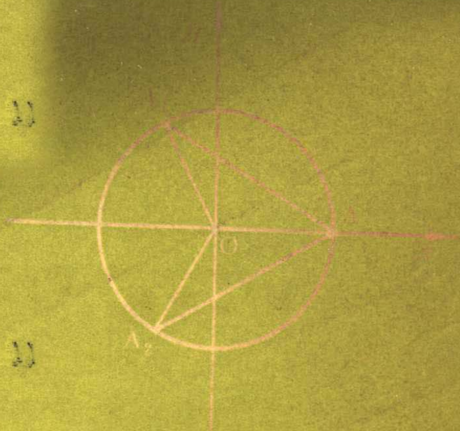

程其坚

根式

GENSHI

数学进修用书

根　　式

程其坚

浙江人民出版社

内 容 提 要

本书比较系统地叙述算术数、实数和复数三个范围里根式及其运算的基础知识，内容比新编中学数学教材稍有扩大，并配置有一定数量的例题和练习题。

数学进修用书
根 式
程 其 坚
*
浙江人民出版社出版
绍兴新华印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
开本 787×1092 1/32 印张 4.25 字数 96,000
1979年7月第一版
1979年7月第一次印刷
印数：1—25,000

统一书号：7103·1058
定 价：0.36 元

编 辑 说 明

这套丛书主要是为中学数学教师编写的. 随着教育事业的发展，教师队伍迅速壮大，新教师大量增加. 在新的长征中，他们担负着为祖国培养千千万万建设人才的极其光荣的任务. 当前他们需要尽快地熟悉和掌握教育部新编教材，努力提高教育质量，因而进修的要求十分迫切. 本丛书出版目的，就是为他们进修提供一点比较系统的材料. 编写时照顾教师队伍的实际状况，内容比教育部新编中学数学教材要扩大、加深和提高一些，使学完以后继续自学大学有关数学课程，基础打得更加扎实. 同时也注意适当联系中学教学实际，有助于教师进行教学. 丛书也适合具有高中程度的学生和工农青年自学.

前言

根式在数学、自然科学和工程技术学科里是经常出现的，是一个基本的数学课题．它的变形和运算虽然都有规律可循，但是往往要作一些特殊的分析；要有较熟练的运算技巧．因而给初学者带来一些困难．如何提高分析推理的能力，提高运算的技能、技巧，以克服可能遇到的困难，把根式这个基本课题学得更好一些，实在是一个很值得讨论的问题．

一个运算总是与施行这个运算的范围有关．根式作为开方运算的结果，当然也不例外．事实上，根式在算术数、实数和复数三个范围里的情况是不相同的．它的意义、性质和运算是随着数的概念的扩展而逐步扩展的．所以，这本小册子试图依次在算术数、实数和复数三个范围里，把根式及其运算的基础知识作一个比较系统的叙述．内容比中学教材稍有扩大，而把重点放在实数部分．可供中学新老师教学参考或高二同学课外阅读之用．

目　录

第一章　算术数的开方

§1　方根和开方的意义

在关系式$x^n=a$(n是大于1的自然数)中，如果已知x和n求a，这种求几个相同因数的积的运算，叫做乘方，乘方的结果叫做幂.

反过来，如果已知a和n求x，那么x叫做a的n次方根(或根). 也就是说，如果一个数的n次幂等于a，那么这个数就叫做a的n次方根. 求a的n次方根的运算，叫做把a开n次方. a叫做被开方数，n叫做根指数.

例如　$\because$　$2^3=8$，　$\therefore$　2是8的3次方根；

　　　$\because$　$3^4=81$，　$\therefore$　3是81的4次方根.

8和81就是被开方数，原来的幂指数3、4在开方时就是根指数.

这一章中所讲的被开方数都是算术数，所以标题是"算术数的开方".

算术数就是拿掉实数前面的"＋"号或"－"号所得到的数，也就是作为实数的绝对值的那些数. 算术数的全体叫做算术数的集合.

如果对于某一个集合A中的数施行开方运算，能够得到一个方根，而且这个方根仍然属于集合A，那么我们就说在集合A中开方运算能够施行.

拿算术数集合来说吧！开方运算就是能够施行的. 为什么呢？这是因为对于任何已知的算术数，只要利用乘方的法则，总能够把它的n次方根找出来. 例如，为了求3的2次方根，

首先把自然数按照从小到大的次序写出它们的2次幂. 立即发现：$1^2<3$，而$2^2>3$. 如果用字母x表示3的2次方根，就可以断定：$1<x<2$. 或者说，x在区间[1,2]内.

其次，把区间[1,2]划为十等分，计算1.1，1.2……1.9的2次幂，又发现：$1.7^2<3$，而$1.8^2>3$. 于是断定：$1.7<x<1.8$，就是说，x在区间[1.7,1.8]内.

把所得到的区间[1.7,1.8]再划为十等分，1.71，1.72……1.79各数中$1.73^2<3$，而$1.74^2>3$. 所以，$1.73<x<1.74$.

把所得到的区间再划为十等分，如此无限地分下去. 我们得到闭区间的无限叙列：

[1,2]，[1.7,1.8]，[1.73,1.74]，[1.732,1.733]，……

这些区间一个套着一个，长度越来越缩小. x就包含在所有这些区间之中，就是这些区间的公共点. 当划分的过程无限继续时，这个公共点显然是唯一存在的. 所以，3的2次方根总能找得到，而且是唯一的算术数.

推广来说，任何算术数的n次方根是存在而且唯一的.

我们用符号$\sqrt[n]{a}$表示算术数a的n次方根. 由定义可知它的n次幂等于a，就是

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

在算术数集合中，这是一个恒等式.

a的2次方根，习惯上用$\sqrt{a}$表示，把根指数2略去. $\sqrt{a}$也叫做a的平方根. a的3次方根$\sqrt[3]{a}$也叫做a的立方根.

根据以上的叙述，可知在算术数集合中，开方运算能够经常单值施行.

§2 开方的一般法则

方根是用乘方定义的，开方是乘方的一个逆运算. 乘方和

开方既对立又统一．所以，开方的许多问题需要利用乘方解决．前一节中我们已经借助于乘方规则，说明了算术数的开方是能够经常单值施行的．在这一节里，我们将以乘方的公式为工具建立算术数开方的一般法则．

在乘方里，有这样一些公式：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

各式右边各项的系数可以排列成一个三角形的样子：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

排列的规律是，两条斜边上的数都是1，其余的每一数都等于它的左上方和右上方的两个数相加（用短线相连）．例如，$2=1+1$，$3=1+2$，$6=3+3$，$10=4+6$，……等．如果已知其中任何一行，便能写出下面的一行．例如由1，5，10，10，5，1这一行就能推出下面的一行是1，6，15，20，15，6，1，这就是$(a+b)^6$展开式各项的系数．这个图形就是著名的杨辉三角．它的发现比欧洲要早300多年．

开平方的法则大家比较熟悉，不详细介绍了．这里主要讲

开立方法则.

开立方时，把立方根分为几位数字，从最高位起一个一个来求. 因此首先就要看看立方根能有几位整数.

我们知道，1位整数的立方可能是1位数或2位数，如$2^3=8$，$4^3=64$. 最多是3位数，这是因为最大的1位整数是9，它的立方729是一个3位数. 所以，1位、2位和3位整数的立方根只能含有1位整数.

2位整数的立方可能是4位或5位，最多是6位数，所以，4位、5位和6位整数的立方根只能含有2位整数.

依此类推. 7位、8位和9位整数的立方根只能含有3位整数. ……等等.

根据这个道理，我们从被开方数的个位开始，向左数(shǔ)，每三位叫做一节，节与节之间用“,”号分开. 最左面的一节可能不足三位，仍然算作一节. 被开方数能分为几节，它的立方根就含有几位整数. 例如，592704和19565109能够分成2节和3节：

592，704和19，565，109，

它们的立方根分别含有2位和3位整数.

如果被开方数带有小数，那么小数部分分节时，应从十分位(小数点后面第一位)起向右数(shǔ)，每三位作一节，最右面的一节如不足三位，必须添“0”补足三位. 例如，30.369328和8.1206分成：

30.369，328和8.120，600，

它们的立方根都含有1位整数和2位小数，但都是近似的.

知道了立方根含有几位整数以后，就可以求各位上的数字了. 因为有等式：

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

所以，就把被开方数看作 $(a+b)^3$，立方根的最高位数字就是 a*. 先求出 a（根据一位数的立方来求），从被开方数减去初商 a 的立方，得到余数，即

$$(a+b)^3-a^3=(3a^2+3ab+b^2)b,$$

然后用 $3a^2$ 去试除余数，把所得商作为立方根的次高位数字 b，再从余数减去 $(3a^2+3ab+b^2)b$，得到新余数. 如果原来的被开方数刚好是 $(a+b)^3$，那么新余数等于 0，立方根就恰好是 $a+b$. 假如新余数不等于 0，可以把 $a+b$ 当成 a，继续进行这些步骤.

总之，开立方的法则分为两步：

1）把被开方数分节，确定立方根含有几位整数；

2）应用 $(a+b)^3$ 公式逐个求出立方根的各位数字.

例 1　求 14886936 的立方根.

解　算式是：

			2	4	6	
			14,	886,	936···	$(a+b)^3$
			8	000······		a^3
$3a^2$···	$3\times2^2\times10^2=$	1200	6	886······		$(a+b)^3-a^3$
$3ab$···	$3\times2\times10\times4=$	240				
b^2···	$4^2=$	16				
$3a^2+3ab+b^2$	$=$	1456	5	824······		$(3a^2+3ab+b^2)b$
$3a^2$···	$3\times24^2\times10^2=$	172800	1	062	936	
$3ab$···	$3\times24\times10\times6=$	4320				
b^2···	$6^2=$	36				
$3a^2+3ab+b^2$	$=$	177156	1	062	936···	$(3a^2+3ab+b^2)b$
				0		

* 十位数＝十位数字×10；百位数＝百位数字×100，……余类推.

$$\therefore \quad \sqrt[3]{14886936}=246.$$

从理论上讲，有了杨辉三角就可以求出任何数(这里指算术数)的任意次方根，只不过根指数愈高，计算愈加繁复吧了！下面举一个开 5 次方的例子.

例 2 求69343957的 5 次方根.

解 把被开方数69343957每五位分作一节，有两节. 因而方根含有 2 位整数. 为了求出方根的各位数字就要利用 $(a+b)^5$ 的展开式，这个展开式中各项系数可以从杨辉三角中找到，那就是：

$$\begin{aligned}(a+b)^5&=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3\\&\quad+5ab^4+b^5\\&=a^5+(5a^4+10a^3b+10a^2b^2\\&\quad+5ab^3+b^4)b.\end{aligned}$$

所以有算式：

$$
\begin{array}{lrr|ll}
 & & & \overline{3\quad\ } & 7 \\
 & & & 693, & \dot{4}3957\cdots(a+b)^5 \\
 & & & 243 & 00000\cdots a^5 \\
\hline
5a^4\cdots\cdots & 5\times3^4\times10^4= & 4050000 & 450 & 43957\cdots(a+b)^5-a^5 \\
10a^3b\cdots\cdots & 10\times3^3\times10^3\times7= & 1890000 & & \\
10a^2b^2\cdots\cdots & 10\times3^2\times10^2\times7^2= & 441000 & & \\
5ab^3\cdots\cdots & 5\times3\times10\times7^3= & 51450 & & \\
b^4\cdots\cdots & 7^4= & 2401 & & \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{5a^4+10a^3b+10a^2b^2+5ab^3+b^4=} & 6434851 & 450 & 43957\cdots(5a^4+10a^3b+10a^2b^2+5a^3b+b^4)b \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

$$\therefore\ \sqrt[5]{69343957}=37.$$

练 习 一

求下列各数的立方根：

(1) 12167;　　(2) 2515456.

§ 3　方根的近似计算法

许多实际问题常常要求我们按照给定的精确度，计算方根的近似值. 我们不但要会开方的一般方法，还要能够计算方根的近似值. 方根的近似计算法很多. 这里介绍逐次逼近法.

先讲用逐次逼近法计算近似平方根. 方法比较简单，看下面的例子便能明白.

例 1　计算19的平方根，精确到0.001.

解　因为 $4^2<19<5^2$，所以 $4<\sqrt{19}<5$. 就取 4 作为 $\sqrt{19}$ 的一个近似值，叫做初始近似值，记作 $x_1=4$. 如果这个近似值的误差为 α_1，那么应有：

$$\sqrt{19}=4+\alpha_1.$$

两边平方　$19=16+2\times4\alpha_1+\alpha_1^2$，

就是　$\alpha_1^2+8\alpha_1-3=0.$　　(1)

这里 α_1 显然小于 1，不然 $\sqrt{19}$ 就大于 5 了. 既然 α_1 并不太大，α_1^2 就更小了. 所以把(1)中的 α_1^2 略去，得到

$$8\alpha_1-3\approx0.$$

从而求得 α_1 的近似值

$$\alpha_1\approx0.375.$$

再取 $x_2=x_1+\alpha_1=4.375$ 作为 $\sqrt{19}$ 的第二近似值. 设 x_2 的误差为 α_2，那么应有

$$\sqrt{19}=x_2+\alpha_2.$$

两边平方并舍去 α_2^2，得到

$$19 \approx x_2^2 + 2x_2\alpha_2.$$

于是 $$\alpha_2 \approx \frac{19 - x_2^2}{2x_2}.$$

这表明可以取第三近似值：

$$x_3 = x_2 + \frac{19 - x_2^2}{2x_2},$$

就是 $$x_3 = \frac{19 + x_2^2}{2x_2}.$$

这个等式不包含 α_2，α_2 的具体计算可以省略，只要把 $x_2 = 4.375$ 代入上式，便能算得

$$x_3 = \frac{19 + 4.375^2}{2 \times 4.375} \approx 4.359.$$

假设 x_3 的误差为 α_3，把求 α_1 和 α_2 的步骤重复应用一次，便能求得

$$\alpha_3 \approx \frac{19 - x_3^2}{2x_3}.$$

于是可以取第四近似值：

$$x_4 = x_3 + \frac{19 - x_3^2}{2x_3} = \frac{19 + x_3^2}{2x_3}.$$

依此类推．如果已经求得 $\sqrt{19}$ 的第 n 近似值 x_n，那么由下列公式：

$$x_{n+1} = \frac{19 + x_n^2}{2x_n},$$

就能算出下一个近似值．

既已算得 $x_3 = 4.359$，由 x_4 的表达式便算得：

$$x_4 = \frac{19 + 4.359^2}{2 \times 4.359} = 4.3589 \approx 4.359$$

我们看到在给定的精确度的范围内，连续的两个近似值 x_3 和 x_4 相同，于是就停止计算，并且用这个相同的值作为所求的 $\sqrt{19}$ 的近似值. 所以 $\sqrt{19}$ 精确到 0.001 的近似值为：

$$\sqrt{19}=4.359$$

一般说，计算任何数 a 的近似平方根时，都是先取一个初始近似值 x_1，然后按照公式：

$$x_{n+1}=\frac{a+x_n^2}{2x_n},$$

算出下一个近似值. 每逼近一次，就能算得精确度更高的近似值. 在给定的精确度范围内，出现两个连续的近似值相等时，就停止计算，并取这个相同的近似值作为所求的近似值.

例 2　计算 $\sqrt{3}$，精确到0.001.

解　取 $\sqrt{3}$ 的初始近似值为 $x_1=1$，则以下各次近似值为：

$$x_2=\frac{3+1^2}{2\times1}=2,$$

$$x_3=\frac{3+2^2}{2\times2}=1.75,$$

$$x_4=\frac{3+1.75^2}{2\times1.75}\approx1.7321\approx1.732,$$

$$x_5=\frac{3+1.732^2}{2\times1.732}\approx1.7320\approx1.732.$$

$x_4=x_5=1.732$，在给定的精确度 0.001 范围内，故 $\sqrt{3}$ 精确到 0.001 的近似值为：

$$\sqrt{3}=1.732.$$

应用逐次逼近法计算近似平方根时，初始近似值选择得不好或者计算有错误，最后还是可以算出所要求的结果. 不过做