8．求下列各式的结果：

(1) $(a^{2}b^{3})^{-2}\cdot(-a^{-3}b^{2})$；　(2) $(5a^{-2}b^{-3})\div(10a^{2}b^{-3})$；

(3) $\left[\left(\frac{3ab^{-2}c^{-3}}{2x^{2}y}\right)^{2}\right]^{-3}$；

(4) $(3x^{-2}y^{-3}+5x^{-1}y^{2}-6x^{2}y^{-1})\cdot2x^{-1}y^{-2}$；

(5) $(x^{3}y^{-2}-x^{2}y^{-1}+x-y)\div x^{2}y^{-2}$；

(6) $(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$;

(7) $(3x^{-2}-2x^{-1}-x^0)(4+x-2x^2)$;

(8) $(a^{-2}+b^{-1})^3$.

9．计算下列各式：

(1) $\dfrac{1}{(ab^{-2}x)^2}\left(\dfrac{a^2}{2b}\right)^{-2}\dfrac{(ab)^{-1}x}{a(bx^2)^{-1}}$;

(2) $(ab^{-2}x)^3\left(\dfrac{ab^2}{c^2}\right)^{-3}\dfrac{(ax^2)^{-2}}{(ab^2)^3b^{-1}}$;

(3) $\dfrac{(a^2b^{-2})^3}{\left(\dfrac{a}{b^2}\right)^{-2}}\ \dfrac{\left(\dfrac{a^{-2}}{b}\right)^3}{\left(\dfrac{b^3}{a^2}\right)^{-2}}$;

(4) $(a^2b)^{-1}\left(\dfrac{b}{a^2}\right)^3\dfrac{c}{\left(\dfrac{a}{b^2}\right)^2}$;

(5) $(p^3+8p^{-3})\div(p^2-2+4p^{-2})$;

(6) $\left(\dfrac{l^5+l^{-5}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{l^5-l^{-5}}{2}\right)^2$;

(7) $\left(\dfrac{x^{-1}-1}{x^{-1}+1}-\dfrac{x^{-1}+1}{x^{-1}-1}\right)(2^{-1}-4^{-1}x^{-1}-4^{-1}x)$ $(x\neq\pm1)$;

(8) $\dfrac{a^2+a^{-2}-2}{a^2-a^{-2}}$ $(a\neq\pm1)$．（提示：先分解因式）．

3.分数指数

对于零指数幂与负整数指数幂都有了确定的意义，那么，当指数是分数时，是否也有意义呢？

在第二章中已经讲过，如果n是大于1的正整数，m是n的整数倍，那么，

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

例如 $\sqrt{a^8}=a^{\frac{8}{2}}=a^4$； $\sqrt[3]{a^{15}}=a^{\frac{15}{3}}=a^5$.

如果m不是n的整数倍，在上面等式的右端便出现了分数指数幂．例如，$m=2$，$n=3$，那么，$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{3}{2}}$．显然，$a^{\frac{3}{2}}$不能用正整数指数幂的定义来解释，因为不能把$a^{\frac{2}{3}}$理解为$a$自乘$\frac{2}{3}$次的积．所以，必须对$a$的分数指数幂另外给出定义．假如规定在$m$不是$n$的整数倍时，$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$也能适用，那么，应该把$a^{\frac{m}{n}}$看成是根式$\sqrt[n]{a^m}$的另一种表达形式．因此，我们规定分数指数幂的意义为：

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\ （m,\ n\text{都是正整数，且}\ a\geqslant 0）.$$

这就是说，正数的正分数指数幂是一个根式，它的根指数是分数指数的分母，根底数的幂指数是分数指数的分子．

在$a=0$时，$a^{\frac{m}{n}}=0$，即零的正分数次幂等于零．

注：当$a<0$时，$a^{\frac{m}{n}}$可能没有意义，例如$(-2)^{\frac{3}{2}}$，因此，我们在这里不考虑底数是负数的分数指数幂．

【例8】 (1) $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{2^6}=2^2=4$；

(2) $0.001^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(0.001)^2}=\sqrt[3]{(0.1)^6}=(0.1)^2=0.01$；

(3) $(a+b)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a+b}$.

对于负分数指数幂 $a^{-\frac{m}{n}}$ 理解为正分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$ 的倒数，也就是

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\quad（m,n\ 都是正整数，且\ a>0）.$$

【例 9】 (1) $8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{4}$；

(2) $(0.001)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{(0.001)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{0.01}=100$；

(3) $3(a+b)^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{\sqrt{a+b}}\quad(a\neq -b)$.

根据上面所讲的，分数指数幂可以写成根式；反过来，根式也可以写成分数指数幂.

【例10】 (1) $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$； (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}=2^{-\frac{1}{2}}$；

(3) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}=x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}\quad(y\neq 0)$；

(4) $\frac{1}{2\sqrt[3]{a+b}}=\frac{1}{2(a+b)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}(a+b)^{-\frac{1}{3}}\,(a+b\neq 0)$.

分数指数幂的引入，再一次推广了幂的概念.

对于分数指数幂的运算法则，仍可运用正整数指数幂的运算法则. 现举例证明如下：

设 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{r}{s}$ 是两个正分数（p，q，r，s 都是正整数），

证明 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ 适用于以下三种情况：

（1）当 $m=\frac{p}{q}$、 $n=\frac{r}{s}$ 时，

$$a^m\cdot a^n=a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r}.$$

把右边根式化为同次根式，得

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[qs]{a^{ps}}\cdot\sqrt[qs]{a^{qr}}=\sqrt[qs]{a^{ps}\cdot a^{qr}}.$$

因为 ps 和 qr 是正整数，利用 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，得

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[qs]{a^{ps+qr}}.$$

把右边化为分数指数幂，则

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{ps+qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

由此可知，当 m、n 是正分数时，$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$成立.

（2）当 $m=\frac{p}{q}$、 $n=-\frac{r}{s}$ $\left(\text{或 } m=-\frac{p}{q},\ \ n=\frac{r}{s}\right)$ 时，

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}}\cdot\frac{1}{a^{\frac{r}{s}}}.$$

使右边的分数指数幂化为同次根式后，并利用同次根式除法和正整数指数幂的除法法则，得

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\frac{\sqrt[q]{a^r}}{\sqrt[s]{a^r}}=\frac{\sqrt[qs]{a^{ps}}}{\sqrt[qs]{a^{qr}}}=\sqrt[qs]{\frac{a^{ps}}{a^{qr}}}$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps-qr}}=a^{\frac{ps-qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$$

$$=a^{\frac{p}{q}+\left(-\frac{r}{s}\right)}.$$