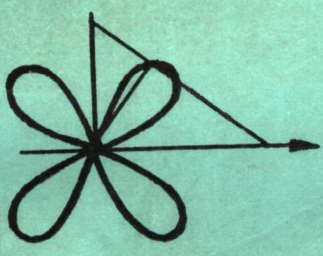
·高中学生数学读物·

轨迹方程求法

赵农民



福建教育出版社

轨迹方程求法

赵 农 民

福 建 教 育 出 版 社

内 容 提 要

本书系高中学生课外数学读物。

本书比较全面地介绍了各种轨迹的普通方程、参数方程、极坐标方程的求法，同时也讨论轨迹的图形。对所配的习题都附有答案和提示。

由于求动点的轨迹方程，是平面解析几何的重要课题，也是学习上的难点，所以本书特别注意对轨迹问题进行归纳和分类，并总结解题的思路和要领。

轨 迹 方 程 求 法
赵 农 民

出版：福 建 教 育 出 版 社
发行：福 建 省 新 华 书 店
印刷：福 建 新 华 印 刷 厂
开本787×1092 1/32 4.375印张 100千字
1982年2月第一版 1982年2月第一次印刷
印数：1—11,600

书号：7159·659 定价：0.36元

引　言

轨迹问题是个几何问题。

在平面几何中，我们已经学习过有关的轨迹问题。但在解题方法上，主要是依据一些基本的轨迹命题，逐步进行分析，然后推出结论。如果问题比较复杂些，解题确是够麻烦的。所以一般初学者在学习平面解析几何时，一遇到轨迹题，往往望而生畏。

其实，解析几何是通过建立坐标系来研究几何问题的。也就是说，它在解题的方法上，运用了坐标法，先求出轨迹的方程，然后再通过方程来研究曲线的性质和图形。这在研究问题的方法上，是一个很大的突破。因此，有些在平面几何中感到比较难以解决的轨迹问题，用坐标法来解，就容易得多。而且，在平面几何中只研究直线形和圆，而在平面解析几何中，除了直线形和圆外，还有圆锥曲线和其它多种曲线，所以从研究的范围上来说，同样也是一个很大的突破。

一般的解析几何教材中，对于轨迹问题，都是安排在各个章节中，也就是从横的方向，随着学习内容的深入，逐步提出问题，又逐步研究解决问题的方法，而对轨迹问题未作系统的专题讲解。所以，这里想把有关的求动点的轨迹问题，从解题方法上着手，作一些整理、归纳和分类，提供一些解题的思路和要领。

轨迹问题是平面解析几何的重要的学习内容。我们知道，大到人造卫星和行星的运行轨道，小到齿轮的齿廓线，都与解析几何中讨论的轨迹问题有关。它不但在科学技术上的应用非常广泛，而且也是进一步学习高等数学的基础。

作为课外读物，这里对平面解析几何中的有关基础知识，就不再作介绍了。此外，学习数学，首先要求能理解，但即使理解了，只看而不练，还是达不到应有的效果。所以本书各章节配备了一些习题，作练习之用，并在书后附有答案，以供参考。

由于解析几何是用代数方法来研究几何图形的，所以关键还是先要弄清曲线和方程的关系。下面就从这方面先作一些简单的回顾，然后再介绍动点的轨迹方程的各种求法。

目　录

引言……………………………………………………（1）
一　曲线和方程的关系……………………………………（1）
二　轨迹方程的直接求法…………………………………（9）
（一）动点与距离有关……………………………………（9）
（二）动点与角度有关……………………………………（22）
（三）动点与面积有关……………………………………（29）
（四）动点与斜率有关……………………………………（34）
（五）动圆的圆心轨迹……………………………………（39）
习题一………………………………………………………（48）
三　轨迹方程的间接求法…………………………………（51）
§1　代入法…………………………………………………（56）
（一）定比分点的轨迹……………………………………（58）
（二）两动直线的交点的轨迹……………………………（63）
习题二………………………………………………………（69）
§2　参数法…………………………………………………（71）
（一）时间为参数…………………………………………（71）
（二）截距为参数…………………………………………（73）
（三）斜率为参数…………………………………………（79）
（四）角度为参数…………………………………………（84）
（五）其他…………………………………………………（88）

（六）圆锥曲线系的有关轨迹……………………………（98）
习题三…………………………………………………（100）
四　轨迹的极坐标方程……………………………………（103）
（一）直接求法……………………………………………（104）
（二）间接求法……………………………………………（111）
习题四…………………………………………………（115）
复习题……………………………………………………（117）
习题的答案和提示………………………………………（120）

一　曲线和方程的关系

解析几何研究的对象是几何图形。它的特点是形数结合，用代数的方法来研究几何问题，即通过坐标系，建立曲线的方程，然后再由方程来讨论曲线的性质。一般把这种方法叫做坐标法。常用的坐标法有直角坐标法和极坐标法两种。

至于如何建立曲线的方程，则首先要弄清曲线和方程之间的关系，也就是形和数之间的内在联系。

我们知道，数轴上的点和实数之间有一一对应的关系。即数轴上的任意一点，可以用唯一的一个实数来表示；任何一个实数，在数轴上能确定唯一的点。因此，我们把数轴也叫做直线坐标系。其实，这就是一种形和数之间的内在联系和相互转化，不过只是局限于直线上的点和实数之间的关系而已。

如果我们把具有公共原点的两条互相垂直的数轴作为坐标系，那末，在这个直角坐标系中，平面上的点和一对有序实数 (x, y) 之间，也具有一一对应的关系。即平面内任意一点P，可以用唯一的一对有序实数 (x, y) 来表示；任何一对有序实数 (x, y)，在平面内能确定唯一的点。这样，就把直线上的点和实数之间的关系，发展到平面内的点和实数对之间的关系了。

曲线可以看作是动点按照某种规律运动的轨迹（图1—1）。这样，如果设曲线上动点P的坐标是（x,y），则P点在运动，它的坐标x和y也随着相应地在变化，因此，x和y就成了一对变量。但由于P点是按照某种规律在运动，因而x和y这两个变量，也随着它的运动规律相互依赖，相互制约。也就是说，它们之间应该满足一定的关系。这种关系用代数方法表示出来，就可以得到包含有x、y两个变量的一个两元方程。这样，就建立起了曲线和方程之间的对应关系。

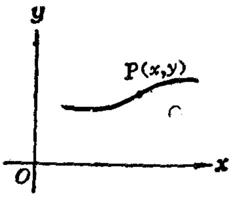


图 1—1

在曲线和方程之间建立了这样的关系以后，研究曲线的几何问题，也就可以转化成研究方程的代数问题了。

例如对于圆，我们可以把它看作是：到一个定点的距离等于定长的点的轨迹。这个定点就是圆心，定长即为半径。

如果我们要求出半径为r的圆的方程，则可以如图1-2所示，以圆心O为原点建立直角坐标系。又设圆上的任意一点即动点P的坐标为（x，y）。这样，当P点在运动时，它的坐标x和y就成了一对变量；而P点在运动过程中，总是遵循着它到原点O的距离等于半径r这样一个规律，因此有

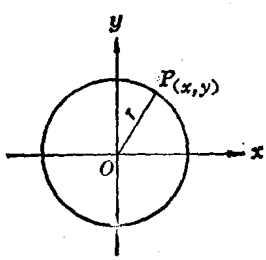


图 1—2

$$|PO| = r.$$

而P、O两点间的距离，由两点间的距离公式，可以表示为

$$|PO|=\sqrt{x^2+y^2},$$

于是

$$\sqrt{x^2+y^2}=r。\tag{1}$$

再两边平方，得

$$x^2+y^2=r^2。\tag{2}$$

这就是所求的圆的方程。

现在再来分析图1—2的圆O和方程(2)之间的关系：

(i) 圆O上任意一点的坐标，必然适合于方程(1)，所以也就适合于方程(2)；

(ii) 适合于方程(2)的x和y，也适合于方程(1)。这就是说，以这样的x、y为坐标的点，和原点O的距离必然等于r，也就是在以O为圆心、r为半径的圆上。

因此，我们把方程(2)叫做圆O的方程。

通过这个例子，我们可以进一步来明确曲线和方程的概念。

如果我们根据曲线上的点所要适合的条件，列出点的坐标x和y之间的一个方程，并且这个方程和曲线之间有下面的关系：

(i) 曲线上所有的点的坐标都适合于这个方程；

(ii) 坐标适合于这个方程的所有的点，都在曲线上。

那末，这个方程就叫做这条曲线的方程，而这条曲线也就叫做这个方程的曲线。

比如我们说：曲线C的方程是$F(x,y)=0$，它包含着两个方面的意义：

（i） 只要是曲线C上的点，它的坐标都要适合方程$F(x,y)=0$，无一例外。这说明这条曲线具有纯粹性，即不适合方程$F(x,y)=0$的点，不在曲线C上。

（ii） 凡是适合方程$F(x,y)=0$的（x,y）所对应的点，都要在曲线C上，一个也不漏。这说明这条曲线具有完备性，即不在曲线C上的点的坐标，都不适合方程$F(x,y)=0$。

例如图1-3所示的半圆，如果以半圆上任意一点$P(x,y)$满足$|PO|=r$所得到的$x^2+y^2=r^2$来作为这个半圆的方程，那末就出现了“杂”的现象，即曲线不具有纯粹性。因为虽然半圆上所有的点的坐标都适合方程$x^2+y^2=r^2$，但反过来，适合方程$x^2+y^2=r^2$的（x,y）所对应的点，却并不都在半圆上，例如$x<0$时。如果对方程附加一个条件$x\geqslant0$，即

$$x^2+y^2=r^2\ (x\geqslant0),$$

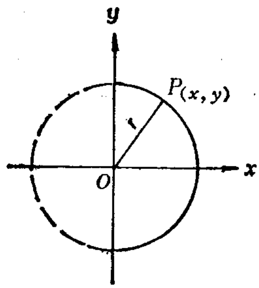


图 1—3

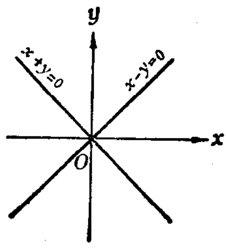


图 1—4

则这个方程就可以说是这个半圆的方程了。

又如图1—4所示，如果把方程$x-y=0$作为到两坐标轴距离相等的点的轨迹的方程，则出现了“漏”的现象，即曲

线不具有完备性，所以同样不符合曲线和方程的关系。因为动点在第Ⅰ、Ⅳ象限时，满足条件的点在由方程$x+y=0$所表示的第Ⅰ、Ⅳ象限角的平分线上。因而满足上述条件的点的轨迹方程，应是

$$|x|=|y|,$$

或者

$$x^2-y^2=0。$$

这样，曲线和方程就互相对应了。

这里，把直线也称作为曲线，这是由于我们把曲线看作是动点按照某种规律运动的轨迹，在这个意义下，曲线也就包括直线在内了。

由曲线求它的方程的步骤，一般是：

1. 建立适当的坐标系；
2. 设曲线上动点的坐标为（x,y）（或(ρ,θ)）；
3. 根据曲线上的点所要适合的条件，写出等式；
4. 用坐标x、y（或ρ、θ）表示这个等式；
5. 进行必要的化简，得出方程；
6. 证明所得的方程就是曲线的方程。

关于建立适当的坐标系，这是由曲线求它的方程的过程中很重要的一个步骤。它包含两层意思，一是选择坐标系，二是把坐标系建立在适当的位置上。

坐标系的选择，可根据曲线的特点来决定。常用的坐标系有直角坐标系和极坐标系。选择的目的是使得出的方程具有较为简单的形式，便于我们由方程去研究曲线的几何性质以及应用。

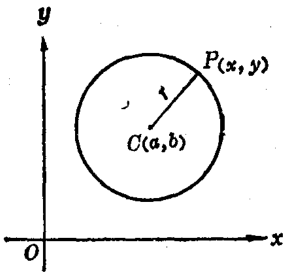


图 1—5

坐标系选定以后，还有一个把坐标系建立在适当的位置上的问题。比如上面求圆O的方程，我们是选用直角坐标系，并且将它建立在以圆心作为原点的位置上，从而得到了半径为r的圆的方程是$x^2+y^2=r^2$。假如我们把坐标系的位置改变一下，如图1—5那样，坐标系的原点不经过圆心，并设圆心C的坐标为(a,b)，则半径为r的圆的方程将如下求得：

设圆上任意一点即动点P的坐标为(x,y)，则

$$|PC|=r.$$

而
$$|PC|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

于是

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r.$$

两边平方，得所求的圆C的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

从这个例子可以看到，虽然是同一条曲线，但由于坐标系位置选取的不同，所得到的方程形式也就不同。因此，一般说来，在求动点的轨迹时，应该注意选取适当的坐标系的位置。象圆锥曲线中的一些曲线的标准方程，在选取坐标系的位置时，都是利用了它们的图形的对称性，从而得出了较为简单且便于应用的方程形式。

建立了适当的坐标系后，如果是直角坐标系，再设曲线上任意一点即动点的坐标为(x,y)，接下来就是要写出一

个等式，这也是由曲线求方程的过程中很关键的一步。等式如何找？只要根据动点所遵循的规律，即可写出。象上面求圆的方程的过程中，$|PO|=r$或者$|PC|=r$，就是根据动点运动过程中，它到定点（圆心）的距离总是等于r（半径）这个规律写出的。

所谓用动点的坐标x、y来表示这个等式，就是把这个等式，转化成含有x、y这两个变量的解析式。在这个过程中，需要应用到有关代数、三角和平面几何等方面的一些知识，特别是经常要用到平面解析几何中的一些基本公式，因此对于这些公式，必须熟练地掌握。

证明所得的方程就是曲线的方程这一步骤，一般可以省略。特别是，如果化简的过程都是同解变形的过程，那么所得的方程就是曲线的方程，在这种情况下，可以不必再加以证明。

以上我们通过圆的方程的求得，简单地回顾了曲线和方程的关系，以及由曲线或动点轨迹求方程的一般步骤。由此可以看到，在建立了坐标系的条件下，平面上的点和有序实数对之间就可以相互转化。而以运动的观点，把曲线看作是动点按照一定规律运动的轨迹，从而又使曲线和方程之间可以相互转化，于是把作为几何研究对象的曲线和作为代数研究对象的方程，两者沟通了起来。

因此，坐标系是形数之间结合的桥梁。而引进了坐标系，使一些不能或不易解的几何问题，变得可以解或容易解了。

由于平面上的曲线可以用含有x、y的方程来表示，反

过来，含有 x、y 的方程可以用平面上的曲线来表示。所以在明确了曲线和方程的关系后，关于曲线和方程就有两个基本问题要讨论，即

（1）已知曲线，求它的方程；

（2）已知方程，画出它的曲线。

后者，一般可用基本的方法即描点法来解决。至于前者，已知曲线求它的方程，实质上也就是求动点的轨迹的方程，这是平面解析几何中一个很重要的内容。而动点的轨迹方程的求法，一般可分为直接求法和间接求法两种。下面将着重讨论怎样求动点的轨迹方程，同时，对方程所表示的图形，也作一些简要的讨论。

二　轨迹方程的直接求法

求动点的轨迹方程，关键的一步是：根据动点在运动过程中需要满足的条件，找出等量关系．然后，再使这个等量关系用动点坐标表达出来，这样就可得到所求的轨迹的方程。

所谓直接求法，就是指根据轨迹所给的条件，能够直接找到动点坐标之间的关系，从而得到所求的轨迹方程的一种方法。

当然，并不是所有的动点的轨迹都可以用直接法来求得它的方程，方法应由所给的条件来决定。

动点在运动时，一般又与距离、角度、面积、斜率等有关。

（一）动点与距离有关

例 1　一动点到两定点$A(3,\ 0)$、$B(0,\ -2)$的距离平方之差恒等于8。求这动点的轨迹。

分析：两定点已用坐标表示，因此不必再考虑建立坐标系的问题。

解　设动点为$P(x,\ y)$，则

$$PA^2=(x-3)^2+y^2,$$

$$PB^2=x^2+(y+2)^2.$$

依题意，有

$$|PA^2-PB^2|=8.$$

$\therefore\quad |(x-3)^2+y^2-x^2-(y+2)^2|=8,$

即 $\quad |6x+4y-5|=8.$

解得

$$6x+4y-5=\pm 8.$$

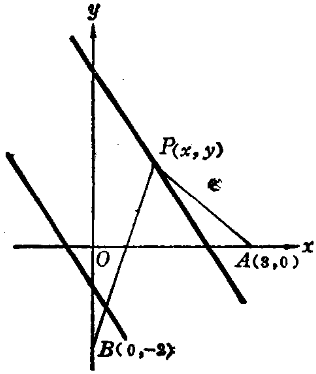


图 2—1

故所求的动点的轨迹方程是：

$$6x+4y-13=0,\ 6x+4y+3=0.$$

这是两条平行直线，斜率为 $k=-\dfrac{3}{2}$。而A、B两点连线的斜率 $k'=\dfrac{2}{3}$。

$\because\quad k\cdot k'=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=-1.$

因此，所求的轨迹是垂直于两定点A、B连线的两条平行直线，如图2—1所示。

本题根据动点运动时需要满足的条件，不难列出等式。但必须注意题意中的两距离的平方差这个条件，即既可以是$PA^2-PB^2=8$，也可以是$PB^2-PA^2=8$。因此，有等式

$$|PA^2-PB^2|=8.$$

如果只列出$PA^2-PB^2=8$或$PB^2-PA^2=8$，则得出的方程，必将使轨迹有遗漏。

例 2　设$\triangle ABC$的底边AB的长为a，CB边上的中线的