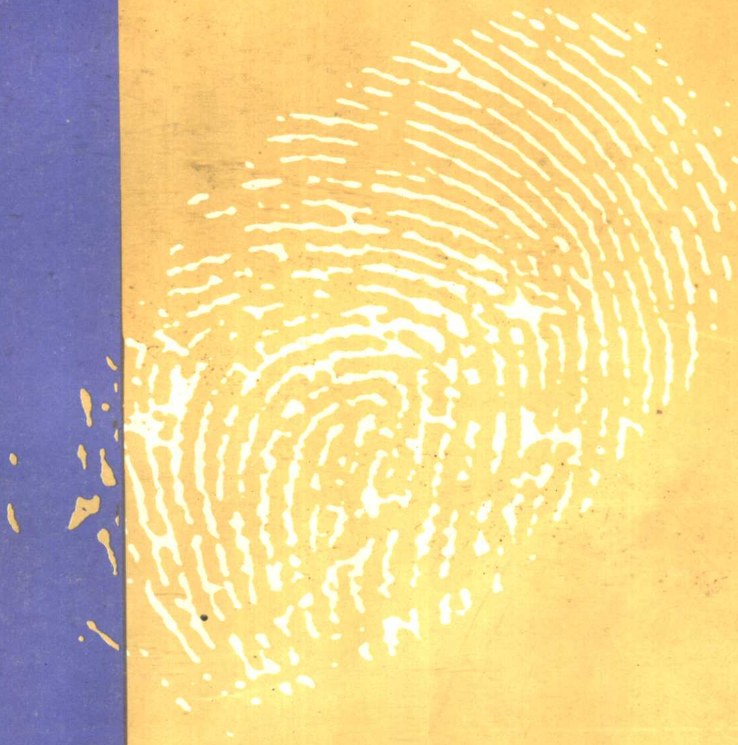
匡继昌 编著

实分析引论

SHIFENXI YINLUN



湖南教育出版社

实分析引论

匡继昌　编著

责任编辑：胡　坚

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

850×1168 毫米　32 开　印张：5.875　字数：155000

1996 年 12 月第 1 版　1996 年 12 月第 1 次印刷

ISBN7—5355—2441—9/G·2436

定价：4.80 元

本书若有印刷、装订错误，可向承印厂调换

序　　言

多年来我先后在四所大学从事数学教学和科研工作，在与同事们和研究生们广泛接触的过程中，获得的一个总的印象是，凡是在经典分析、泛函分析、概率理论、微分方程及计算数学诸分支领域能胜任且愉快地进行教学和科研工作的，几乎无例外地都具有坚实的“实分析”（又名“实变函数论”）基础. 我也曾不止一次地讲授过实变函数论课程，发现大多数学生们学习这门课程的成绩高低，往往反映出他们的数学思维能力素质的高低.

后来读了一点数学史，才理解上述现象是很自然的. 事实上，实分析的大部分理论模式及其构造方法是在微积分发明200年后，通过人们不断对数学基础问题的反思，才逐步发展成型的. 实分析自然是一门极精致的数学，具有很高的抽象度，所以按照现代认知心理学和知识建构的规律来看，初学者需要不断提升自己的抽象思维素质，才能将实分析的理论模式在头脑中完成相应的“建构过程”. 这样说来，初学者即使感到实分析中的概念和理论不易很快领悟或精通，也就不足为怪了.

本世纪50至60年代，国内曾广泛采用俄罗斯数学家纳汤松的《实变函数论》作教材，我也用过这教材，认为它的习题编选得很好，颇能培育人的分析解题能力. 只可惜教材分量太重，要占用学生的时间精力也太多. 70年代以来，国内各地已出版了多种属于实分析范围的教本，大多数比较精简扼要，能符合实际教学需要.

最近我见到了湖南师大匡继昌教授的《实分析引论》，感到它以很小的篇幅居然讲述了实变函数论中所有基本重要的题材，确实是一大特色.《引论》之所以具有这一特色的原因是，它自始至终采用了现代数学著作中经常使用的“半形式主义”的表述法. 这种表述法，使得数学论述及推理，表现得简洁、明晰而严谨，而又不致于像“纯形式主义表述法”(如同数理逻辑中的纯符号形式表示法)那样会令初学者感到索然无味或者望而生畏.

当然，《引论》之所以能做到篇幅小而内容多，也和作者运用了数学方法论中的“RMI原则”（关系映射反演原则）有关，因为这一方法原则的使用能使得传统的题材内容得到化繁为简、化难为易的处理.

《引论》各章都包含有一些精选的例题和习题，大多数例题都富于启发性. 这对学生们特别是自学者无疑是极有帮助的.

《引论》的另一特色是，它还介绍了国内外的一些新成果. 例如，第六章“微分论”中，给出了Hardy-Littlewood球形极大函数的概念及其基本性质，还提到了高维球域上的Lebesgue微分定理不能扩充到任意域上的情形等问题，这些都是十分引人入胜的题材.

现代国外数学教育工作者已经提出了“让学生们学会数学地思维”作为教育目标的主张. 我是很赞成这种见解的，并认为一本好的实分析教材应该有助于学生去学会“数学地思维”，我相信并祝愿这本《实分析引论》简明教材将对学生们学到“数学地思维”的能力和习惯起到一份积极作用.

徐利治

1996-04-05

大连大连理工大学

数学科学研究所名誉所长

博士生导师、“数学研究与评论”主编

前　言

“实分析”（又名“实变函数论”、“测度与积分”）是数学专业重要的基础课，也是理工科专业应用数学的重要基础，又历来是学生感到难学的一门课程. 徐利治教授在“序言”中对此作了精辟的分析.

数学，特别是现代数学，是一门需要深入理解的学问. 多年的教学实践表明，初学者往往难于理解实分析中基本概念与基本方法的实质. 按传统方法将（L）测度与积分的讨论仅限于一维欧氏空间 R^1，并不能收到化难为易的效果，而且由于 R^1 的特殊的几何结构，无法充分揭示一维与多维，R^n 与一般集合上相应概念的区别与联系，在应用方面也大受限制. 为了适应教学改革的新形势，我们在使用与消化国内出版的多种不同风格的优秀教材的基础上，着手自编教材，我们力求运用RMI方法原则，并吸收国内外最新的研究成果，以“模式”的概念为核心来组织教学，对传统内容作了现代化的处理. 我们从学生所熟悉的微积分基本概念出发，在集合论基础上加以改造，从 R^n 逐步过渡到在一般集合上来建立(L)测度与积分理论. 于是通过对形成实分析基本概念的认识过程的分析，引导学生充分理解和运用集合分析方法，使之既提高水平又易教易学，富有启发性，使读者用较少的时间就能掌握实分析中最有用的核心内容及方法技巧. 我们在不同层次的学生（本科生、硕士研究生等）的教学中都收到良好的教学效果. 本书就是在作者多年讲授“实分析”课程的讲稿基础上写成的.

本书在取材方面尽量照顾了不同读者的需要，在内容的编排方面，也作了许多新的尝试. 例如，习题没有按惯例放在章或节之后，而是穿插在正文之中，这是因为许多习题本来就是基本理论的组成部分. 我们这样做，不仅可以帮助读者掌握基本理论的系统性和完整性，还有助于从上下文得到解决问题的启示. 因此，适用面广，可作大学数学专业“实变函数论”教材，或工科硕士研究生的教材及教学参考书. 为了充分顾及工程技术人员、

中学数学教师进修提高的需要，可作为函授教材或自学用书.

本书初稿完成后，曾以讲义形式作为我校数学系“实变函数论”课程的试用教材. 数学系教师在使用本讲义的过程中提出了宝贵意见，在此表示感谢，同时还感谢学校对教学改革的大力支持，感谢湖南教育出版社为出版本书所作的努力.

作者衷心感谢著名数学家徐利治教授多年的指导. 徐先生除了在计算数学、逼近论、组合数学等众多领域硕果累累外，还以极大的热情培养年轻的一代，并卓有成效地倡导数学方法论的研究，倡导用数学方法论指导数学教育的改革. 徐先生在百忙中为本书所作的“序言”，无疑是对作者极大的鼓励和鞭策.

信息时代被称为“数学化的时代”. 广大读者迫切需要的是一条通向现代数学的有价值信息的简易道路. 教学改革任重而道远. 本书只是一种新的尝试，恳请读者赐教.

匡继昌

1996 年 5 月于湖南师范大学数学系

邮编：410081

目　录

第一章
预备知识

所谓现代数学的高度抽象性，其实质就是走出数集的范围，在一般的集合中去研究数学问题. 而“实分析”（“实变函数论”或“测度与积分”）则是用集合分析方法研究函数的分析性质（连续性、可微性、可积性等）的数学分支，因而是现代数学的重要基础. 本章将概述建立测度与积分所必需的集合论基础知识.

§1 集合的运算

通过集合间的各种运算，对集合进行分解与合成，是产生新集合的有效手段，也是实分析方法的基础.

一、集合的代数运算

1. 并交运算：集 A，B 的并、交分别定义为：

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

它们可推广为：

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \exists\ \alpha \in I, \text{使 } x \in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \forall\ \alpha \in I, \text{使 } x \in A_\alpha\}$$

式中“$\exists$”表示“存在”，“$\forall$”表示“所有”，I 称为指标集，特别

当 $I=N$（自然数集）时，它们可分别记为：$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$，$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$.

从定义易证并、交运算的下述性质：

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

$\bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha \cup B_\alpha) = (\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha) \cup (\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)$,

$\bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha \cap B_\alpha) = (\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha) \cap (\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha)$,

(3) 分配律：$A \cap (\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I}(A \cap B_\alpha)$;

$A \cup (\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I}(A \cup B_\alpha)$.

特别，若 $A \subset \bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$，则 $A = \bigcup_{\alpha\in I}(A \cap B_\alpha)$.

(4) 幂等律：$A \cup A = A, A \cap A = A$,

(5) 吸收律：$A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$.

2. 差、补运算：集 B 与 A 的差集定义为：

$$B - A = \{x : x \in B \text{ 且 } x \overline{\in} A\}$$

特别，当 $A \subset B$ 时，$B-A$ 称为 A 关于 B 的余集（或补集）. 当 $B=X$（基本集）时，$X-A$ 记为 A^c，即 $A^c = \{x \in X : x \overline{\in} A\}$.

A 与 B 的对称差定义为：

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

它表示 $A \cup B$ 中除去公共元素 $A \cap B$ 以外的部分.

从定义易证下述性质：

(1) $A \subset B \Longleftrightarrow A^c \supset B^c$;

$A \cap B = \varnothing \Longleftrightarrow A \subset B^c$.

(2) $A - B = A \cap B^c$ $\quad$ (1.1)

(3) $X = A \cup A^c$, $A \cap A^c = \varnothing$, $(A^c)^c = A$.

(4) 并交对偶公式（De Morgan 法则）：

$$B - (\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I}(B - A_\alpha) \tag{1.2}$$

$$B - (\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I}(B - A_\alpha) \tag{1.3}$$

特别，当 $B=X$ 时，

$$(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c,\ (\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c \tag{1.4}$$

我们以证(1.2)为例：$\forall\ x\in B-\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\Longleftrightarrow x\in B$ 且 $x\overline{\in}\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ $\Longleftrightarrow x\in B$ 且 $x\overline{\in}A_\alpha(\forall\ \alpha\in I)\Longleftrightarrow x\in B-A_\alpha\ (\forall\ \alpha\in I)\Longleftrightarrow$ $x\in\bigcap_{\alpha\in I}(B-A_\alpha)$.

(5) $A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$.

$A\Delta B=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)=(A\cup B)-(A\cap B)$.

差补运算的其它性质可利用(1.1)式将 $A-B$ 转化为 A 与 B^c 的交运算推出.

习 题

1. 证明

(1) $A\cup B=(A-B)\cup B$.

(2) $A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$.

(3) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$;

$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$.

2. 证明：

(1) $$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha-\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\subset\bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha-B_\alpha). \tag{1.5}$$

(2) 若 $B_k\subset A_k$ 且 $A_j\cap A_k=\varnothing(j\neq k)$，则

$$\bigcup_{k=1}^\infty A_k-\bigcup_{k=1}^\infty B_k=\bigcup_{k=1}^\infty(A_k-B_k). \tag{1.6}$$

3. 直积运算：A 与 B 的直积（或卡氏积）定义为：

$$A\times B=\{(x,y):x\in A,y\in B\},$$

$$\prod_{k=1}^\infty A_k=\{(x_1,\cdots,x_k,\cdots):x_k\in A_k\} \tag{1.7}$$

$$\prod_{\alpha\in I}A_\alpha=\{\{x_\alpha\}:\forall\ \alpha\in I,x_\alpha\in A_\alpha\} \tag{1.8}$$

注意直积一般不满足交换律. 因为若 $A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$，则 $A\times B=B\times A\Longleftrightarrow A=B$.

直积运算有以下性质：

(1) $(\bigcup_\alpha A_\alpha)\times(\bigcup_\beta B_\beta)=\bigcup_{\alpha,\beta}(A_\alpha\times B_\beta)$,

(2) $(\bigcap_\alpha A_\alpha)\times(\bigcap_\beta B_\beta)=\bigcap_{\alpha,\beta}(A_\alpha\times B_\beta)$,

(3) $(\prod_\alpha A_\alpha)\cap(\prod_\alpha B_\alpha)=\prod_\alpha(A_\alpha\cap B_\alpha)$,

$(\prod_\alpha A_\alpha)\cup(\prod_\alpha B_\alpha)\subset\prod_\alpha(A_\alpha\cup B_\alpha)$.

4. **幂运算**：集 X 的所有子集为元素构成的集族，称为 X 的幂集，记为 $P(X)=\{A:A\subset X\}$.

幂集具有性质：

(1) $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$.

(2) $P(A)\cup P(B)\subset P(A\cup B)$.

二、集合的极限运算

我们从微积分中熟知，单调数列有极限，若 $\{x_k\}$ 递增，则 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\sup\limits_k\{x_k\}$；若 $\{x_k\}$ 递减，则 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\inf\limits_k\{x_k\}$. 而一般数列 $\{x_k\}$ 可通过由它产生的单调数列：$y_k=\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}$（递减）和 $z_k=\inf\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}$（递增）定义 $\{x_k\}$ 的上、下极限：

$$\limsup_{k\to\infty}x_k=\lim_{k\to\infty}y_k=\inf_{k\geqslant1}\{\sup_{n\geqslant k}x_n\}\tag{1.9}$$

$$\liminf_{k\to\infty}x_k=\lim_{k\to\infty}z_k=\sup_{k\geqslant1}\{\inf_{n\geqslant k}x_n\}\tag{1.10}$$

这种思想用到集列 $\{A_k\}$ 上，若 $\{A_k\}$ 为递增集列，即 $A_k\subset A_{k+1}$ $(\forall\, k)$，则称 $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$ 为 $\{A_k\}$ 的极限集，记为

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^\infty A_k\tag{1.11}$$

若 $\{A_k\}$ 为递减集列，即 $A_k\supset A_{k+1}(\forall\, k)$，则

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\bigcap_{k=1}^\infty A_k\tag{1.12}$$

对任意集列 $\{A_k\}$，令 $B_k=\bigcup_{n=k}^\infty A_n$，$E_k=\bigcap_{n=k}^\infty A_n$，则 $\{B_k\}$ 递减，$\{E_k\}$ 递增，从而定义

$$\limsup_{n\to\infty}A_n=\lim_{k\to\infty}B_k=\bigcap_{k=1}^\infty B_k=\bigcap_{k=1}^\infty(\bigcup_{n=k}^\infty A_n)\tag{1.13}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\right) \qquad (1.14)$$

若$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

极限运算的性质：

(1) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \{x: \forall k, \exists n \geqslant k, 使 x \in A_n\}$ (1.15)

$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \{x: \exists k, 使 \forall n \geqslant k, x \in A_n\}$ (1.16)

证　先证 (1.16)，令 $E = \{x: \exists k, 使 \forall n \geqslant k, x \in A_n\}$, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n)$. $\forall x \in A \Longleftrightarrow \exists k_0, x \in \bigcap_{n=k_0}^{\infty} A_n \Longleftrightarrow \forall n \geqslant k_0, x \in A_n$, 即 $x \in E$. 所以, $A = E$. 而(1.15) 等价于 $A^c = E^c$.

(2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (1.17)

(读者自证)

(3) $B - \limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty}(B - A_n)$

$B - \liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty}(B - A_n)$(读者自证)

特别，当 $B=X$（基本集），得到

$$(\liminf_{n\to\infty} A_n)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c \qquad (1.18)$$

$$(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c \qquad (1.19)$$

三、常用的集族

根据对集的不同运算的封闭性，将集族分为不同的类：

定义 1.1　设 Σ 是基本集 X 的子集构成的集族，并满足以下三个条件：

(1) $\varnothing \in \Sigma$.

(2) 若 $A, B \in \Sigma$，则 $A \cap B \in \Sigma$.

(3) 若 $A, B \in \Sigma$, 且 $A \subset B$, 则 $B - A = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$，式中所有 $E_k \in \Sigma$, 且 $E_k \cap E_j = \varnothing (j \neq k)$, 则称 Σ 为 X 上的半环.

从定义 1.1 可知，半环中任两个元素 B，A 之差必能表为Σ中有限个互不相交集的并.

定义 1.2 设 Σ 为 X 上半环，且满足：若 A，$B\in\Sigma$，则 $A\cup B\in\Sigma$，则称 Σ 为 X 上的环.

由定义 1.2 可知，环是对并、差运算封闭的集族. 因为 $A\cap B=A-(A-B)$. 所以当 Σ 为环时，$A\cap B\in\Sigma$，即对交运算也封闭. 设 Σ 为 X 上的环，且 $X\in\Sigma$，则称 Σ 为 X 上的代数. 于是，代数对求补运算封闭，从而对集的代数运算封闭，但对集的极限运算不一定封闭.

定义 1.3 设 Σ 是 X 上的环，并满足：$\forall\ A_k\in\Sigma\Longrightarrow\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\Sigma$. 则称 Σ 是 X 上的 σ 环. 因为 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=A_1-\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1-A_n)$，当 Σ 为 σ 环时，$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\Sigma$，所以，$\sigma$ 环对集的代数运算和极限运算都封闭.

定义 1.4 设 Σ 是 X 上的 σ 环，且 $X\in\Sigma$，则称 Σ 是 X 上的 σ 代数.

例 1.1 R^n 中全体半开区间$[a,b)=\{x=(x_1,\cdots,x_n):a_k\leqslant x_k<b_k,1\leqslant k\leqslant n\}$构成半环；无穷集 X 中一切有限子集组成的集族构成环；有限集 X 的幂集 $P(X)$为代数；无穷集 X 的幂集 $P(X)$为 σ 代数.

§2 集合的基数

一、基数的概念

为了比较两个集合所含元素的多少，Cantor 用对等（一一对应）的办法来对集合进行分类．将彼此对等的集归为同一类，用基数来表示它们共同的数量特征．

设映射 $f: X \to Y$，$A \subset X$，$B \subset Y$，

$$x \longmapsto y = f(x),$$

$f(A) = \{f(x): x \in A\}$ 称为 A 在 f 下的象集，$f^{-1}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\}$ 称为 B 在 f 下的原象集．若对 $\forall\ x_1, x_2 \in A$，$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 是 A 到 B 的单射，若 $f(A) = B$，则称 f 是 A 到 B 的满射．

设集 A，B 之间存在满单射（又称双射，或一一映射），则称 A 与 B 对等，记为 $A \sim B$.

若 $A \sim B$，则称 A 与 B 有相同的基数（或势），A 的基数记为 $|A|$(或 $\overline{\overline{A}}$).

设 $B = \{1, 2, \cdots, n\}$，$A \sim B$，则规定 $|A| = n$，$|\varnothing| = 0$，即有限集的基数是该集合中元素的个数，自然数集 N 的基数 $|N|$ 称为可数基数，记为 $|N| = a$，实数集 R^1 的基数 $|R^1|$ 称为连续统基数，记为 $|R^1| = c$.

我们自然要问：在不对等的集 A，B 之间，如何比较它们相应基数 $|A|$ 与 $|B|$ 的大小？有没有比 c 更大的基数？

若存在 $B_0 \subset B$，使 $B_0 \sim A$，则称 $|A| \leqslant |B|$，特别，若 $A \subset B$，则 $|A| \leqslant |B|$. 若 $|A| \leqslant |B|$，且 B 不能与 A 的任何子集对等，则称 $|A|$

$<|B|$. 注意当 A，B 都是无限集时，即使 A 是 B 的真子集，也未必有 $|A|<|B|$. 例如，偶数集 A 是自然数集 N 的真子集，但它们之间存在满单射 φ: $N \to A$，$n \longmapsto 2n$，所以 $|A|=|N|$.

抽屉原理是说，若把 $n+1$ 本书放进 n 个抽屉里，至少有一个抽屉里有两本或两本以上的书. 它的实质就是任何有限集都不能与它的真子集对等. 而无限集却可以和它的某一真子集对等，这是无限集与有限集的本质区别.

在集合论中，基数的比较有以下基本结果.

定理 2.1 若 $|A| \leqslant |B|$，且 $|B| \leqslant |A|$，则 $|A|=|B|$，(Cantor-Bernstein 定理，即基数比较定理).

推论 2.2 若 $E \subset B \subset A$ 且 $|E|=|A|$，则 $|B|=|A|$.

令 $2^A=\{\varphi: \varphi: A \to \{0, 1\}\}$，即 A 的所有子集 E 的特征函数 φ_E 所构成的集合，其中

$$\varphi_E(x)=\begin{cases}1, x \in E \\ 0, x \in A-E.\end{cases}$$

定理 2.3 $|P(A)|=2^{|A|}$.

证 对 $\forall E \subset A$，存在满单射 f: $2^A \to P(A)$

$$\varphi_E \longmapsto E.$$

由定理 2.3，在考虑幂集 $P(A)$ 的基数时，常常用 2^A 的基数 $2^{|A|}$ 去代替它.

推论 2.4 实数集的幂集的基数为 2^c. (2^c 称为超连续统基数)

定理 2.5 对任何非空集 A，$|P(A)|>|A|$.