地球物理勘探專业用

特殊函数

苏联 А·И· 薩波洛夫斯基著

石油工业出版社

地球物理勘探專业用

特殊函数

苏联 A·И·薩波洛夫斯基著

魏执权 傅定文 李經熙 蔡倩倩 胡恩植譯

石油工业出版社

內容提要

本書專門討論地球物理勘探專业用的特殊函数。

全書共分7章，对Γ函数、B函数、貝塞尔函数、勒讓德多項式及拉米函数，都作了精簡扼要的論述。在講完每種函数之后，有專章論述如何应用这種函数来解决实用地球物理勘探以及与它有密切关系的一些重要問題。所以它是一本数学理論与生产实踐相結合的書，因而是一本地球物理勘探專业及地球物理勘探工作者的很好的参考書，它也可以作为从事地球物理工作者的参考書。

这本書並不涉及很深的理論，在学习了高等数学之后再念这本書，並不会有什么困难。

А.И.ЗАБОРОВСКИЙ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

ДЛЯ ГЕОФИЗИКОВ-РАЗВЕДЧИКОВ

根据苏联国立科技联合出版社（ГОНТИ）

1939年列宁格勒版翻譯

統一書号：15037·295

地球物理勘探專业用

特 殊 函 数

魏执权 傅定文 李經熙 蔡禱禱 胡恩植譯

石油工业出版社出版（社址：北京六舖炕石油工業部內）

北京市書刊出版業營業許可証出字第068號

石油工业出版社印刷厂印刷 新华書店发行

850×1168 1/32开本＊印張7 7/8＊207千字＊印1,301--1,900册

1957年9月北京第1版第1次印刷

1958年7月北京第1版第2次印刷

定价(11)2.00元

序　言

地球物理观測結果解釋的理論問題，随着用地球物理方法研究地壳的要求的增長而复杂化了。一方面，如果說早年的地球物理勘探法仅能滿足于作出定性的指示，那么目前在大部分情形下就要求从这些方法里得出定量的結論。另一方面，这种勘探方法应用領域的不断扩大給学者們提出許多日新月異的問題，要求他們善于理解日益复杂的情况。在許多情况下，为了正确地了解物探工作者所研究的那些現象，为了正确地佈置野外观測，必須預先估計所要研究現象的性質，那怕是一个輪廓也好，以便在进行工作时集中注意力于現象的主要环节上。所有这些复杂的問題，都是地球物理勘探学中專为論証和分析勘探方法及解釋理論的各章节的研究对象。

从以上所述就提出了这样的問題，就是必須解决应用地球物理的許多所謂正問題：确定某种物理現象在一定条件下的一些特点。在物理学中所得到的这类問題的解，远不是都能加以利用的，因为在应用地球物理学里必須牽涉到三維的介質，而这在物理学里研究得比較少。在数学上，这类問題的决定，在于解微分方程，常常是橢圓类型的，即拉普拉斯方程。在有軸对称的情况下，在柱坐标系或球坐标系里来寻求这个方程的解比較方便。为此，必須知道柱函数及球函数的一些基本性質，本書就要叙述这些函数的一些基本理論。

这本書是根据我在莫斯科奥尔忠尼啓則地質勘探学院給物探系学生講磁法勘探和电法勘探的解釋理論課时所用的講义写的。在講貝塞尔函数之前，講了一些Γ函数。最后的部分簡單地叙述了一下拉米函数的橢球理論，因为这些理論对于研究由極化或磁化了的橢球所产生的場是很有用的。在講述了特殊函数理論以后，随之有一章專門講这些函数在解实用地球物理及与其有密切

关系的問題上的应用。

貝塞尔函数理論，仅研究整阶貝塞尔函数問題，这是因为只有这一类柱函数应用于实用地球物理上。我們把函数 $Y(x)$ 的內容大加縮減就是从实用这方面考虑的。也正是实际的要求，我們在球函数一章里叙述勒讓德多項式理論比双变量球函数理論要詳尽一些。当然，对于实用地球物理目前还不甚重要的一些問題完全不講是不可能的，由此可見，書中所講的特殊函数理論已經精簡到了不可再少的地步了。

拉米函数理論的叙述，是編著本書时最复杂的問題。因为关于正交坐标的一般問題，在各地質勘探院校的数学課里是很少講到的，所以必須講一講对于有些实質上是純数学問題，例如拉普拉斯算子在正交曲綫坐标系里的变换，以及这些变换在个别場合的应用，并且必須导出橢球坐标系里的拉普拉斯方程等等。根据同样理由，关于橢球坐标本身，也要求作一些解釋，因为这种坐标系在数学課程的教学大綱里是沒有的。

在叙述橢球函数理論时，只涉及到拉米方程的积分，而未講关于旋轉橢球及橢圓柱体这些积分的特殊形式，虽然这类函数已开始用到。讀者中如对于橢球函数理論的叙述願意知道得更詳尽和更完备一些的話，可以閱讀后面文献所介紹的專門著作。

莫斯科　1937

目　录

第一章 Γ函数的基本理論

§1. 尤拉积分

下面的积分是第一类型尤拉积分:

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \tag{1}$$

它所确定的函数，叫做 p，q 的 B 函数。

第二类型尤拉积分:

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx, \tag{2}$$

叫做 p 的 Γ 函数。

在实数 p，q 滿足不等式:

$$p>0 \text{ 及 } q>0.$$

的条件下，这兩个积分恆有有限数値。

其次，我們可以看到，在积分(1)里，如果 $p<0$, $q<0$，則

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-p}(1-x)^{1-q}},$$

在这里，被积分式在积分上限也正如在积分下限一样，都变成了阶数大于1的無穷大量。

同样地，在积分(2)里，如果 $p<0$，我們有:

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{1-p}}dx.$$

这使我們很容易看出，在积分下限处，被积分式变成阶数大于1的無穷大量。

尤 拉 定 理

函数 $\mathrm{B}(p,q)$ 及 $\Gamma(p)$，$\Gamma(q)$ 間恆有下列关系：

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

我們將用卜阿桑提出的公式来証明这一关系。在(2)式里，命

$$x=at,$$

把(2)改写成下列形式：

$$\frac{\Gamma(p)}{a^p}=\int_0^\infty e^{-at}t^{p-1}dt.$$

使 a 取值 $1+x$，并用参数 $p+q$ 代換参数 p，于是我們有

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+x)^{p+q}}=\int_0^\infty e^{-(1+x)t}t^{p+q-1}dt,$$

因此，

$$\frac{1}{(1+x)^{p+q}}=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty e^{-(1+x)t}t^{p+q-1}dt.$$

在最后这个等式兩边同乘以 $x^{p-1}dx$，并对变量 x 从 0 到 ∞ 取积分，我們有：

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty e^{-(1+x)t}t^{p+q-1}dt. \qquad (3)$$

在等式(3)的左边，用表达式

$$x=\frac{y}{1-y}$$

代換变量 x，并將 dx 变換为$\frac{1-y+y}{(1-y)^2}dy$，于是(3)的左边就化为：

$$\int_0^1 \frac{y^{p-1}}{(1-y)^{p-1}}(1-y)^{p+q}\frac{dy}{(1-y)^2}=\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}dy,$$

这就是函数 $\mathrm{B}(p,q)$。

这样一来，等式(3)就可改写为：

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty x^{p-1}dx\int_0^\infty e^{-(1+x)t}t^{p+q-1}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty e^{-t}t^{p+q-1}dt\int_0^\infty e^{-xt}x^{p-1}dx,$$

因为

$$\int_0^\infty e^{-xt}x^{p-1}dx=\frac{\Gamma(p)}{t^p},$$

那么，最后等式即化为：

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty \frac{e^{-t}t^{p+q-1}dt}{t^p}=\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty e^{-t}t^{q-1}dt=$$

$$=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

由于尤拉定理將 Γ 函数和 B 函数联系起来了，所以我們在研究尤拉积分的性質的时候，只須研究这兩种函数中任何一类函数的性質就够了。对我們来說 Γ 函数似具有更大的意义，因此，我們現在專来研究它的基本性質。

§ 2. Γ 函数的基本性質

性質1. $\qquad \Gamma(p+1)=p\Gamma(p).$

根据 Γ 函数的定义，我們有：

$$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^p dx.$$

对它分部积分，便得:

$$\Gamma(p+1)=(-x^p e^{-x})_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx.$$

不难驗証

$$(-x^p e^{-x})_0^\infty=0,$$

所以

$$\Gamma(p+1)=p\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$$

再利用 Γ 函数的定义，立得:

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p).$$

从这个公式出發，我們可以进一步导出联系函数 $\Gamma(p)$与$\Gamma(p+m)$的公式。事实上，我們把上面所已証明的性質重复应用 m 次，即得:

$$\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1)$$
$$\Gamma(p-1)=(p-2)\Gamma(p-2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot$$
$$\Gamma(p-m+1)=(p-m)\Gamma(p-m).$$

將这些等式逐項相乘，便得:

$$\Gamma(p)\Gamma(p-1)\cdots\cdots\Gamma(p-m+1)=(p-1)(p-2)\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots(p-m)\Gamma(p-1)\Gamma(p-2)\cdots\cdots\Gamma(p-m+1)\Gamma(p-m)$$

兩边消去公因子，即得:

$$\Gamma(p)=(p-1)(p-2)\cdots\cdots(p-m)\Gamma(p-m).$$

利用这个公式，我們可以把宗量大于 1 的 Γ 函数的計算归納为宗量小于 1 的 Γ 函数的計算。

如果 p 是整数，那么，Γ 函数即被表为小于 p 的自然数列的連乘积。事实上，如果 p 是整数，那就必可达到使 $p-m=1$ 这样的自然数 m，而在这个情形下，由于:

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=(e^{-x})_0^\infty=1$$

于是

$$\Gamma(p)=(p-1)(p-2)\cdots\cdots2\cdot1=(p-1)!$$

利用公式$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$，我們还可將Γ函数表达式的定义域扩充到不含負整数的負数域上去。如果$-1<p<0$，那么，所謂負宗量p的Γ函数，我們定义为：

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}. \tag{4}$$

在这个式子里，$p+1$是正数，因此，比值$\dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$具有完全确定的意义。

对于宗量是絕对值大于1的負数p的Γ函数，我們是用下面这个表达式来定义的。

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+m)}{p(p+1)\cdots\cdots(p+m-1)}, \tag{5}$$

这里的$m>-p$。

对于宗量是零或是負整数的Γ函数，沒有意义，这时，它变为無穷大量。在这里，我們根据公式(4)或(5)来計算$\Gamma(0)$，$\Gamma(-1)$，$\Gamma(-2)$，……的值，也充分說明了这种狀态。

公式(4)給出：

$$\Gamma(0)=\frac{\Gamma(1)}{0}=\infty$$

$$\Gamma(-1)=\frac{\Gamma(0)}{-1}=\infty$$

$$\Gamma(-2)=\frac{\Gamma(-1)}{-2}=\infty\text{等等}$$

性質2. 函数$\Gamma(p)$的表达式可以表为乘积的形式。

我們取函数

$$f(n,p)=\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{p-1}dx. \tag{6}$$

把等式的右边分部积分，便得：

$$f(n,p)=\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\frac{x^p}{p}\right]_0^n+\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\frac{x^p}{p}dx.$$

等式右边方括号里的項，当取积分上限及下限时，它都为零，因此，

$$f(n,p)=\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\frac{x^p}{p}dx.$$

重复施用这种方法，我們得：

$$f(n,p)=\int_0^n\frac{n-1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-2}\frac{x^{p+1}}{p(p+1)}dx=$$

$$=\int_0^n\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-3}\frac{x^{p+2}}{p(p+1)(p+2)}dx=$$

$$=\cdots\cdots=\int_0^n\frac{(n-1)(n-2)\cdots\cdots2\cdot1}{n^{n-1}}\frac{x^{p+n-1}\,dx}{p(p+1)\cdots\cdots(p+n-1)}=$$

$$=\frac{1\cdot2\cdots\cdots(n-2)(n-1)n^{p+n}}{n^{n-1}p(p+1)\cdots\cdots(p+n-1)(p+n)}=\frac{n!n^p}{p(p+1)\cdots\cdots(p+n)}.$$

当 n 增大到∞时，則等式(6)的右边就变为

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}f(n,p)=\Gamma(p).$$

因此得到函数 $\Gamma(p)$ 的新的表达式，它是以乘积的極限的形式写出的，

$$\Gamma(p)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^p}{p(p+1)\cdots\cdots(p+n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{p\left(1+\frac{p}{1}\right)\left(1+\frac{p}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{p}{n}\right)}.$$

当 p 是整数时，那么，

$$\Gamma(p)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(p-1)!\,n^p}{(p+n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(p-1)!}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{p}{n}\right)},$$

这就和以前所得的結果完全相符

$$\Gamma(p)=(p-1)!,$$

因为当 $n=\infty$ 时，最后表达式里的分母的極限是 1 。

性質3. 当 p 适合不等式 $0<p<1$ 时，

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

我們利用 Γ 函数表达式的乘积極限形式：

$$\Gamma(p)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{p\left(1+\frac{p}{1}\right)\left(1+\frac{p}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{p}{n}\right)}$$

$$\Gamma(1-p)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}}{(1-p)\left(1+\frac{1-p}{1}\right)\left(1+\frac{1-p}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1-p}{n}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-p}1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot n}{(1-p)(2-p)\cdots(n+1-p)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-p}}{\left(1-\frac{p}{1}\right)\left(1-\frac{p}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{p}{n}\right)}\cdot\frac{n}{\left(n+1-p\right)}.$$

来証明这个命題。

將最后兩个等式的兩边分別相乘，我們得到

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p\left(1-\frac{p^2}{1}\right)\left(1-\frac{p^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right)}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1-p}{n}\right)}=\frac{1}{p\left(1-\frac{p^2}{1}\right)\left(1-\frac{p^2}{2^2}\right)\cdots}.$$

將这个公式与 $\sin x$ 的無穷乘积的表达式

$$\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots$$

加以比較，不难証得：

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

性質4. 关系式 $\frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)}$ 可以表为：

$$\frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)}=\lim_{n\to\infty}\left(\ln n-\frac{1}{1+p}-\frac{1}{2+p}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3+p}-\cdots-\frac{1}{n+p}\right).$$

事实上，由于 Γ 函数的乘积形式：

$$\Gamma(p)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^p}{p(p+1)\cdots(p+n)}$$

我們很容易得到：

$$p\Gamma(p)=\Gamma(1+p)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^p}{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}.$$

对最后这个表达式兩边取对数，我們得：

$$\ln\Gamma(1+p)=\lim_{n\to\infty}[\ln n!+p\ln n-\ln(1+p)-\cdots-\ln(n+p)];$$

再对 p 微分，即得

$$\frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)}=\lim_{n\to\infty}\left[\ln n-\frac{1}{1+p}-\cdots-\frac{1}{n+p}\right]. \qquad (7)$$

令 $p=0$，得:

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=\lim_{n\to\infty}\left[\ln n-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}\right].$$

最后这个等式右边的極限是尤拉常数，我們用 $-C$ 来表示它，这个常数等于:

$$-0.57721566\cdots$$

再回到等式(7)，我們把它改写成下面的形式:

$$\frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)}=\lim_{n\to\infty}\left[\ln n-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}-\cdots-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{p+n}\right]+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}.$$

因为在等式右边方括号内表达式的極限等于 $-C$，所以最后这个等式可以表示为下面的形式:

$$\frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)}=-C+\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m}.$$

第二章　貝塞尔函数

§1.　貝塞尔微分方程．第一类貝塞尔函数

实用地球物理中——特别是理論电法勘探方面——很大部分問題的求解問題，都被化为各种类型的貝塞尔方程的积分問題。所謂貝塞尔函数，就是指这种方程的积分。因而这类問題的解，就是用所提到的这种貝塞尔函数来表示。如果不知道貝塞尔函数的一些基本性質，那么，对这些解的意义不可能有正确的認識。正因为这样，所以我們現在要用相当多的篇幅，来闡述这种函数的理論，并举一些应用它們的例子。

貝塞尔微分方程是屬于二阶綫性微分方程；这个方程具有下列形式:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\ \frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0. \qquad (1)$$

这里的参数 n 可为任何值；除了当 n 等于整数加 $\frac{1}{2}$ 的情形外，在所有其他情况下，这个方程的解都不能用初等函数表出。在一般情形下，貝塞尔方程的积分就是要导入一类特殊函数，而对这类特殊函数性質的研究，可以从研究这类函数的級数表达式入手。我們注意到，我們要这样来研究貝塞尔方程——即导得所謂貝塞尔函数的方程——的积分，首先須寻找这个方程的积分的級数形式。

假設滿足貝塞尔方程的函数 y，具有下列形式：

$$y=x^p(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^{p+i},\ a_0\neq 0$$

如果这个函数是方程（1）的积分，那么，把它代入貝塞尔方程即得恆等式。实行这种代換，即得

$$\sum_{i=0}^{\infty}a_i(p+i)(p+i-1)x^{p+i-2}+\sum_{i=0}^{\infty}a_i(p+i)x^{p+i-2}+$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^{p+i}-n^2\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^{p+i-2}=0.$$

因为这个等式是恆等式，所以左边 x 的各次冪的系数都必須等于零。很容易看出，与参数值 $i=0$ 相对应的 $p-2$，是 x 的最低次冪。x 的这个最低次冪的系数是：

$$a_0p(p-1)+a_0p-n^2a_0.$$

因为按条件 $a_0\neq 0$，所以要这个系数为零，就必須使

$$p^2-n^2=0.$$

因此得
$$p=\pm n.$$

現在，我們先来研究 $p=+n$ 的情形。我們来考察从 $i=1$ 得来的 x 的 $(p-1)$ 次冪項，就得到这項的系数等于：

$$a_1(p+1)p+a_1(p+1)-n^2a_1=a_1[(p+1)^2-n^2].$$