相似形

上海教育出版社

相　　似　　形

中国数学会上海分会
中学数学研究委员会编

上 海 教 育 出 版 社

目　　錄

學習相似形的目的及其基礎知識

過去我們在初中階段研究平面幾何直綫形與圓的時候，所接觸到的幾何圖形，都只研究這些量與量之間相等的關係或不等的關係。如證明兩個三角形的全等，或其對應邊角相等；又如利用同圓或等圓的條件，來得出等弦對等弧，等弧對等弦等等；這些圖形，不論三角形或圓，都是由物體中抽象出來的。但在客觀存在中，有許多大小不等、形狀相同的物體，譬如，鏡中的人物、照片、電影銀幕上的人物等等。我們在研究客觀存在中量與量的相等關係以後，自然要進入研究它們大小不等、形狀相同的關係。因此，我們有研究相似形的必要。

我們的祖先早就運用了相似形的理論，在發展生產方面做出了偉大的成就。如夏禹治水，使洪水由高山流入平川，就是運用了相似直角三角形的性質；與周公同時代的商高運用直角三角形勾三股四弦五的性質及相似直角三角形，測量太陽的高度。三國時，魏劉徽運用了相似三角形的性質研究了重差術，運用它測量海島的高度，即爲現在三角學的起源。南北朝祖冲之利用相似比的性質研究圓周率，求得圓周率在 3.1415926 與 3.1415927 之間。他對研究圓周率的精密度，在那個時候在世界上是首創。從這裏使我們更加體會學習平面幾何相似形，不僅要理解相似的幾何圖形的性質及運用這

些性質來解决作圖、計算、證明等問題，同時要掌握幾何圖形相似變換的規律，訓練自己能善於運用相似變換的理論，進行實地測量距離和高度、繪製地形圖、製作有關的工具等等的基本技能。這些不僅對今後學習立體幾何和其他科學知識打好基礎，而且，使自己掌握了這些技能以隨時爲建設祖國保衛祖國而忠誠的服務。在蘇聯反法西斯衛國戰爭的時候，許多青年丢下書包，走向保衛祖國自由獨立戰爭的最前綫，在艱苦的戰爭環境裏，他們有的靈活地運用了在課堂所學到平面幾何相似形的理論知識，發揮了無比的智慧，運用自己的身長、步伐等生理條件，或者運用最簡單的工具，如一根木頭或樹枝，進行測量距離或高度以偵察敵人，了解敵人和戰勝敵人。這就是理論聯系實際，使課堂所學的知識變爲一種活的知識的具體表現。這些都是值得我們學習的。

相似形一章是歐幾里德平面幾何重要組成部分之一，它是緊接着直綫形和圓的基礎上而提出的敎材，同時又爲今後研究正多邊形及面積兩章敎材創造條件。**而相似形一章的理論基礎主要又建築在平行綫公理，阿基米德公理和康脫兒公理的基礎上**，從阿基米德及康脫兒公理來研究綫段的量度，從綫段的可公度和不可公度導出兩綫段之比，再從平行公理及兩綫段之比導出相似形概念，再進入幾何圖形相似變換性質的研究。因此，不僅相似形一章與平面幾何各章互相啣接緊密聯系，就是相似形整個一章的敎材內容前後都具有科學的系統性，內在的關聯相互制約的。現行的中學几何課本中平面幾何就是具有這樣科學的系統性，使我們在學習時能獲得一個完

整的概念。以往教材對綫段的量度這個概念的研究很忽視，雖然也能研究相似形，只不過是零羅堆砌，爲機械的照顧歐幾里德幾何系統，而安排相似形的研究，以致對於相似變換這一個極重要的理論避而不談，或者接觸很少。因此帶給學生是一些含含糊糊的知識，更不會運用所學到的東西到實際中去。而現行的中學几何課本中平面幾何教材，徹底改變了這些不良傾向。我們這次編輯這本小册子，也就是完全根據部頒中學數學教學大綱修訂草案和現行中學几何教材的精神來編寫的。

現在我們先來研究平行公理，阿基米德公理及康脫兒公理的性質。**什麽叫做平行公理呢？歐幾里德幾何平行公理是："設 a 是任意一直線，A 是不屬於這直綫的一點，於是在 a 與 A 所決定的平面上至多只有一條通過 A 而不與 a 相交的直綫。"** 由於這個平行公理和它等價的公理，而導出有關相似形的定理。

1. 通過直綫外每個點，只能引一條直綫平行於已知直綫。

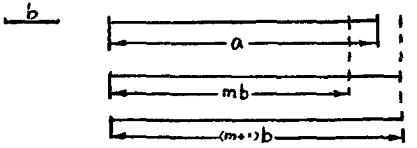
2. 兩條平行直綫與第三條直綫相交，則同位角相等。

3. 三角形內角的和，等於兩直角。

這些公理或定理在初中幾何已經詳細的研究過，這裏不再重複。

什麽叫做阿基米德公理呢？阿基米德公理是："設 AB 與 CD 是任意兩綫段，於是在直綫 AB 上，存在着無限個點 A_1, A_2, A_3, ……A_{n-1}, A_n，這樣的排列着，使點 A_1 在 A 與 A_2 之間，點 A_2 在 A_1 與 A_3 之間等等，且綫段 AA_1, A_1A_2, ……$A_{n-1}A_n$,

各與綫段CD疊合，而點D在A_{n-1}與A_n之間。”這也就是說：**“凡兩個綫段 a 和 b（圖1）無論較長綫段 a 如何長，較短的綫段 b 如何短，我們總可以在較長的綫段 a 上連續截取較短的綫段 b，截取到某一次以後，就可得出沒有剩餘或者得到比較短綫段更短的剩餘綫段。”** 如 a, b 为已知綫段，$a>b$，則可求出一個自然數m（圖1），使 $mb\leq a$或 $(m+1)b>a$。



（圖 1 ）

阿基米德是紀元前 287 — 212 年希臘的數學家，他总結人类生活实踐（量东西的長度）中的經驗，得出這條幾何綫段量度的公理，對當時自然科學和數學的推進起了一定的作用。

關於阿基米德公理我們再用下面的問題来說明：設綫段 AB 與綫段 CD, AB 與 CD 分别用一個正數 a, b 來表示。

1. 當綫段 AB 等於綫段 CD，即 $a=b$。

2. 若 P 是 AB 間的一個點，綫段 AP 與 PB 分别對應於一個正數 c 及 d，則 $AB=c+d$。

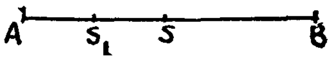
3. 設 AB 爲單位綫段，用 AB 去量度 CD，若 CD 恰好含有一倍的 AB，則 CD 稱爲含有一個單位綫段 (AB) 的長，或稱 $CD=1$。

4. 綫段 CD 大於綫段 AB，則 $b>a$。

5. 若綫段 CD 間含有一點 P，令 CP, PD 分别對應一個正數 c 及 d，而綫段 $CP=AB$，即 $c=a$。$CP+PD=CD$，

即 $b = c + d$，代入得 $b = a + d$，$\because a, b, d$ 均表示正數，$\therefore b > a$。

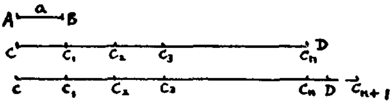
6. 若 AB 爲單位綫段，如將 AB 二等分，用 S 表示中點，則 $AS = SB = \frac{1}{2}AB$，同樣可將 AS (或 SB)分爲二等分，用 S_1 表示 AS 中點，則 $AS_1 = SS_1 = \frac{1}{2}AS = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2^2}AB$，則 AS 稱爲單位綫段 AB 的$\frac{1}{2}$，AS_1 稱爲單位綫段 AB 的 $\frac{1}{4}$(如圖 2)。如果我們再將 AS_1 二等分，設中點爲 S_2，則 AS_2 稱爲單位綫段 AB 的 $\frac{1}{2^3}$。



(圖 2)

照這樣不斷地截下去，我們可以求出 AS_n 爲單位綫段 AB 的 $\frac{1}{2^{n+1}}$。

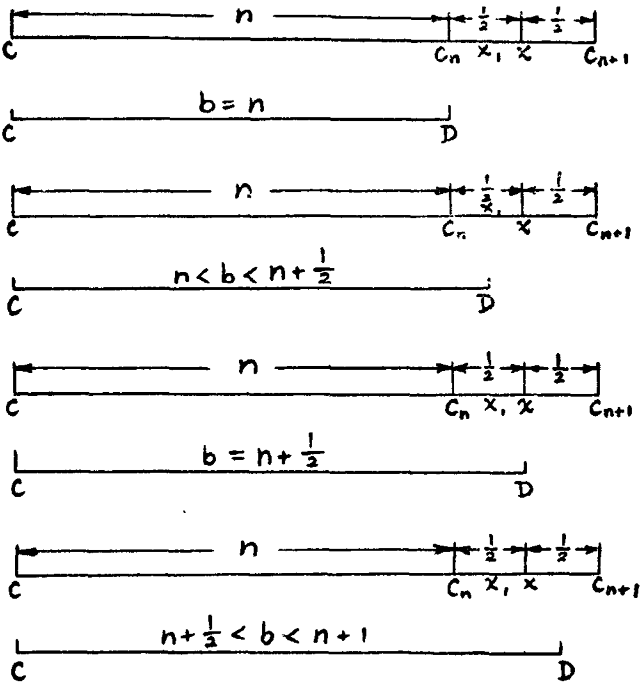
7. 若 $CD > AB$，以 AB 爲單位綫段在 CD 上從 C 點向 D 點方向依次截取綫段 CC_1, C_1C_2, C_2C_3……等(使 C_1 在 C 與 C_2 之間，C_2 在 C_1 與 C_3 之間 …… C_n 在 C_{n-1} 與 C_{n+1} 之間)，使均等於 AB 的長，如果有一點 C_n 與 D 點重合，則 $b = n$。如果沒有任何一點 C_1, C_2, C_3……C_n 與 D 重合則根據阿基米德公理，存在着兩個點 C_n 和 C_{n+1}，使 D 介乎 C_n 和 C_{n+1} 之間，這時 $n < b < n + 1$。$\because$ 綫段



(圖 3)

$CC_n < CD < CC_{n+1}$，∴ CC_n 及 CC_{n+1} 的長度就分別等於 n 和 $n+1$，這樣數目 b 可精確到單位數（如圖 3），b 可以準確到任意程度。**這種得到數目 b 的值的步驟，稱爲測量。**

如果用 X 將 $C_n C_{n+1}$ 分成二等分，使 $C_nX = XC_{n+1}$，則 D 點或在 C_nX 綫段之間，或在 $C_{n+1}X$ 綫段之間，或與 X 點重合，此情況即說明 CD 或者小於單位綫段 AB 的一半或者大於單位綫段 AB 的一半，或者等於單位綫段 AB 的一半，即 $n < b < n+\frac{1}{2}$，$n+\frac{1}{2} < b < n+1$，$b = n+\frac{1}{2}$。（如圖 4）



（圖 4）

若 $b = n + \frac{1}{2}$，則 b 的數目完全確定，也即測量的步驟終止。當 $n < b < n + \frac{1}{2}$ 及 $n + \frac{1}{2} < b < n + 1$ 的情況時，則 b 準確到單位綫段的 $\frac{1}{2}$，但還可以繼續測量下去，再將綫段 C_nX 或 $C_{n+1}X$ 二等分，即 $C_nX_1 = X_1X$，也就是取單位綫段 $\frac{1}{4}AB$ 去量 CD，這時或者 D 與 X_1 重合，則測量步驟終止，得出準確到單位綫段 AB 的 $\frac{1}{4}$ 的值。如果 D 與 X_1 又不重合，然後取單位綫段 $\frac{1}{8}$，繼續測量下去。像這樣測量步驟可一直進行下去，這樣將 b 表成二進小數的形式，即 $b = n.\ m_1m_2m_3$ ……，這裏 n 是表示整數部分，顯示 CD 綫段含多少單位綫段 AB。m_1 是第一位小數表示 1 或 0，是看 CD 含有 n 個單位綫段以外，是否還包含單位綫段的一半。m_2 也是 1 或者 0，看 CD 除 n 個單位綫段和 m_1 個單位綫段的一半外，是否尙包含單位綫段的 $\frac{1}{4}$。以下可依次類推。例如 $b = 3.011$，則 CD 含三個單位綫段 AB 及一個 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{8}$ 的單位綫段，這時 D 與 X_2 重合。

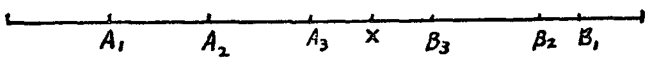
8. 若用單位綫段 AB 去量綫段 CD，總可以找到足够大的整數 n，使將單位綫段分成 2^n 相等部分以後，得到的綫段都小於它的單位綫段 AB（如圖 5）。$CD = CS + SD$，$CS = nAB$，$SD < AB$，則 $CD = nAB + SD < (n + 1)\ AB$。

（圖　5）

若 $CD \geq (n+1)AB$，則 $CD = nAB + SD$，$\because SD = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2^2} + \frac{m_3}{2^3} + \cdots\cdots\right) AB$。其 $\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2^2} + \frac{m_3}{2^3} + \cdots\cdots\right) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots\right)$，但 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots\right)$ 是一個無窮等比級數，公比 $\frac{1}{2}$ 小於 1，它的和的極限爲 1，可見 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots\right) < 1$，即 $\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2^2} + \frac{m_3}{2^3} + \cdots\cdots\right) < 1$，$\therefore SD < AB$，故 $CD \geq (n+1)AB$ 爲不可能。

9. 如果綫段 AB 小於綫段 CD，而 a, b 是測量這兩個綫段的數目，則 $a < b$。

從上面一系列的問題可以看出**阿基米德公理又可以說是：“一個任何綫段，可以用任何一個單位綫段去量，它的量數，總可以用一個正數來表示。”關於它的逆問題是：“設在任意綫段a上，給予綫段的無窮叙列 A_1B_1，A_2B_2……其中每個後面的都在前面的一個的內部，若不存在着這樣的綫段(如圖 6)它在**



（圖　6）

所有這些綫段的內部，那末在直綫 a 上就存在着一個而且只有一個點 X 落在所有綫段 A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3……等等的內部。”

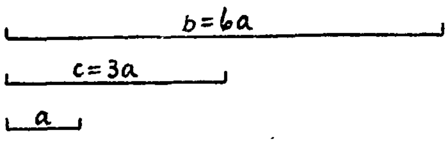
這也就是說：“凡一個正數，我們總可假設一個綫段和它對應。”這個逆問題，我們稱爲康脫兒公理。關於這個公理，在這裏不作詳細的說明，我們只要知道它是阿基米德公理的逆問題，了解阿基米德公理的性質和意義就可以了(康脫兒是德國數學家 1845—1918)。

關於度量的概念

從阿基米德公理的基礎上，我們來研究空間任意兩綫段度量的問題。

定義：“假如我們取一個定長綫段 a，分別去量任意兩綫段 b,c，如果 b,c 都正含有定長綫段 a 的正整倍數而沒有剩餘，則綫段 a 稱爲綫段 b,c 的公度。”

例如，$b=6a$，$c=3a$，則 a 爲 b,c 之公度。如果將 a 分成任意等分，則每一等分都是 b,c 的公度。如將 a 分成 n 等分，設 $b=6na'$，$c=3na'$，故 a' 亦必爲 b,c 之公度(如圖 7)。因此，當兩綫段，如有公度，則有無數個公度，這無數個公度中，不可能有最小的一個公度，因爲綫段 a 可作無數等分，但最小的等分的長度是無法知道的，而只有一個最大的公度。如當 $a=\frac{1}{3}S$，則 $b=6\cdot\frac{1}{3}S=2S$，$c=3\cdot\frac{1}{3}S=S$，則 S 爲最大公度。也即 c(即 S)就是 b 與 c 的最大公度。



(圖 7)

公度，就是可通約的意思。它相

同於算術中兩個或者兩個以上的數的公約數的意思。在算術裏，我們知道只要兩個數不是互質的，則必定有公約數。如100，150都可用50來除盡它，100含50的兩倍，150含50的三倍，這裏50叫做100，150的公約數。但兩數如有公約數，則不止一個。如本例的50，25，10，都是它們的公約數。其中最大的一個公約數是50。至於兩條或兩條以上綫段的公度是具有同樣的性質。例如：只要有一條綫段拿它去量兩條或兩條以上綫段，都能量盡，則此兩條或兩條以上綫段必有公度，且有無數個公度。但只有一個最大公度。

關於兩條或兩條以上綫段的最大公度，有下面兩個重要的定理：

1. 如果兩條綫段中，較長的綫段，含有較短的綫段的整倍數而沒有剩餘，則較短綫段，就是這兩條綫段的最大公度。

如兩綫段 a,b，　$a > b$，　$a = nb$（n 表示正整數）。

求證：b 爲 a,b 的最大公度。

證：$a = nb$，　b 含它本身的一倍，（如圖 8）

（圖 8）

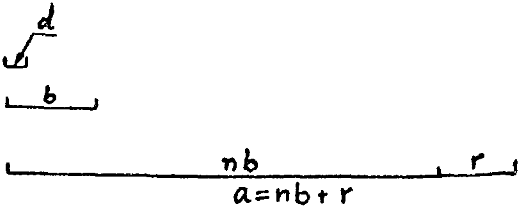
$\therefore b$ 爲 a,b 的公度。

$\because b$ 不可能再含有比它本身較長綫段的整倍數，

$\therefore b$ 爲 a,b 的最大公度。

2. 兩條綫段中，如果較長綫段含有較短綫段的整倍數而有剩餘，則這兩條綫段如有最大公度，即是較短綫段和剩餘綫段的最大公度。

如 $a = nb + r$，　$r < b$，（如圖 9）



（圖 9）

求證：a,b 之最大公度 $= b,r$ 之最大公度。

證：當 b 與 r 同含有綫段 d 的整倍數。$r=md$，　$b=Sd$，

(m,S 爲互質的正整數)

則 $a = nb + r = n(Sd) + md = (nS + m)d$，

$\therefore d$ 爲 a,b 的公度。

$\because a,b$ 及 b,r 兩組綫段同含有公度 d，

　m 與 S 爲互質的，

$\therefore d$ 爲 b 與 r 的最大公度。

$\because a = (nS + m)d$，　　$b = Sd$，

而 $m + nS$ 與 S 亦必互質的，

可知 d 亦爲 a 與 b 之最大公度。

從兩綫段最大公度的基本性質，我們得出求兩綫段最大公度的方法。

例：設綫段 a 及 b，$a > b$。

求：a,b 之最大公度。

求法：將 b 綫段連續在 a 上截取，則可能出現有兩種情況：

1. 若以 b 連續在 a 上截取，截到某一次，正好將 a 截完，

則 b 爲 a,b 之最大公度。

2. 若以 b 連續在 a 上截取，截到某一次，得到比 b 要短的剩餘綫段 c，這時可再用綫段 c 連續在 b 上截取，截到某一次，同樣發生上兩種情況：一種正好截完沒有剩餘，這時可判定 c 爲 a, b 之最大公度，因爲根據前面判斷兩綫段最大公度的性質："在兩綫段中，如果較長綫段含有較短綫段的整倍數而有剩餘，這兩綫段若有最大公度，則爲較短綫段和剩餘綫段的最大公度"；另一種情況，當以 c 之長連續在 b 上截取，截取到某一次得到比 c 要短的綫段 d，則同樣用 d 在綫段 c 上連續截取，像這樣輾轉截取下去最後不外乎兩種情況：

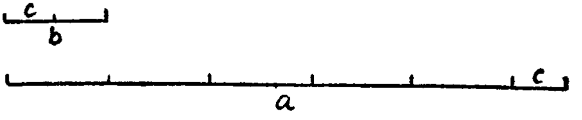
甲、在輾轉相截若干次以後，正好截完沒有剩餘；

乙、輾轉相截一直進行下去，永遠有剩餘（這種情況在理論上是存在的，事實上好像不會有，這是由於我們所使用的作圖儀器精確度有限，不能畫出任意小的綫段來，而這些任意小的綫段，在客觀上存在很多的）。像情況甲我們稱這兩綫段爲有公度綫段，而情況乙則稱這兩綫段爲無公度綫段，**有公度綫段又稱爲可公度綫段。無公度綫段又稱爲不可公度綫段。**

例如：　設 a,b 爲已知綫段，$a > b$。

求：a,b 之最大公度。

(1) 當 $a = 5b + c$，$b = 2c$。（如圖10）

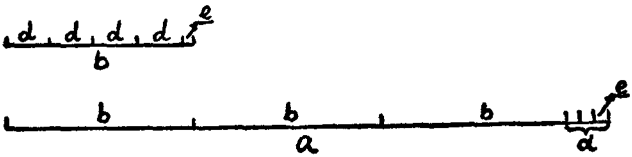


（圖　10）

$\therefore a = 5(2c) + c = 11c$。

$\therefore c$ 爲 a, b 之最大公度。

(2) 當 $a = 3b + d$,　　$b = 4d + e$,　　$d = 3e$。$\therefore a = 3(4d + e) + d = 12d + d + 3e = 13(3e) + 3e = 42e$。$b = 4d + e = 4(3e) + e = 13e$。$\therefore e$ 爲 a, b 之最大公度。(如圖 11)



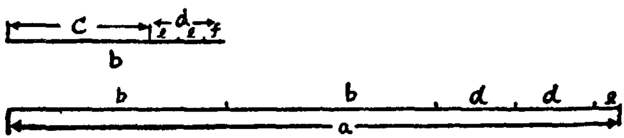
(圖 11)

(3) 當 $a = 2b + c$, $b = c + d$, $c = 2d + e$, $d = 2e + f$。(如圖 12)

$\therefore a = 2(c + d) + c = 3c + 2d = 3(2d + e) + 2d = 8d + 3e = 8(2e + f) + 3e = 16e + 3e + 8f = 19e + 8f = \cdots\cdots$

$b = c + d = 2d + e + d = 3(2e + f) + e = 7e + 3f = \cdots\cdots$

c 爲第一次剩餘, d 爲第二次剩餘, e 爲第三次剩餘, f 爲第四次剩餘……。$\therefore c > d > e > f$……。



(圖 12)

$\therefore a, b$ 是没有公度的。

若 a, b 两线段辗转相截永远有剩余,而 a, b 仍有最大公度 x 的话,则不仅 a, b 应含有 x 的整倍数,且 c, d, e, f 也同样应含有 x 的整倍数。

$\because c>d>e>f\cdots\cdots$, $\therefore c$ 含 x 的公度的整倍数 $>d$ 含 x 的公度的整倍数 $>\cdots\cdots$, 以下类推。

设 $c=K_m x$, 假定剩余逐渐递减, $d=(K_m-K_1)\ x$, $e=(K_m-K_2)x$, $f=(K_m-K_3)x\cdots\cdots$, 但这样下去直至最后它的剩余应为 $(K_m-K_m)x=0$, 这与 a, b 两线段辗转相截永有剩余相矛盾的。$\therefore a, b$ 两线段在这种情况下为不可公度的。

用辗转相截,求两线段的最大公度,它与辗转相除法求两数之最大公约数的法则相同, 在算术里有求两个以上的数的最大公约数的法则, 在几何里当然有求两根以上线段的最大公度的法则。就如欲求三个线段的最大公度(假如它们有公度的话), 可以先求得任何两线段之最大公度, 再求出两线段之最大公度与第三线段之最大公度,最后求得之最大公度,即为三线段之最大公度。如果三根以上线段的最大公度(假如它们有最大公度时),可以用同法进行而求得。

我们在算术中研究最大公约数问题有两个基本性质:

1. 在两个数中,若大的一个数是小的一个数的倍数,则这个小的数也就是两个数的最大公约数,例如 18 是 54 和 18 两数的最大公约数。

2. 在两个数中,若大的一个数不是小的一个数的倍数,则这两个数的最大公约数, 等于小的一个数除大的一个数所