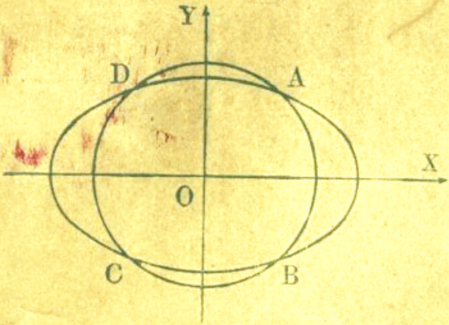


数理化复习读物

数学

（下）

目　录

第三篇　几　何

第四篇　三　　角

第三篇　几　　何

第一章　相交线与平行线

一、关于角的一些基础知识

1，两条直线相交有各种不同的情况，可以从它们所成的角的大小来区别．按照角的大小，可分为锐角、直角、钝角、平角和周角．

2．经常用到的相关联的两个角

（1）对顶角　对顶角相等．

（2）互为余角　两角的和等于 90°．

（3）互为补角　两角的和等于 180°．

（4）互为邻补角　两角的非公共边互为延长线．

（5）对应边互相垂直　两个角或相等，或互为补角．

（6）对应边互相平行　两个角或相等，或互为补角．

（7）三线八角　两条直线分别与第三条直线相交，则得到八个角．按照它们的位置可分为：同位角（如都在左上或都在左下），内错角（在两直线之间，如一个在左上，一个在右下），同旁内角（在两直线之间，在第三直线的同旁）．

二、平　行　线

1. 平行线的定义

在同一平面内的两条不相交的直线，叫做平行线。

2. 平行线的性质

(1) 过直线外一点，只能作一条直线平行于已知直线。

(2) 同位角相等，内错角相等，同旁内角互补（见图3—1)。即$\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle 3$，$\angle 3+\angle 4=180°$。

(3) 平行线之间的距离处处相等(见图3—2)。若$l_1 /\!/ l_2$，则$AB=CD$。

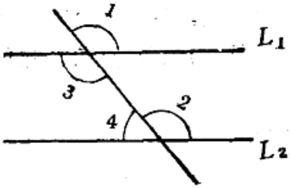


图 3—1

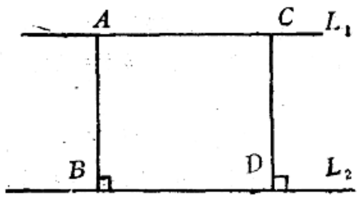


图 3—2

3. 平行线的判定

定　理	条　件	结　论
1	若同位角相等(如$\angle 1=\angle 2$，见图 3—1)	则$l_1 /\!/ l_2$
2	若内错角相等(如$\angle 2=\angle 3$，见图 3—1)	则$l_1 /\!/ l_2$
3	若同旁内角互补(如$\angle 3+\angle 4=180°$，见图 3—1)	则$l_1 /\!/ l_2$
4	若直线l_1、l_2都与第三条直线l_3垂直($l_1\perp l_3$，$l_2\perp l_3$)	则$l_1 /\!/ l_2$
5	若直线l_1、l_2都与第三条直线l_3平行($l_1 /\!/ l_3$，$l_2 /\!/ l_3$)	则$l_1 /\!/ l_2$

4．平面几何中常用的三个距离

（1）两点间的距离．

（2）点到直线的距离．

（3）平行线间的距离．

【例 1】 一个角的余角是它的补角的$\frac{1}{4}$，求这个角．

解：设这个角是 x 度，那么它的余角是 $(90-x)$ 度，它的补角是$(180-x)$度．

根据题意，得

$$90-x=\frac{1}{4}(180-x).$$

解之，得

$$x=60.$$

答：这个角是 60°．

【例 2】 求证同角的余角相等．

已知：$\angle 2$ 和 $\angle 3$ 都是 $\angle 1$ 的余角(见图 3—3)．

求证：$\angle 2=\angle 3$．

证明：$\because$ $\angle 2$ 是 $\angle 1$ 的余角，$\therefore$ $\angle 2+\angle 1=90°$．

即 $\angle 2=90°-\angle 1$，同理，$\angle 3=90°-\angle 1$，

$\therefore$ $\angle 2=\angle 3$．

【例 3】 如果两条直线都和第三条直线平行，求证这两条直线也平行．

已知：$l_1 /\!/ l_3$，$l_2 /\!/ l_3$．

求证：$l_1 /\!/ l_2$．(见图 3—4)

证明：作直线 l，使它与 l_1、l_2、l_3 相交．

$\because$ $l_1 /\!/ l_3$，$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$．(同位角相等)

又$\because$ $l_2 /\!/ l_3$，$\therefore$ $\angle 2=\angle 3$．

$\therefore\ \angle 1=\angle 2$，$\therefore\ l_1 /\!/ l_2$。(同位角相等)

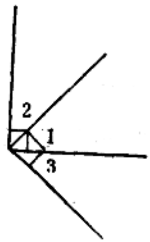


图 3—3

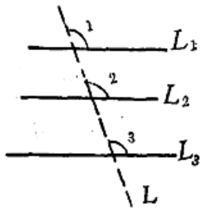


图 3—4

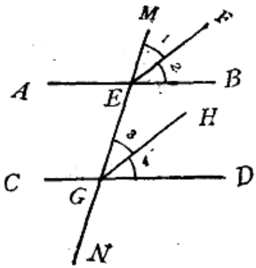


图 3—5

【例 4】 若二直线平行，则一对同位角的平分线互相平行。

已知：如图 3—5，$AB /\!/ CD$，EF、GH 分别是 $\angle MEB$、$\angle MGD$ 的平分线。

求证：$EF /\!/ GH$。

证明：$\because\ AB /\!/ CD$，$\therefore\ \angle MEB=\angle MGD$。

又$\because\ \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

$\therefore\ \angle 1=\angle 3$，$\therefore\ EF /\!/ GH$。

复 习 参 考 题

1. 已知一个角比它的余角大 $24°10'12''$，求这个角的补角。
2. 已知 $\angle A:\angle B=7:3$，$\angle A-\angle B=90°$，$\angle A$ 和 $\angle B$ 是否互补？为什么？
3. 如图 3—6，斜面的倾斜角 $\angle A$ 是 $30°$，求物体在斜面上所受的重力方向 OP ($OP\perp AC$) 和物体对斜面的压力

方向 OQ（$OQ \perp AB$）所夹的 $\angle POQ$ 的度数。

4. 若两个角互为补角，求证其中较小的角的余角等于这两个角差的一半。

5. 求证一对对顶角的平分线在同一条直线上。

6. 求证互为邻补角的两个角的平分线互相垂直。

7. 如图 3—7，已知 $AE \parallel BC$、$\angle B=\angle C$，求证 AE 平分 $\angle DAC$。

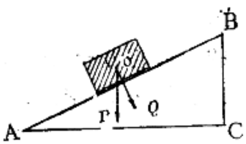


图 3—6

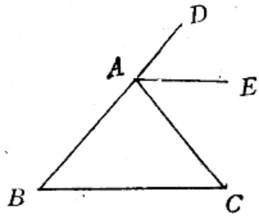


图 3—7

8. 如图 3—8，已知 $\angle BAD=\angle DCB$，$\angle 1=\angle 2$，求证 $AB \parallel DC$。

9. 求证两条平行直线的一对内错角的平分线互相平行。

10. 如图 3—9，已知 $\angle 1=143°15'$，$\angle 2=80°5'$，$\angle 3=56°35'$。求$\angle 4$。

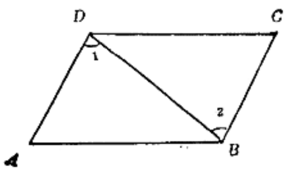


图 3—8

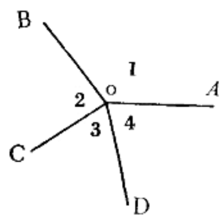


图 3—9

第二章　三　角　形

一、三角形中的角和主要线段

1. 三角形的内角和外角

(1) 三角形的内角：三角形的角也叫做三角形的内角。$\triangle ABC$ 的三个内角是 $\angle A$、$\angle B$ 和 $\angle C$。

(2) 三角形的外角：三角形的角的一边与另一边的反向延长线所组成的角叫做三角形的外角。在图 3—10 中，$\angle CBD$ 就是$\triangle ABC$ 的一个外角。

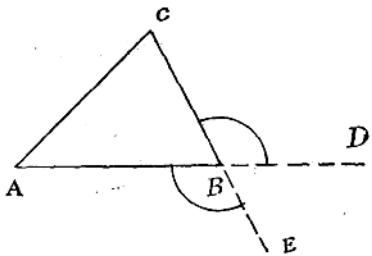


图 3—10

2. 三角形的主要线段

(1) 三角形的高：从三角形的一个顶点到它的对边或者对边的延长线引垂线，顶点到垂足间的线段叫做三角形的高。三角形的三条高线交于一点，这一点叫做三角形的垂心。

（2）三角形的中线：连结三角形任意一个角的顶点和它对边中点的线段叫做三角形的中线。三角形的三条中线交于一点，这一点叫做三角形的重心。

（3）三角形的角的平分线：三角形的内角的平分线和对边相交，角的顶点和交点间的线段叫做三角形的角的平分线。三角形三条角的平分线交于一点，这一点叫做三角形的内心（三角形的内切圆的圆心）。内心到三角形三边等距离。

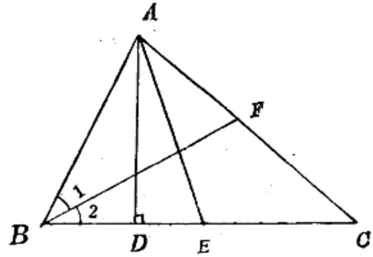


图 3—11

如图 3—11，AD 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高；$BE=EC$，AE 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线；$\angle 1=\angle 2$，BF 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$ 的平分线。

二、三角形的分类

1．按边的长短分为

不等边三角形（三边不等）；等腰三角形（两边相等）；等边三角形（三边相等，也叫正三角形）。

2．按角的大小分为

锐角三角形（三个内角都是锐角）；直角三角形（一个内角是直角）；钝角三角形（一个内角是钝角）。

三、三角形的性质

1．三角形三边之间的关系

任何两边的和大于第三边，任何两边的差小于第三边。

2．三角形内角和定理

三角形三个内角的和等于 180°。

3．三角形外角定理

三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和。

4．三角形的边和角的相互关系

在一个三角形中，大边对大角，大角对大边。

5．三角形中位线(两边中点的连线)定理

三角形任何两边中点的连线，平行于第三边，且等于第三边的一半(三角形的中位线平行于所对的边，并且等于所对的边的一半)。

四、特殊三角形的性质

1．等腰三角形的性质

(1) 等腰三角形底边上的中线、高和顶角的平分线是一条线段(三线合一)．这一条线也是等腰三角形的对称轴(四线合一)。

(2) 两底角相等、反过来，如果两底角相等，则它是等腰三角形。

2．等边三角形的性质

等边三角形除具有等腰三角形的性质外，它的三个内角

相等，并且每一个内角等于 60°。

3. 直角三角形的性质

(1) 两锐角互余。

(2) 两直角边的平方和等于斜边的平方(勾股定理)。反过来，如果一个三角形两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形。

(3) 若一个锐角为 30°，则这个角所对的边等于斜边的一半。

(4) 斜边上的中线等于斜边的一半（以直角三角形斜边的中点为圆心，以斜边为直径的圆就是直角三角形的外接圆）。

4. 等腰直角三角形的性质

等腰直角三角形具有等腰三角形的性质，也具有直角三角形的性质。它的两个锐角都是 45°，它的斜边是直角边的 $\sqrt{2}$ 倍。

五、全等三角形

1. 全等三角形的定义

能完全重合的两个三角形叫做全等三角形。如 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是全等三角形，就写为 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$（符号“$\cong$”表明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是相似形，同时又是等积的，即形状大小完全一样）。

2. 全等三角形的性质

全等三角形的对应角（在两个三角形完全重合时重合的两个角）和对应边(在两个三角形完全重合时重合的两条边)

分别相等。例如 $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$，则 $\angle A = \angle A_1$，$\angle B = \angle B_1$，$\angle C = \angle C_1$，$AB = A_1B_1$，$BC = B_1C_1$，$CA = C_1A_1$（见图 3—12）。

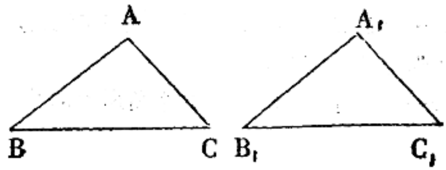


图 3—12

六、三角形全等的判定

1. 三角形全等的判定定理

（1）如果一个三角形的三边分别等于另一个三角形的三边，则这两个三角形是全等三角形。记作（边、边、边）或（s、s、s）。

（2）如果一个三角形的两边和夹角分别等于另一个三角形的两边和夹角，则这两个三角形是全等三角形。记作（边、角、边）或（s、a、s）。

（3）如果一个三角形的两角和夹边分别等于另一个三角形的两角和夹边，则这两个三角形是全等三角形。记作（角、边、角）或（a、s、a）。

（4）如果一个三角形的两角和一对边分别等于另一个三角形的两角和一对边，则这两个三角形是全等三角形。记作（角、角、边）或（a、a、s）。

2. 直角三角形全等的判定定理

（1）如果一个直角三角形的两条直角边分别等于另一直角三角形的两条直角边，则这两个直角三角形全等。

（2）如果一个直角三角形的一边和一锐角分别等于另一直角三角形的一边和一锐角，则这两个直角三角形全等。

（3）如果一个直角三角形的斜边和一直角边分别等于另一直角三角形的斜边和一直角边，则这两个直角三角形全等。

七、线段的垂直平分线和角的平分线的性质

1. 线段的垂直平分线的性质定理

（1）线段的垂直平分线上的任意一点到线段的两端等距离。

（2）到线段两端等距离的点都在线段的垂直平分线上。

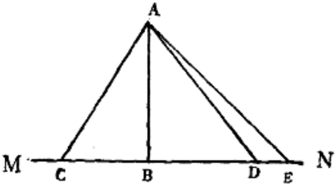
三角形三边的垂直平分线交于一点，这一点到三角形的三个顶点等距离，这个点叫做三角形的外心（外接圆的圆心）。

2. 角的平分线的性质定理

（1）角的平分线上任意一点到角的两边等距离。

（2）到角的两边等距离的点都在角的平分线上。

八、斜线的长与射影的关系

<table>
<tr><th>图　　　　　　　　形</th><th>条　　件</th><th>结　　论</th></tr>
<tr><td rowspan="4">

A 是直线 MN 外的一点，AB⊥MN
AB 是垂线
AC、AD、AE 是斜线
BC、BD、BE 分别是 AC、AD、AE 在直线 MN 上的射影</td><td>若$AC=AD$</td><td>则$BC=BD$</td></tr>
<tr><td>若$BC=BD$</td><td>则$AC=AD$</td></tr>
<tr><td>若$AE>AD$</td><td>则$BE>BD$</td></tr>
<tr><td>若$BE>BD$</td><td>则$AE>AD$</td></tr>
</table>

【例 1】 求证五角星各顶角的和等于 180°.

已知：五角星 $ABCDE$（见图 3—13）.

求证：$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$.

证明：在 $\triangle AMN$ 中，$\angle A+\angle 1+\angle 2=180°$.

$\because$ $\angle 1$ 是 $\triangle MBC$ 的外角，

$\therefore$ $\angle 1=\angle B+\angle C$.

同理，$\angle 2=\angle D+\angle E$.

$\therefore$ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$.

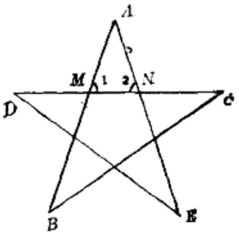


图 3—13

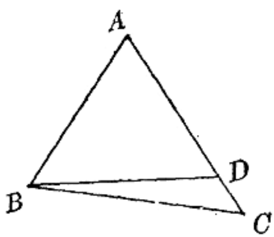


图 3—14

【例 2】 如图 3—14，已知在 $\triangle ABC$ 中，$AC>AB$，在 AC 上取一点 D，使 $AD=AB$。

求证：$\angle DBC=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$。

证明：在 $\triangle ABD$ 中， $\because$ $AD=AB$，

$\therefore$ $\angle ABD=\angle ADB$。

$\therefore$ $\angle DBC=\angle B-\angle ABD$

$=\angle B-\angle ADB$

$=\angle B-(\angle C+\angle DBC)$

$=\angle B-\angle C-\angle DBC$。

$\therefore$ $2\angle DBC=\angle B-\angle C$，

$\therefore$ $\angle DBC=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$。

【例 3】 求证三角形内的一点到各顶点距离的和大于三角形周长的一半。

已知：D 是 $\triangle ABC$ 内的一点（见图 3—15）。

求证：$DA+DB+DC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$。

证明：在 $\triangle DAB$ 中，$DA+DB>AB$。

在 $\triangle DBC$ 中，$DB+DC>BC$。

在 $\triangle DCA$ 中，$DC+DA>CA$。

$\therefore$ $2(DA+DB+DC)>AB+BC+CA$。

$\therefore$ $DA+DB+DC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$。