

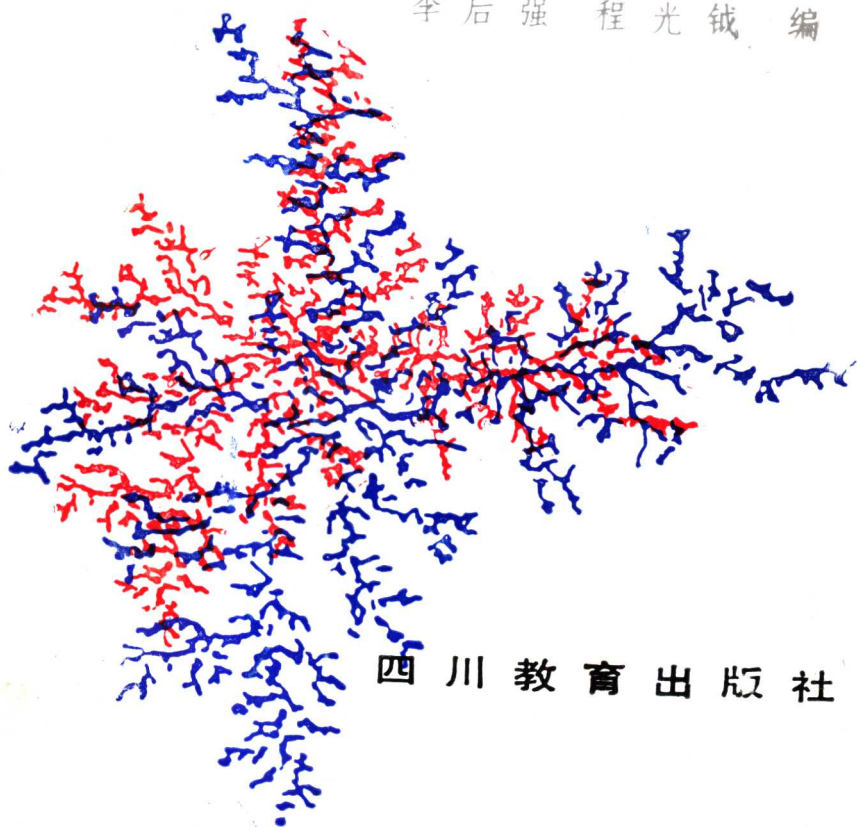
新兴边缘科学

分形与分维

—探索复杂性的新方法—

FENXINGYUFENWEI

李后强 程光钺 编



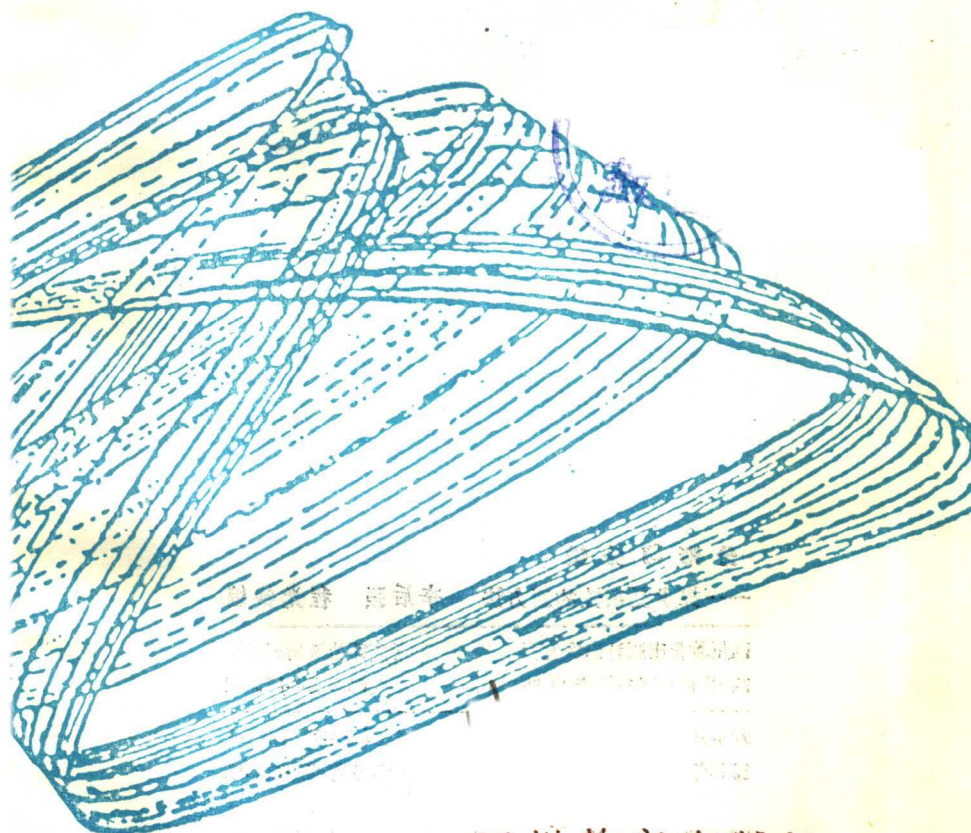
四川教育出版社

新兴边缘科学

分形与分维

——探索复杂性的新方法——

李后强 程光钺 编



四川教育出版社

责任编辑：冉崇玉

封面设计：张子云

版面设计：顾求实

分形与分维

——探索复杂性的新方法 李后强 程光钺编

四川教育出版社出版发行

(成都盐道街三号)

四川省新华书店经销

成都印刷一厂印刷

开本850×1168毫米 1/32 印张 7.5 插页 4 字数 180 千

1990年9月第一版

1990年9月第一次印刷

印数 1—1420册

ISBN7-5408-1243-5/G·1209 定价：3.14 元

内 容 简 介

本书用通俗的语言系统地介绍了分形、分维的基本概念及其主要应用。作者对分形理论的哲学意义进行概括和抽象,比较详细地讨论了表面、地震、相变、混沌、凝聚、材料断裂、大分子、生物学及医学中的分形问题,基本上反映了分形理论的发展概貌,是一本比较全面介绍分形理论及其应用的中文读物,适于中学生、大学和研究生阅读,也可供有关科技人员和社会科学工作者参考。

序

事物变化发展的无限性同人的认识在一定历史条件下的有限性这一矛盾，推动着人类在认识世界和改造世界的进程中不断前进。作为万物之灵的人之区别于其它动物，在于他能超越时间、空间和现象的限制而穷思极索，不断进取，达到使主体的小宇宙能反映并容纳客体的大宇宙，亦即他既是客观世界的一个组成部分，又是同客观世界浑然融合的主体。很久以前，西方哲学界就用诗句“一沙一世界，一花一天国，袖里有乾坤，壶中有日月”来表达他们的这种宏伟的胸怀。

小如原子核，大至宇宙的存在、发展和变化都是无限的。为探索事物的复杂性与奥秘，人们必须充分发挥他们的想象力。例如，生物的存在及其发展演变的复杂性，曾经由分类、形态识别进入微观结构而加以探究，在解决生物的发生、发展及主体与各部分之间的联系的过程中逐渐发现了分形理论应用在生物学上的巨大潜力。人们早已熟悉脱氧核糖核酸（DNA）的复制机制与传递遗传信息的关系，这实质上就是把DNA通过

分形机制进行无限的放大与重复。又如单个细胞具有全能性，即它在一定的条件下能发育成完整而充分分化的有机体。

我们所居住的世界，实质上也是按分形规律而构成的“无穷嵌套”的宏伟殿堂。分形理论为人们通过部分而推及整体，从有限中认识无限，提供了新的思想方法，这一规律已渗透到科学哲学的全部领域。因此，分形理论应用的广泛性是不言而喻的，可以说从自然科学到社会科学，甚至文学艺术，无不包含分形概念并受分形规律的制约。

本书由浅入深地对分形及其定量表征分维进行了系统全面的介绍，取材新颖，文笔简炼，在国内尚属首次出版，应为广大读者所欢迎。特撰写此序，以为推荐。

赵华明

1988年11月15日

目 录

§ 1 分形——一个新的概念	(1)
1. 传统科学面临的挑战	(2)
2. 分形和分形元	(4)
3. 分形的类型	(7)
4. 分形论——新的方法论	(10)
5. 分形研究的先驱——曼德尔布罗特	(12)
§ 2 分维——分形的定量表征	(15)
1. 经典维数	(16)
2. 豪斯道夫维数	(17)
3. 相似维数	(20)
4. 关联维数	(22)
5. 其它维数	(25)
§ 3 有规分形——“病态”几何图形	(26)
1. 谢尔宾斯基“垫片”	(27)
2. 谢尔宾斯基“地毯”	(30)
3. 谢尔宾斯基“海绵”	(30)
4. 科契雪花曲线	(32)
5. 科契岛边界线	(34)
6. 皮亚诺曲线	(36)
7. 康托尔集合	(37)
§ 4 无规分形曲线	(40)
1. 无标度区间	(41)
2. 海岸线的分形性质	(42)

3. 城市的边界分形	(45)
4. 布朗粒子运动的轨迹	(48)
§ 5 表面与分形	(51)
1. 容量维数	(52)
2. 化学活性表面的分维	(54)
3. 金属断裂的分维性质	(61)
4. 地球表面的分形性质	(63)
5. 地表河流的自相似性及分维	(64)
§ 6 凝聚与分形	(67)
1. DLA模型——受限扩散凝聚模型	(67)
2. KCA模型——动力学集团凝聚模型	(70)
3. 金属叶与金属树的分形性质	(72)
4. 似分形晶体的生长	(75)
5. 准晶体的分形结构	(79)
6. 其它凝聚现象的分形结构	(84)
§ 7 临界现象与重正化群	(86)
1. 迭代法与不动点	(87)
2. 相变和临界现象	(90)
3. 重正化变换和重正化群	(96)
4. * 渗流临界指数的重正化计算	(101)
5. * 合金薄膜相变的分形行为	(107)
§ 8 岩石的断裂与地震	(111)
1. 岩石断裂的分形模型	(112)
2. 地震中的分形问题——能量分形和时 间分形	(116)
§ 9 混沌现象与奇怪吸引子	(122)
1. 混沌现象及其特征	(123)
2. 人口方程的研究——分岔	(126)
3. 普适性与标度性——费根鲍姆数及其 它	(129)
4. 化学混沌	(132)

5. 平庸吸引子	(136)
6. 奇怪吸引子	(139)
7. *奇怪吸引子的刻画	(146)
8. 混沌现象研究的意义	(150)
§ 10 大分子的分维	(153)
1. 大分子的结构特征	(154)
2. 弗洛里方法	(156)
3. 大分子链的局域分维	(159)
4. 支化大分子的分维	(162)
5. 大分子溶液的粘度性质	(165)
6. *粘性指凸和分形	(171)
§ 11 凝胶化与渗流	(176)
1. 凝胶与凝胶化	(176)
2. 凝胶的渗流模型	(179)
3. 凝胶的标度性质	(185)
4. 凝胶集团的分维	(188)
§ 12 生物体的分形现象	(190)
1. DNA的复制和细胞的全能性	(191)
2. 核酸序列及蛋白质的分维	(194)
3. 细胞的生长和细胞膜的离子通道动力学	(199)
4. 分形生物学	(200)
5. 生物分形的广义证据及其意义	(206)
6. 病理分形与穴位的实质	(212)
7. 癌变的新机制和征服癌症的新战略	(217)
附录	(222)
一、分形子与谱维数	
二、分能量迁形结构上的移	
三、NPW模型及广义DLA模型	

后记

参考文献

§ 1 分形——一个新的概念

分形——一个新的概念

分形是一个崭新的科学名词，是科学家们在80年代议论最为热烈、最为兴奋的“热门”之一，并形成了分形的热潮。

卷入分形热潮之中的，除了物理学家、数学家、化学家、生物学家和医学家之外，还有地震学家、冶金学家、材料学家等。除此之外，不少哲学家、经济学家、社会学家、音乐家、画家乃至电影制片工作者等亦跻身于此

行列之中。目前有关分形的论文报告，数量不断翻番。美国物理学家约翰·惠勒(J.A.Wheeler)说：“可以相信，明天谁不能熟悉分形，谁就不能被认为是科学上的文化人。”

分形究竟是什么？下面将给出简要的说明。

1. 传统科学面临的挑战

伟大的德国诗人歌德说过：“大自然是唯一的书本，它的每一页都充满着深刻的内容。”

大千世界，充满着奇异而神秘的、形形色色的事物。起伏不平的山脉，弯弯曲曲的海岸线，变幻无穷的浮云，美丽多姿的雪花，金光四射的闪电，令人眼花缭乱的满天繁星，混沌与湍流，遗传与进化，人体与癌变，地貌与地震，商品与社会，思维与情感，……真是举不胜举！

山是什么形状？云彩如何变化？海岸线有多长？地震能否预测？癌细胞如何增殖？中医的穴位指什么？岩石如何断裂？……问题真是堆积如山！

经典的几何学都是以规则而光滑的几何形状为其研究对象。例如，初等平面几何的主要研究对象，实质上是直线与圆，平面解析几何的主要研究对象是直线（一次曲线）和二次曲线，微分几何的研究对象是光滑的曲线与曲面，而代数几何的研究对象则是复空间中的代数曲线。然而，连绵的山峰，蜿蜒的河流，曲折的海岸线，材料的裂纹等，它们的共同特征是极不规则、极不光滑。因此，传统的几何学和古典数学已经无能为力，随时准备“让贤”于新的“接班人”。于是，分形几何应运而生。从数学发展的角度来看，分形将经典数学和现代数学区分开来，它是数学发展中的一个新世界。

湍流和相变，是物理学中两个历史悠久的著名难题，使科学家们伤透了脑筋。因为它们是一类极其复杂的问题，过去那些所向披靡的数学物理方法，在此显得步履艰难。重正化群和分形的出现，使人们茅塞顿开。

我国的传统医学——中医，一直被世人视为“神秘的”、“难理解的”医术，其原因在于过去的生物学、生理学、物理学理论无法解释其中蕴藏的无穷奥妙；而分形理论则另辟蹊径，从一个全新的角度进行探讨，为人类最终揭去中医的神秘“面纱”提供了许多启示。

癌之所以令人恐惧，原因在于人们对其发生机制尚没有正确而深刻的阐述，因此，高明的医学家们至今不能“妙手回春”，采取行之有效的治疗方法。分形理论提出了新的癌变机制和征服癌症的新战略。

地震，常常给人类带来巨大的灾难。我国1976年的唐山大地震，遇难人员成千上万，国家财产遭受巨大损失，世界为之震惊。能不能准确地预测地震，从而避免这种自然灾害呢？这是人们极为关心的问题。但过去的理论感到困难重重。分形理论对此作了独具风格的探索，获得许多重要结论。

高分子在一定条件下能生成凝胶，常常给化工生产带来困难。因此，预测凝胶点，从而控制凝胶的生成，是高分子学家们为之奋斗了多年的目标。然而，70年代中期以前的高分子化学和物理学理论未能彻底完成此使命。70年代后期诞生的标度律和分形理论，为高分子学家重新认识高分子开辟了一条金光大道，凝胶化之类的问题获得突破性进展，高分子科学的新时代即将到来。

国家一项重大措施（如工资改革）在正式向全国颁布之前，往往要在某地区或单位进行“试点”，然后把所取得的经验和规律向全国推广。“试点”的结果为什么能在全中国推广呢？这也属于分形理论要讨论的问题。

.....

以上罗列的只是几个有代表性的例子，实际上传统科学面临

的困难还有很多。有趣的是，在传统科学感到困惑的地方，分形理论往往运用自如，大展神威。在越混乱、越无规则、越复杂的领域，分形理论一反常态地越有成效。因此，有的人把分形理论称为“反常的”科学。它从另一个极端（或另一个方面）对传统科学提供了天然的弥补和深刻的启示。近年来为人们所广泛接受的普里高津（I. Prigogine）的耗散结构理论和哈肯（H. Haken）的协同学，在许多方面讨论的问题与分形理论是一致的。显然，分形理论的应用并不限于自然科学，它在社会科学、思维科学和哲学中也占据了一席之地。

现在，该是我们回答什么是“分形”的时候了。

2. 分形和分形元

1967年，有一位名叫比诺埃特·曼德尔布罗特（Benoit B. Mandelbrot）的年轻法国数学家，在国际权威的美国《科学》杂志上提出这样一个问题：“英国的海岸线有多长？”初看，这是个极其简单的问题，但要明确回答却极不容易。

曼德尔布罗特的答案令人惊诧：海岸线的长度可以认为“是不确定的！”原因何在？海岸线的长度取决于测量时所用的尺度。

如果我们用不很精确的尺度来测量，比如从高空飞行的飞机上往下测量，那么所测得的长度是某一数值 x_1 ；当飞机降低飞行高度，从低空往下测量，此时由于原来观察不到的一些较小的海湾现在能够看到了，因而就能较为精确地进行测量，那么所得的测量结果 x_2 就会大于原来的数值 x_1 。进一步，如果是用人沿海岸行走的方法来测量，令海岸线长等于步长与步数的乘积，那么由于他必定要经过许许多多曲折的港湾与路径，所测出的长度 x_3 肯定

大于 x_2 。再进一步,如果是一个小虫沿着海岸线爬行,那么它所经过的弯弯曲曲路径就更多,走过的全程 x_n 自然会大于前面测量的三个长度。如果把海岸线分解到分子、原子这样的尺度,显然,所测得的长度 x_n 就会大到天文数字。换句话说,我们对研究对象的观察越贴近、越仔细,那么发现的细节就会越多。因为每一级都包含有比前一级更小的细节。

类似海岸线这样的曲线还有许许多多,在后面我们还要专门介绍,它们的共同特征是极不规则、极不光滑。当你越接近它们时,就会在越来越小的范围上发现同等程度的不规则性,同等程度的复杂性。长期以来,数学家们小心翼翼地把它们屏于研究的大门之外,或视之为不可捉摸的“妖魔曲线”。

但是,随着人类对客观世界认识的逐步深入,以及科学技术特别是电子计算机的不断发展,人们开始对这些稀奇古怪的曲线进行细致的研究和科学的抽象,结果发现了它们的一个鲜为人知的重要性质——自相似性(self-similarity)。所谓自相似性,简单地说,就是局部的形态与整体的形态相似。或者说,在每一个放大的级别上,这些曲线的形状都是相似的。比如在没有建筑物或其它东西作为参照物时,在空中拍摄的100公里长的海岸线与放大的10公里长的海岸线的两张照片,看上去会十分相似。

海岸线只是一个经典的范例。事实上,具有自相似性的图形广泛存在于自然界中。曼德尔布罗特为了给具有这种性质的复杂图形命名,翻遍了他儿子的拉丁文字典,于1975年冬天的一个下午,终于杜撰出一个新名词:Fractal。此词来源于拉丁文fractus,包含了英文的fractured(断裂)和fractional(碎片、分数的)双重意义。据曼德尔布罗特本人解释,fractal意为“不规则的”或“支离破碎的”。现在人们把这一类“极不规则”与

“极为破裂”的几何对象,称为fractal。国内曾经把fractal译为“分数维”、“断片”、“裂殖”和“分维体”。现在,大多数文献开始统一使用“分形”这一译名。

倘若追溯历史,分形概念并非全是新的东西。早在1926年理查德(L.F.Richardson)就指出,湍流在很大尺度范围内可以分解为许多漩涡。曼德尔布罗特认为,“自相似性”的概念与古代文明有关。的确,古代西方的思维方法为此概念增添了不少光彩。德国哲学家莱布尼兹曾经设想,一滴水中蕴含着整个宇宙,宇宙中又有无穷多个包含着新宇宙的水滴。早在人们首次发现精子时,就曾认为每个精子都是一个小人,一个极小然而形体完全的人。

分形的自相似性,在数学上还有一个很优雅的名字——内齐次性,就是说,在通常的几何变换下,分形具有不变性。分形除了本身的大小外,不存在能表示其内部构造的特征长度。最初,在分形的自相似性概念中,只包含着形态(或结构)的内涵,即把在形态或结构上存在自相似性的几何对象称为分形。研究这种分形的科学可以称为“分形几何学”,是由曼德尔布罗特所创立的。后来,由于科学研究的实际需要和来自“三论”(信息论、控制论和系统论)的巨大冲击,在自相似性的概念中逐渐加入了“功能”和“信息”的意义。因此,一般把在形态(结构)、功能和信息等方面具有自相似性的研究对象统称为分形。这样定义的分形也可以称为“广义分形”。我国生物学、医学、化学、物理学和哲学界的学者,为建立广义分形作出过重要的贡献。人们把研究分形性质及其应用的科学称为“分形理论”(fractal theory)。

按照分形理论,分形内部任何一个相对独立的部分,在一定程度上都应是整体的再现和缩影。为了叙述方便,我们姑且把构成分形整体的相对独立的部分称为分形元(fractal unit)或生成元

(generator)。近年来,为了解释分形的振动(vibration)性质,还提出了另外一个重要概念:分形子(fracton)。它表示分形上的元激发,其意义类似于量子(quantum)和声子(phonon)。

应当指出几点:①分形、分形元既可以是几何实体,也可以是由“功能”或“信息”等架起的数理模型;②分形可以同时具有形态、功能和信息三方面的自相似性,也可以只具有其中某一方面的自相似性,这样就使分形理论研究的领域大大拓宽;③分形中的自相似性可以是绝对的相同,也可以是统计意义上的相似。事实上,前者凤毛麟角,后者不可胜数;④相似性有层次、级别(即使用生成元的次数或放大倍数)上的差异。级别最高的是整体,级别最低的称为零级生成元。级别愈接近,则愈相似。级别相差愈大,相似性愈差,有时甚至根本不相似,这就涉及所谓的标度(scaling)区间或标度不变性范围。一旦逾越标度区间,自相似性就不复存在,因此也就谈不上分形了。关于标度区间和标度概念,在后面将专门论述。

3. 分形的类型

根据前面对于分形的定义,不难看出,在自然界,社会和思维中都存在着分形现象,为了研究的方便,需要对分形进行分类。但是,现在看来,严格准确的分类,似乎还为时过早。下面将分形分成四大类,仅是一种初步尝试。其实它们之间并无绝对界限,而是相互联系和相互渗透的。

(1) 自然分形

凡是自然界客观存在的或经过抽象而得到的具有自相似性的几何对象,称为自然分形。它包括的内容极其丰富,涉及的领域

也极为广泛。从数理化、天地生到医工农，都存在自然分形。由此还可分出几何分形、功能分形、信息分形和能量分形等。

在形态和结构上存在着自相似性的几何对象，称为几何分形。如线状分形（科契曲线、高分子链等）、表面分形（二维谢尔宾斯基地毯、催化剂表面等）、体积分形（谢尔宾斯基海绵、凝胶等），其中包括有规分形和无规分形。

在功能、信息上存在着自相似性的几何对象，分别称为功能分形和信息分形。这二类涉及的内容也非常宽广，从植物细胞的全能性到城市结构的分布，都属于此范畴。特别值得指出的是生物分形和病理分形。一个胡萝卜的根细胞可以培养成一株完整的胡萝卜，人类的一个受精卵可以在母体中发育成一个人，都是人们熟知的事实。从信息上看，细胞是一个分形体，它包含着整体的全部信息。又如，中医的穴位群，从功能和信息上讲，是一个人体的缩影。

在能量传播上存在着自相似性的体系，称为能量分形。这种分形主要表现在地震中的地震波的传播和无线电通讯中。

以上几种分形，在后面的具体实例中要进行仔细的讨论。

在自然分形中，现在谈论比较多的还有递归分形（recurrent fractal）、自仿射分形（self-affine fractal）、多重分形（multifractal）、“胖”分形、自反演分形等新概念，它们表征了自然界中一些不规则的非线性特征，有很强的生命力和广泛的应用价值，甚至比前述简单的分形更为重要。因超出本书范围，故不拟介绍。

（2）时间分形

在时间轴上具有自相似性的研究对象，称为时间分形。有人也称它为“过程分形”、一维时间分形或“重演分形”。