数学

复旦大学成人教育学院
上海市高等学校招生委员会办公室 主编

复旦大学出版社

各类成人高考指导精读丛书 各类成人高考指导精读丛书 各类成人高考指导精读丛书

各类成人高考指导精读丛书

数　　学

复旦大学成人教育学院
上海市高等学校招生委员会办公室　主编

复旦大学出版社

内 容 提 要

本书是根据国家教委成人教育司与国家教委考试管理中心共同审订的《1990年全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》，并在参考、研究历年来成人高考试卷的基础上编写而成的。全书约28万字，分成代数、三角、立体几何、解析几何四大部分十八章。书中每章均给出了“考试要求与复习要点”，并辅之以“例题精析”，每章末均给出练习题和参考答案。书后还给出八套自我测试试题（有评分标准）和参考答案以及1991年、1992年两年的高考试题和参考答案。

（沪）新登字202号

数 学

复旦大学成人教育学院
上海市高等学校招生委员会办公室 主编

复旦大学出版社出版
（上海国权路579号）
新华书店上海发行所发行 上海译文印刷厂印刷
开本 850×1168 1/32 印张 14 字数 415,000
1993年5月第1版 1993年5月第1次印刷
印数 1—5,000
ISBN7-309-00961-4/G·157
定价 9.50元

各类成人高考指导精读丛书编委会

主　编　范承善　陈建新　赵振华

常务副主编　陈国新

编　委（按姓氏笔画为序）

王砚君　阮家祥　陈　均　陈建新　陈国新

陆玉如　佘志海　范承善　周茂林　赵振华

胡仁儒　秦杜馨　黄玉峰　曹家骜

序　　言

随着我国社会主义建设事业的不断发展，成人教育的重要性越来越为人们所认识。如果说普通教育是为我们的事业培养接班人的话，那么成人教育则是对当班人的培养。从某种意义上讲，当班人的培养更为重要。它直接关系到我们事业的进展情况，决定着交班的质量。

尽管成人教育主要是非学历教育，诸如职工岗前岗后的培训，以及各种类型的继续教育等。但是，就我国目前的情况而言，成人高等学历教育是我国成人教育中的一个十分重要的、不可缺少的组成部分。因为我国的高中毕业生，每年只有百分之二十几能够进入各类高等院校接受大学教育，百分之七、八十的高中生，在毕业之后将立即踏上各种工作岗位。他们当中必然地会有一部分人在经过几年的工作之后，要求进一步提高自己的学历层次，以适应工作的需要，或者满足个人不断自我完善的要求，每年都有数以百万计的在职人员申请报考各类成人高校这一事实，就充分地说明了这一点。

这些在职人员，由于多年工作的锻炼，增长了才干，提高了能力，已基本具备了进一步深造的条件。但是由于较长时间地脱离学校教育，一些基础知识有所生疏，因而难以应付成人高等学历教育的入学考试。于是，各类成人高考复习班，以及成人高考复习资料便应运而生。

为了提高成人高考的录取率，成人高考复习班的时间越办越长，1985年和1986年时，每期成人高复班一般只有二、三个月，现在几乎要办两个学期。成人高考复习资料也越编越厚，内容尽书详实，习题越来越多，以为这是帮助他们的最好方法。然而事实往往并非如此。多年来从事成人教育工作，使我们深深体会到在职人员利用业余时间参加成人教育，困难是很大的。他们必须既要做好工作，否则难以取得工作单位的支持，又要照顾好家庭(他们大多已婚)，否则难以得到家属的支

持。在此基础上，才能挤出时间参加学习，可见他们的学习时间很有限。因此，广种薄收，题海战术等往往难以奏效，是必然的。

正鉴于此，我们聘请了一批长期从事成人教育工作的同志，尤其是多年从事成人高考复习指导的同志，编写了这套“各类成人高考指导精读丛书”。编写该丛书的宗旨是“少而精”，要把高中阶段最主要的基本知识、基础理论清晰地介绍给读者，并辅以一定量的练习题，高考模拟试题等，习题和试题均有答案或提示，力图让读者把有限的学习时间用在掌握这些基本概念，基本方法上，而不致被一些枝节问题所困扰。同时，提高读者的应试能力。另外，我们在书后还附上了1991年和1992年成人高考的试题和答案，便于读者参考、研究。我们希望该丛书能给读者以很好的指导，并预祝使用这套丛书的读者在成人高等教育入学考试中取得成功。

该丛书中的数学部分由张以榕、沈月仙、郑跃星、秦杜馨等四位同志编写。书中注有符号“*”的部分仅适合于理工农医类考生。

由于编写时间仓促，错漏之处在所难免，恳望读者不吝指正，以便在再版时修正。

编　者

1992年冬

目　录

第一部分　代　　数

第一章　数、式、方程和方程组

【考试要求与复习要点】

1．数

理解有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、算术平方根的概念，会进行有关计算。

（1）有理数

形如$\frac{p}{q}$的数，其中p, q是整数，且$q \neq 0$。

（2）实数

有理数和无理数总称。

（3）相反数与绝对值

a与$-a$互为相反数；0的相反数是零。

正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。即

$$|a| = \begin{cases} a, & 若\ a \geqslant 0; \\ -a, & 若\ a < 0. \end{cases}$$

$|a|$的几何意义是：数a在数轴上的对应点到原点的距离。

（4）算术平方根

一个正数的正的二次方根，叫做算术平方根。

记作$\sqrt{a}\,(a>0)$，特别$\sqrt{a^2}=|a|$。

由上述可知，绝对值概念中要用到相反数；算术平方根概念中，在特别情形，要用到绝对值。

非负值，指的是实数 a 不是负值，即 $a\geqslant 0$。这里 a^2，$|a|$，$\sqrt{a^2}$（其中 a 为实数）都是非负值。

2．式

理解有关整式、分式的概念，会进行有理式的加、减、乘、除、乘方运算。

（1）整式

进行整式运算时，必须熟练掌握乘法公式，对多项式会进行因式分解。

乘法公式：
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$
$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,$$
$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3,$$
$$(a\pm b)^3=a^3\mp 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

（2）分式

除式中含有字母的有理式叫做分式，分式的基本性质是

$$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}\quad (m\neq 0)$$

3．二次根式

理解二次根式的概念和性质，会进行二次根式的化简和运算。

（1）根式

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式（n 为奇数时，a 是任何实数；n 为偶数时，$a\geqslant 0$）。对于二次根式有 $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$；$\sqrt{a^2}=|a|$。

（2）二次根式的性质

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$，

$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad (a\geqslant 0,\ b>0)$。

（3）最简二次根式

被开方数的每个因式的指数都小于根指数 2，并且被开方数不含分母的二次根式。

4．方程

会解一元一次方程，一元二次方程。能灵活运用一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 根的判别式及根与系数的关系解题。

(1) 一元二次方程根的判别式

根的判别式是 $\Delta=b^2-4ac$，

若 $\Delta>0$，则方程有两个不等的实数根；

若 $\Delta=0$，则方程有两个相等的实数根；

若 $\Delta<0$，则方程没有实数根。

上述情况，反之也成立。

(2) 一元二次方程根与系数的关系

如果 x_1，x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的两个根，那么

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

反之也成立。特别地，如果 x_1，x_2 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根，那么

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q. \end{cases}$$

反之也成立。

5. 方程组

会解有唯一解的二元一次方程组、三元一次方程组；会解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组；会解简单的由两个二元二次方程组成的方程组。其中，由两个二元二次方程组成的方程组，主要指以下几种类型：

可以消去某个未知数的，如

$$\begin{cases} 2x^2+5y^2-4x+y-6=0, \\ x^2+2y^2-2x+y-3=0. \end{cases}$$

可以消去二次项的，如

$$\begin{cases} 2x^2-5xy+3x-2y=10, \\ 5xy-2x^2+7x-8y=0. \end{cases}$$

一个方程可以分解一次方程的，如

$$\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x^2-4xy+3y^2=0. \end{cases}$$

【例题精析】

例 1 选择题：

(1) 若等式$\frac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x-1}=\frac{x\sqrt{x+1}}{x-1}$成立，则 x 的取值范围是 (　　).

(A) $x\neq1$；　　(B) $x\geqslant0$ 且 $x\neq1$；

(C) $x\neq1$ 且 $x\geqslant0$，$x=-1$；　(D) 上述均不对.

(2) 方程$(x+7)(3-x)=12$ 的根的情况是(　　).

(A) 有两个不相等的实数根；(B) 有两个相等的实数根；

(C) 没有实数根；　　(D) 不能确定.

分析 (1) 使式子有意义，须$\begin{cases} x-1\neq0, \\ x+1\geqslant0. \end{cases}$即 $x\geqslant-1$ 且 $x\neq1$，又由$\sqrt{x^2}=x$ 得 $x\geqslant0$，所以 $x\geqslant0$ 且 $x\neq1$.但是，当 $x=-1$ 时，等式也成立，故应选(C).

或者，由 $x=-1$，等式显然成立，排除供选的答案(A)，(B)，再从(C)，(D)中去选.

(2) 判断一元二次方程的根的情况，须应用根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$. 这时，方程要整理成 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的形式. 本题的方程为：$x^2+4x-9=0$，所以，$b^2-4ac=4^2-4\times1\times(-9)>0$，故应选(A).

例 2 已知：$x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$； 求：$3x^2-5xy+3y^2$ 的值.

解 因为 $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}$，

$$y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{6},$$

所以 $x^2+y^2=(5-2\sqrt{6})^2+(5+2\sqrt{6})^2=2[5^2+(2\sqrt{6})^2]$

$$=98,$$

$$xy=(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})=1.$$

于是，$3x^2-5xy+3y^2=3(x^2+y^2)-5xy=3\times98-5=289$。

说明 本题可理解为：若 $x=a-b$，$y=a+b$，则 $x^2+y^2=(a-b)^2+(a+b)^2$，$xy=(a-b)(a+b)$。从而构造出关于 x，y 的一些代数式。

例 3 若 $(x-z)^2-4(x-y)(y-z)=0$，试求 $x+z$ 与 y 的关系。

解法 1 因为 $(x-z)^2-4(x-y)(y-z)=0$，

展开得 $x^2-2xz+z^2-4xy+4y^2+4xz-4yz=0$。

配成"$x+z$"形式有 $(x+z)^2-4y(x+z)+4y^2=0$，

所以 $[(x+z)-2y]^2=0$，

即 $x+z=2y$。

解法 2 因为 $(x-y)+(y-z)=x-z$，

由已知 $[(x-y)+(y-z)]^2-4(x-y)(y-z)=0$，

展开得 $(x-y)^2-2(x-y)(y-z)+(y-z)^2=0$，

上式就是 $[(x-y)-(y-z)]^2=0$。

所以 $(x-y)-(y-z)=0$，

即 $x+z=2y$。

例 4 若 $\dfrac{x}{x^2+x+1}=a$，其中 $a\neq0,\dfrac{1}{2}$，试求 $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值。

解 因为 $a\neq0$，

所以 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{x^2+x+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}+1$，

从中解出 $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a}-1$。

这时 $$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+1=\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]+1$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1=\left(\frac{1}{a}-1\right)^2-1=\frac{1-2a}{a^2},$$

又 $a\neq\frac{1}{2}$，所以 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{a^2}{1-2a}$。

例 5 已知：方程组 $\begin{cases}ax-y=b,\\3x+by=a\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=1,\\y=2;\end{cases}$ 求：a,b 的值。

解 因为 $\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$ 是原方程组的解，

所以 $$\begin{cases}a-2=b\\3+2b=a\end{cases},就是\begin{cases}a-b=2,\\a-2b=3.\end{cases}$$

解关于 a，b 的方程组得 $\begin{cases}a=1,\\b=-1.\end{cases}$

所以 当 $a=1$ 且 $b=-1$ 时，原方程组的解是 $\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

例 6 解方程组：$\begin{cases}|x|+|y|=5,\\xy=-6.\end{cases}$

分析 由 $xy=-6$ 可知 $|x||y|=6$。先解以 $|x|$，$|y|$ 为“元”的方程组，再回到 x，y。因为 $xy=-6<0$，所以 x,y 应异号。

解 原方程组化为 $\begin{cases}|x|+|y|=5,\\|x|\cdot|y|=6.\end{cases}$

所以 $|x|$，$|y|$ 是方程 $t^2-5t+6=0$ 的两实根。

解得 $t_1=2$，$t_2=3$。

所以 $$\begin{cases}|x|=2,\\|y|=3;\end{cases}\qquad\begin{cases}|x|=3,\\|y|=2.\end{cases}$$

又　　$xy=-6<0$，　所以 x 与 y 应为异号，

故原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=-3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=3;\end{cases}$

$\begin{cases}x_3=3,\\y_3=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-3,\\y_4=2.\end{cases}$

例 7　设 α 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的一个根，β 是方程 $8y^2+15y-2=0$ 的一个根，求：$\log_\alpha\beta$ 的值。

解　方程 $x^2-3x+2=0$ 的两个根为 $1,2$，

方程 $8y^2+15y-2=0$ 的两个根为 $\frac{1}{8},-2$，

由 $\log_\alpha\beta$ 可知 $\alpha>0$ 且 $\alpha\neq1$，$\beta>0$，

所以　　$\alpha=2$，$\beta=\frac{1}{8}$，故 $\log_\alpha\beta=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}=-3$。

例 8　当 a 为何值时，方程 $\frac{x}{x-2}+\frac{x-2}{x}+\frac{2x+a}{x(x-2)}=0$ 只有一个实数解。

解　将原方程去分母，两边同乘 $x(x-2)$ 得：

$$2x^2-2x+(a+4)=0 \tag{1}$$

(1) 当 $\Delta=4-8(a+4)=0$，就是 $a=-\frac{7}{2}$ 时，得 $x=\frac{1}{2}$ 是原方程的解。

(2) 当 $\Delta=4-8(a+4)>0$，就是 $a<-\frac{7}{2}$ 时，方程(1)有两个不同的实数解。若其中有一个为 2 或 0，则对原方程而言为增根，需舍去，这时，原方程也只有一个实数解。所以将 $x=2$ 代入方程(1)得 $a=-8$，此时，方程(1)有根 $x=2$ 和 $x=-1$。

将 $x=0$ 代入方程 (1) 得 $a=-4$，此时，方程 (1) 有根 $x=0$ 和 $x=1$。

(3) 当 $\Delta=4-8(a+4)<0$，就是 $a>-\frac{7}{2}$ 时，方程 (1) 无实数解，所以，原方程也无实数解。

故当 $a=-\frac{7}{2}$，-8、-4 时，原方程只有一个实数解，它们分别是 $x=\frac{1}{2}$，-1，1。

例 9 若 $a\in R$，α，β 是方程 $x^2+2x+a=0$ 的实根，求：$|\alpha|+|\beta|$ 的值。

解 因为 α,β 是方程 $x^2+2x+a=0$ 的实根，

所以由 $\Delta=4-4a\geqslant 0$ 推得 $a\leqslant 1$，

由韦达定理可知 $\begin{cases}\alpha+\beta=-2,\\ \alpha\beta=a.\end{cases}$

这时，$(|\alpha|+|\beta|)^2=\alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|$

$$=4+2|a|-2a=\begin{cases}4, & \text{若 } 0\leqslant a\leqslant 1 \text{ 时},\\ 4-4a, & \text{若 } a<0 \text{ 时},\end{cases}$$

故 当 $a\in[0,1]$ 时，$|\alpha|+|\beta|$ 的值为 2；当 $a\in(-\infty,0)$ 时，$|\alpha|+|\beta|$ 的值为 $2\sqrt{1-a}$。

例10 已知方程 $x^2+px+1=0$ 的两根为 α，β，方程 $x^2+qx+1=0$ 的两根为 γ,δ，证明：$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-\gamma^2$。

证明 由韦达定理可知：

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-p,\\ \alpha\beta=1;\end{cases}\qquad \begin{cases}\gamma+\delta=-q,\\ \gamma\delta=1.\end{cases}$$

因为 左边 $=[(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)][(\alpha+\beta)(\beta+\delta)]$

$$=[\alpha\beta-(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2][\alpha\beta+(\alpha+\beta)\delta+\delta^2]$$

$$=(1+p\gamma+\gamma^2)(1-p\delta+\delta^2),\tag{2}$$

又 γ，δ 是方程 $x^2+qx+1=0$ 的根，

所以 $\gamma^2+q\gamma+1=0$ 就是 $\gamma^2+1=-q\gamma$， (3)

$\delta^2+q\delta+1=0$ 就是 $\delta^2+1=-\delta q$。 (4)

将(3)，(4)两式代入(2)式，有 左边 $=(p\gamma-q\gamma)(-p\delta-q\delta)$

$$=-\gamma\delta(p-q)(p+q)=(p+q)(q-p)=q^2-p^2.$$

证毕。

例11 如果方程 $(m-8)x^2=2(m-4)x+m+2$ 没有实数根，同时

方程$(m+2)x^2+2(m-4)x=m-4$有实数根，求 m 的值。

分析 题设方程为 $(m-8)x^2-2(m-4)x-(m+2)=0$，其中 $(m-8)$应分下列两种情况考虑：(1)若 $m=8$ 时，则方程为一次方程 $-8x-10=0$；(2)若 $m\neq8$ 时，则方程为二次方程。

解 显然，$m=8$ 和 $m=-2$ 不合题意。

由已知，方程$(m-8)x^2-2(m-4)x-(m+2)=0$没有实数根，所以

$$\Delta_1=4(m-4)^2+4(m-8)(m+2)<0, \tag{5}$$

由已知，方程$(m+2)x^2+2(m-4)x-(m-4)=0$有实数根，所以

$$\Delta_2=4(m-4)^2+4(m+2)(m-4)\geqslant0, \tag{6}$$

由(5)，(6)两式整理得

$$\begin{cases} m^2-7m<0, \\ (m-4)(2m-2)\geqslant0. \end{cases}$$

就是

$$\begin{cases} m(m-7)<0, \\ (m-4)(m-1)\geqslant0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} 0<m<7, \\ m\geqslant4 \text{ 或 } m\leqslant1; \end{cases} \quad \text{即得} \quad \begin{matrix} 4\leqslant m<7, \\ \text{或 } 0<m\leqslant1; \end{matrix}$$

故当 $m\in[4,7)\cup(0,1]$时，方程$(m-8)x^2=2(m-4)x+(m+2)$没有实数根，同时方程$(m+2)x^2+2(m-4)x=m-4$有实数根。

例12 在实数集内，解方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=13, & (7) \\ x^2+y^2+z^2=65, & (8) \\ yz=10. & (9) \end{cases}$$

解 由(7)(9)两式有

$$\begin{cases} y+z=13-x, & (10) \\ yz=10. & (11) \end{cases}$$

将(10)式平方后减去(11)式的 2 倍得