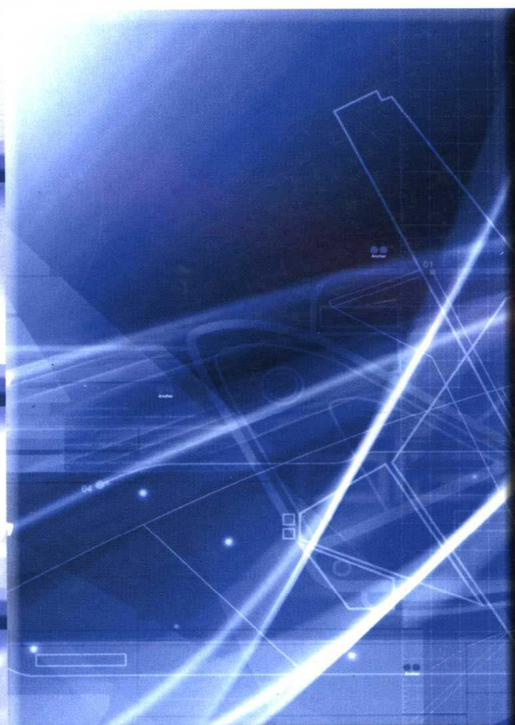
经典教材辅导用书

经济数学——线性代数题解

人大社·《线性代数·第三版》（赵树媛 主编）

杨明 编



华中科技大学出版社

经典教材辅导用书

经济数学——

线性代数题解

人大社·《线性代数·第三版》(赵树嫄主编)

杨明 编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学——线性代数题解/杨明　编
武汉:华中科技大学出版社,2004年10月
ISBN 7-5609-3257-6

Ⅰ.经…
Ⅱ.杨…
Ⅲ.线性代数-题解
Ⅳ.O151.2

经济数学——线性代数题解　　　　杨明　编

策划编辑:周芬娜　　封面设计:潘　群
责任编辑:吴锐涛　　责任监印:张正林
责任校对:朱　霞

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　　排:华大图文工作室
印　　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168　1/32　　印张:6.25　　字数:148 000
版次:2004年10月第1版　　印次:2004年10月第1次印刷　　定价:9.80元
ISBN 7-5609-3257-6/O・334

内 容 提 要

本书是人大版赵树嫄主编教材《线性代数》(第三版)的自学辅导书。全书由两大部分构成,第一部分是习题解析,第二部分是自测试题及其解答,依教材章节内容分别给出。

习题解析部分给出了教材中全部习题的详细解答,解答方式在与教材方法基本一致的基础上,适当加深处理技巧,便于读者学习和从中得到提高。对线性代数学习中应该深入理解和辨析的基本概念、解题方法、经验与技巧,学习和解题中易出错和混淆的问题,分别以要点的形式给予归纳总结,列于相应的题目解析后,便于读者结合问题学习掌握,力求避免概念、公式的罗列和空泛。

自测试题部分的设计是为了让读者检测自己对各章节内容学习的综合掌握程度。题后配有详细解答,方便读者使用。

本书适用于经济管理类专业的在校大学生,参加经济管理类硕士研究生入学考试的考生,MBA 学生以及人大版线性代数教材的学习、使用者。

前　言

线性代数作为描述、处理有限维空间中多元线性系统最重要的数学工具,已经广泛应用在经济、管理的理论分析方法,数据处理和数量模型分析中。随着我国经济、管理理论研究科学化水平的提高,数学已经成为经济、管理理论学习和研究者必备的工具,数学中的线性代数课程已经成为经济管理类大学生的必修课,经济管理类硕士研究生、MBA入学考试的考试科目。本书是在学习线性代数需要的背景下,为人大版赵树嫄主编教材《线性代数》(第三版)配套而编写的自学辅导书。

全书由两大部分构成,第一部分是习题解析,第二部分是自测试题及其解答,依教材章节内容分别给出。

考虑到经济管理类学生与理工类学生的不同特点,本书的习题解析部分给出了教材中全部习题的详细解答。解答方式在与教材方法基本一致的基础上,适当加深处理技巧,便于读者学习和从中得到提高。对线性代数学习中应该深入理解和辨析的基本概念、解题方法、经验与技巧,学习和解题中易出错和混淆的问题,分别以要点的形式给予归纳总结,列于相应的题目解析后,便于读者结合问题学习掌握,提高学习效率,力求避免概念、方法、公式的罗列和空泛。

本书的自测试题部分的设计是为了让读者检测自己对各章节内容学习的综合掌握程度。题后配有详细解答,方便读者使用。

本书的解答和要点叙述力求概念应用准确,方法简洁有效,结合编者多年的经验积累,力求反应线性代数理论、问题和方法的特点。本书是人大版教材的配套学习书,在符号、概念和内容叙述编排上均采用了原教材的体系,便于读者学习和使用。解题是学习数

学的重要步骤，独立思考对解题者理解线性代数的理论和方法，及时纠正对概念的误解和方法的不当使用，真正理解、掌握所学习的理论和方法，提高自身的数学素质修养有不可替代的重要性！线性代数的许多题目都可以有多种解题方法，本书限于篇幅，没有也不可能穷尽所有的方法，这给读者留下了很大的思考余地。读者如能结合自己的独立思考来使用本书，将会有更大的收益。

限于编者水平，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正。

编者

2004 年 7 月

目　　录

第一章　行　列　式

习题解析

(A)

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$　　(6) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$

要点1-1

二阶行列式一般直接用定义计算，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

当行列式中含x的多项式时，其计算结果是一个x的多项式.

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\times4-3\times1=1$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times2-(-1)\times1=5$

(3) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 6\times 12 - 9\times 8 = 0$

(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab^2 - ba^2 = ab(b-a)$

(5) $$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+x+1) - x^2$$
$$= x^3 - x^2 - 1$$

(6) $$\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1$$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_a b \cdot \log_b a = 0$

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$　　　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$　　　　(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$

解　(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \times(-1)$$

$$= 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 6(2+1) = 18$$

(2) $$\begin{vmatrix}1&1&1\\3&1&4\\8&9&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&-2&1\\8&1&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&1\\1&-3\end{vmatrix}=6-1=5$$

$\times(-1)$

(3) $$\begin{vmatrix}1&0&-1\\3&5&0\\0&4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&5&3\\0&4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&3\\4&1\end{vmatrix}=5-12=-7$$

(4) $$\begin{vmatrix}0&a&0\\b&0&c\\0&d&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一行展开}}a(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}b&c\\0&0\end{vmatrix}=0$$

要点1-2

尽管三阶行列式可以用定义、借助于画线方法(见教材图1-2)计算，但适用的计算方法是用行列式的性质把它们化为三角形行列式计算，或者在一行(列)中等于零的元素较多时，选择该行(列)展开后降阶计算. 应注意观察行列式的结构，选择适当的计算方法.

3. 证明下列等式：

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2&c_2\\a_3&c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}$$

证　观察等式右边，将行列式按第一行展开则有

$$\text{左边}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

$$=a_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}+b_1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_2&c_2\\a_3&c_3\end{vmatrix}$$

$$+c_1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=\text{右边}$$

得证.

4. $k=?$ 时 $\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}=0$

解 $D=\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第三行展开}}k(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} k & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} k & 3 \\ -1 & k \end{vmatrix}$$

$$=-4k+k^2+3=k^2-4k+3=(k-1)(k-3)$$

因此 $\quad D=0\Longleftrightarrow(k-1)(k-3)=0$

所以 $k=1$ 或者 $k=3$ 时, $D=0$.

5. 当 x 取何值时 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq 0$

解 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第三行展开}}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{vmatrix}+x(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix}$$

$$=-x^2+x(3x-4)=2x^2-4x=2x(x-2)$$

故当 $x\neq 0$ 而且 $x\neq 2$ 时, $D\neq 0$. 亦即 x 取 0 和 2 以外的任意实数, $D\neq 0$.

6. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么?

解 $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} \overset{\times(-1)}{=} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & a & 0 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第三列展开}} (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{vmatrix}$$

$$=-(a^2-4)=-(a-2)(a+2)$$

故$D>0$的充要条件为$(a-2)(a+2)<0$,即$|a|<2$.

要点1-3

当行列式中含a,k,t之类的参数,讨论参数取值,使行列式大于0、等于0或不等于0之类的问题时,首先要计算行列式值,得到一个多项式,再由多项式按题目要求,得到相应参数的取值范围.

7. 求下列排列的逆序数:

(1) 4 1 2 5 3　(2) 3 7 1 2 4 5 6　(3) 3 6 7 1 5 2 8 4

(4) $n\ (n-1)\cdots\ 2\ 1$

要点1-4

求逆序数的方法有多种,常用的是从后向前,对每一个数计算它前面比它大的数的个数,将这些个数求和即得逆序数.

解 (1) $N(4\ 1\ 2\ 5\ 3)=2+0+1+1=4$

即3之前比其大的数有2个,5之前有0个,2之前有1个,1之前有1个,4之前有0个,共计4个.

(2) $N(3\ 7\ 1\ 2\ 4\ 5\ 6)=1+1+1+2+2+0=7$

(3) $N(3\ 6\ 7\ 1\ 5\ 2\ 8\ 4)=4+0+4+2+3+0+0=13$

(4) $N(n\ (n-1)\cdots 2\ 1)=(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+1$

$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

8. 在6阶行列式$|a_{ij}|$中,下列各元素乘积应取什么符号?

(1) $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$ (2) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$

(3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ (4) $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$

(5) $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$

解 行列式中元素乘积项前的符号.由该项行(列)下标按顺序排列时,其列(行)下标所给出的排列的逆序数的奇偶性确定,偶排列取正号,奇排列取负号.

(1) 因为$N(5\ 3\ 2\ 4\ 1\ 6)=8$,故项$a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$前取正号.

(2) 因为$N(1\ 6\ 2\ 4\ 3\ 5)=5$,故项$a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$前取负号.

(3) 因为$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}=a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$又$N(6\ 1\ 4\ 2\ 3\ 5)=7$,所以该项前取负号.

(4) 因为项$a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$的列下标是顺序排列,又$N(5\ 3\ 1\ 4\ 6\ 2)=8$,即行下标是偶排列,故该项前为正号.

(5) 同(4)题,由于$N(6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)=\dfrac{5\times6}{2}=15$,故该项前为负号.

要点1-5

(1) 确定行列式中一个乘积项前的符号,可以利用乘法的交换律,将该项行(列)下标调整成顺序排列时,由列(行)下标给出排列的逆序数来定.

(2) 应该注意到行列式中一个乘积项最终的符号是由其前面的符号和元素符号共同决定的,因此一项前面是正号并不意味着该乘积项一定是正数.

9. 选择k,l使$a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$成为5阶行列式$|a_{ij}|$中带有负号的项.

解 由该项的列下标的排列$(3\ k\ 4\ 2\ l)$,$k,l\in\{1,5\}$,可相应于两个排列:$(3\ 1\ 4\ 2\ 5)$和$(3\ 5\ 4\ 2\ 1)$.它们互为对换关系,因$N(3\ 1\ 4\ 2\ 5)=3$,所以应选择$k=1,l=5$,可使该项带负号.

10. 设n阶行列式中有n^2-n个以上元素为零,证明该行列式为零.

证　n 阶行列式共有 n^2 个元素，由题意，当为零的元素多于 n^2-n 个时，不为零的元素则少于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个. 从而该行列式每一项 n 个元素的乘积中至少有一个元素为零，且每一项乘积的值均为零，故行列式的值为零.

要点 1-6

n 阶行列式 $D_n=0$ 有很多充分条件，它们通常是：

(1) D_n 中一行(列)元素全为 0，则 $D_n=0$.

(2) D_n 中两行(列)元素成比例，则 $D_n=0$.

(3) D_n 中为零的元素多于 n^2-n 个，则 $D_n=0$.

应注意这些条件均不是 $D_n=0$ 的必要条件.

11. 用行列式定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

要点1-7

这些行列式的共同特点是其中等于零的元素比较多.用定义计算这样的行列式的方法是,只考虑其中的非零项

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

在非零的元素中依照n个元素取自于不同行、不同列的原则选取.

解　(1) D_n 中非零项仅一项,即$a_{1n}a_{2\,n-1}a_{3\,n-2}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1}$.

因为
$$N(n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1)=\frac{n(n-1)}{2}$$
所以,由定义及$a_{1n}=1,a_{2\,n-1}=2,\cdots,a_{n1}=n$,有
$$D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$$

(2) D_n 中非零项为$a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1\,n}a_{n1}$.

因为$N(2\ 3\ \cdots\ n\ 1)=n-1$ 且$a_{12}=1,a_{23}=2,\cdots,a_{n1}=n$,所以
$$D_n=(-1)^{n-1}n!$$

注:本题若用行列式性质,按第一列展开计算,则有

$$D_n=n(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}n!$$

注意到数$(n-1)$与$(n+1)$的奇偶性一样,即$(-1)^{n-1}=(-1)^{n+1}$,因此用两种方法计算结果是一样的.

(3) 由该行列式的特点可知,一般项$a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}a_{5i_5}$中,非零项要具有特点$i_3\neq 3,4,5;i_4\neq 3,4,5;i_5\neq 3,4,5$.因此$i_3,i_4,i_5$只能在$\{1,2\}$中取值.

由行列式的项的元素不能在同一列的特点可知，$a_{3t_3}, a_{4t_4}, a_{5t_5}$中必有一个元素为0. 因此

$$D_5=0$$

（4）非零项为$a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$，$N(3\ 2\ 4\ 1)=4$，故

$$D=a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}=1$$

（5）D 中非零项只有$a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$和$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$. 又

$$N(1\ 2\ 4\ 3)=1, N(1\ 4\ 2\ 3)=2$$

所以，代入元素a_{ij}的值，有

$$D=-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}=-1+1=0$$

12. 用行列式的性质计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 34215 & 35215 \\ 28092 & 29092 \end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

（5）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$　　（6）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

（7）$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

解　（1）$\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}\begin{matrix} \times(-1) \\ \end{matrix}=ab\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & b-a \end{vmatrix}=ab(b-a)$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ （两行成比例）

(3) $\begin{vmatrix} 34215 & 35215 \\ 28092 & 29092 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34215 & 34215+1000 \\ 28092 & 28092+1000 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 34215 & 34215 \\ 28092 & 28092 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 34215 & 1000 \\ 28092 & 1000 \end{vmatrix}$

$= 0 + 1000(34215 - 28092)$

$= 6123000$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^3 = 8$

(5) 第 i 行乘以(-1)加上第 $i+1$ 行$(i=3,2,1)$得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \times(-1)$