河南大学出版社

陈守信　王术　主编

数学物理方程

SHUXUE WULI FANGCHENG

本书获河南大学学术著作和教材出版基金资助

数学物理方程

主　编　陈守信　王　术
副主编　宋锦萍　崔国忠

河南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/陈守信、王术主编. 一开封:河南大学出版社,2000.5
ISBN 7-81041-750-9

Ⅰ.数… Ⅱ.①陈…②王… Ⅲ.数学物理方程-高等学校-教材 Ⅳ.0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 12849 号

责任编辑:程 庆
责任校对:文 严
装帧设计:刘广祥

出版发行:河南大学出版社
河南省开封市明伦街 85 号 (475001)
0378-2865100
排版:河南大学出版社电脑照排室
印刷:中国科学院开封印刷厂
开本:850×1168 1/32
版次:2000 年 6 月第 1 版 印次:2000 年 6 月第 1 次印刷
字数:204 千字 印张:8.125
印数:0—1000 册 定价:12.00 元

前　　言

数学物理方程在自然科学和工程技术中有着广泛而重要的应用,同时又与数学的各分支有着密切的联系.目前在各高等院校的数学专业和理工科的一些专业都开设了这门课.

数学物理方程作为一门大学基础课程,它是通过对具有代表性的模型方程的深入研究来介绍偏微分方程的基本理论、解题的典型技巧以及它们的物理背景.把数学理论、解题方法和物理实际三者有机地结合起来,是本课程有别于其它课程的明显标志.正因为如此,这门课程对培养学生应用数学理论解决实际问题(即建立数学模型)的能力显得尤为重要.

初学者往往感到这门课程很难,拿到题目无从下手.造成这种状况的原因有以下几方面.一、对有关的物理背景不熟悉.数学物理方程来源于物理学,尤其是力学等自然科学.加强对有关知识的了解,会收到事半功倍之效.二、分析运算能力不强.求解一个定解问题,往往需要大量的、复杂的运算.除了要有足够的耐心外,还必须具有熟练的分析运算能力.三、归纳总结能力不够.数学物理方程内容丰富,方法多样,难以在统一框架下处理问题.这是由本学科的特点和发展现状所决定的.初学者往往感到内容多而乱,主线不突出.这就要求在学习过程中注意领会各类方程的区别和求解方法的异同.注意到以上几个方面,你就会感到这门课程并不难学,而且还是有趣的和有吸引力的.

本教材是根据一学期 80 学时的课程安排编写的,曾在 1992～1996 年级数学专业连续使用.这次正式出版,根据学生的反映和教学实践在内容上作了一些调整和补充.具体内容安排如下:第

一章介绍三大方程的导出和定解条件的提法以及方程的分类;第二章介绍双曲方程的能量积分和分离变量法;第三章介绍傅里叶变换和抛物方程的极值原理;第四章介绍椭圆方程的格林函数法、极值原理以及调和函数的性质;第五章介绍分离变量法的理论基础和特征理论;第六章介绍一些特殊函数的性质.为了方便初学者,书末附有各章习题的答案或提示.

本书在编写过程中始终得到了数学系领导的支持和鼓励.同时我们还参阅了国内外其它教材和讲义,这些教材中所包含的丰富内容和教学经验,对本书的形成帮助很大.在此我们谨向有关作者表示深切的感谢.本书在出版过程中得到了责任编辑程庆同志的大力协作,对他在编辑过程中所付出的艰辛劳动我们由衷地表示感谢.

由于编者水平有限,错误和不当之处在所难免,敬请读者和同行指教.

编者

2000 年 1 月于河南大学

目　录

第一章　数学物理方程的导出和定解条件

在这一章中，我们首先导出在二阶线性偏微分方程中具有代表性的波动方程、热传导方程、位势方程和它们的定解条件；其次给出含有两个自变量的一般二阶线性偏微分方程的分类.

§1　基本概念和定义

1.1　什么是数学物理方程

数学物理方程(简称数理方程)通常是指从物理、力学等实际问题中导出的函数方程，主要指偏微分方程. 含有两个或两个以上自变量和未知函数以及未知函数的偏导数的关系式叫做偏微分方程. 例如

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \text{(位势方程)} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(x,y,t),\quad \text{(热传导方程)} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+f(x,y,t),\quad \text{(波动方程)} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad \text{(激波方程)} \tag{1.4}$$

等都是偏微分方程.

1.2　偏微分方程的阶　线性方程　非线性方程

方程中所含偏导数的最高阶的阶数叫做偏微分方程的阶. 例如(1.1)～(1.3)都是二阶偏微分方程，(1.4)是一阶偏微分方程. 关于两个自变量的二阶偏微分方程的一般形式可写成

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}) = 0. \tag{1.5}$$

如果一个偏微分方程对于未知函数及它的各阶偏导数来说都是线性的,而且方程中的系数都仅依赖于自变量,那么这样的偏微分方程就称为线性偏微分方程.不是线性的偏微分方程统称为非线性偏微分方程.

二阶线性偏微分方程的一般形式可写成

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f, \tag{1.6}$$

其中 $a_{11},a_{12},a_{22},b_1,b_2,c,f$ 都是自变量的已知函数,而且 a_{11},a_{12},a_{22} 不同时为零.如果 f 恒为零,则称(1.6)是齐次方程;否则称为非齐次方程.

1.3 偏微分方程的解

以二阶偏微分方程为例.设(1.5)是含未知函数 $u=u(x,y)$ 的偏微分方程,$v=v(x,y)$ 是区域 Ω 上的已知函数,具有(1.5)所含的各阶偏导数.如果在(1.5)中以 v 代替 u,使得

$$F(x,y,v,v_x,v_y,v_{xx},v_{xy},v_{yy}) = 0,\ \forall\ (x,y) \in \Omega \tag{1.7}$$

则称 $v(x,y)$ 是方程(1.5)在 Ω 上的解.

例如,二阶方程

$$u_{xy} = 0 \tag{1.8}$$

的通解为 $u(x,y)=f(x)+g(y)$,其中 $f(x)$,$g(y)$ 是任意可微函数.

1.4 偏微分方程的研究方法

在偏微分方程中处理问题的一般步骤是:(1)把物理问题归结成数学上的定解问题,具体说来,就是化成偏微分方程和定解条件(包括初值条件和边界条件);(2)解定解问题,就是求满足方程和定解条件的特解;(3)对求得的解作出适当的物理解释.

在常微分方程中,我们首先是解出通解,然后根据定解条件确定出任意常数得到特解.但是对偏微分方程来说,从通解中选出满足定解条件的特解,可能和求通解一样困难,甚至比求通解还困

难，这是因为在偏微分方程的通解中含有任意函数.我们从通解中确定满足定解条件的特解，不是仅仅要确定任意常数，而是要确定这些任意函数.也就是说，偏微分方程发展到今天，还没有一个适用于一切线性偏微分方程的统一的理论.因此，我们在研究偏微分方程时，只能对具体的方程和具体的定解条件逐一讨论并设法加以解决.

§2 弦振动方程的导出和定解条件

振动现象在日常生活中是一种非常常见的现象，例如钟摆的振动、弹簧的振动、鼓面的振动、桥梁的振动、水波、声波等.因此，研究振动具有广泛的实际背景和理论意义.

下面我们以数学物理中重要而简单的弦振动为例导出一种常用的方程——波动方程.

2.1 弦振动方程的导出

考虑一根拉紧的均匀柔软的细弦，它在垂直于弦的外力作用下作微小的横振动.这里弦的均匀性是指它的线密度 ρ 是常数；柔软性是指拉紧的弦在离开平衡位置时其上每一点均不抗拒弯曲，从而弦的张力的方向必沿着弦的切线方向；横振动则指弦的运动发生在同一平面内，且弦上各点的位移与平衡位置垂直.取弦的平衡位置为 x 轴，以 $u(x,t)$ 表示弦上点 x 在时刻 t 垂直于 x 轴方向的位移.

对弦的微小横振动，可设倾斜角 α 很小，具体说来，假定

$$\sin\alpha\approx\alpha, \tag{2.1}$$

$$\cos\alpha\approx 1, \tag{2.2}$$

$$\mathrm{tg}\alpha\approx\alpha. \tag{2.3}$$

在这种假定之下，有：

(1) 弦的伸长可忽略不计

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (du)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2},$$

$$= dx\sqrt{1 + (\mathrm{tg}\alpha)^2} \approx dx\sqrt{1 + \alpha^2} \approx dx. \qquad (2.4)$$

(2) 张力是常数

如图 1-1 所示，由于弦沿 x 轴无运动，所以有

$$T_2\cos\alpha_2 = T_1\cos\alpha_1. \qquad (2.5)$$

于是，由(2.2)可得出

$$T_2 = T_1 \overset{\text{def}}{=\!=} T. \qquad (2.6)$$

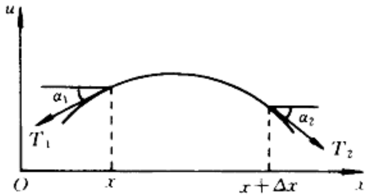

图 1-1

在弦上任取一小段$[x, x+\Delta x]$，在任一时刻 t，这一段弦所受的各外力应当平衡，即

张力＋外力＋惯性力＝0.

弦段$[x, x+\Delta x]$所受的惯性力与外力分别为

$$-\int_x^{x+\Delta x} \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}dx = -\rho\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}\Delta x, \qquad (2.7)$$

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho f(x,t)dx = \rho f(\tilde{x},t)\Delta x, \qquad (2.8)$$

其中 $\bar{x}, \tilde{x}$ 均为$[x, x+\Delta x]$中的点，$\rho f(x,t)$是弦所受外力的线密度，即单位长度所受的外力.

下面计算张力. 由于

$$\sin\alpha_1 \approx \mathrm{tg}\alpha_1 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x, \qquad (2.9)$$

$$\sin\alpha_2 \approx \mathrm{tg}\alpha_2 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}, \qquad (2.10)$$

由泰勒(Taylor)展开得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_x \Delta x + o[(\Delta x)^2]. \qquad (2.11)$$

于是，张力为

$$T\sin\alpha_2 - T\sin\alpha_1 = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{\bar{x}}\Delta x + To[(\Delta x)^2]. \qquad (2.12)$$

由(2.7)、(2.8)和上式，得弦段$[x,x+\Delta x]$上力的平衡关系为

$$-\rho\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}\Delta x + T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x + \rho f(\tilde{x},t)\Delta x = 0. \qquad (2.13)$$

将上式两端除以 Δx，并令 $\Delta x\to 0$，可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t), \qquad (2.14)$$

其中 $a^2=\dfrac{T}{\rho}$. 这就是一维波动方程.

注2.1 方程(2.14)虽然是由弦的横振动而推得的，但它决不仅限于描述弦的横振动. 事实上，许多其它的实际问题都可以用(2.14)来刻画，例如杆的纵振动等. 膜的振动和声波在空气中的传播可以用二维和三维的波动方程来描述.

2.2 定解条件

仅有方程还不足以确定具体物理过程的变化，因为方程表示同一类现象的共同规律，例如，弦的横振动和杆的纵振动都归结为一维波动方程. 因此，除方程外，我们还必须知道体系所处的特定环境(边界条件)和体系的历史(初始条件).

定解条件是初始条件和边界条件的统称. 求解一个方程满足一定初始条件和边界条件的解的问题称为解定解问题.

1. 初始(值)条件

弦振动方程中含时间的二阶导数，需要两个初始条件，即初始位移和初始速度：

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x), \ (0\leqslant x\leqslant l) \qquad (2.15)$$

其中 $\varphi(x)$, $\psi(x)$是已知函数.

2. 边界条件

边界条件一般说来有三种.

(1) 第一边界条件　已知端点的位移,即

$$u\big|_{x=0}=g_1(t),\quad u\big|_{x=l}=g_2(t).\ (t\geqslant 0)\tag{2.16}$$

当 $g_1(t)=g_2(t)=0$时,表示弦线两端固定.

(2) 第二边界条件　已知端点受垂直于弦的外力的作用,即

$$-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=g_1(t),\ T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=g_2(t).\ (t\geqslant 0)\tag{2.17}$$

当 $g_1(t)=g_2(t)=0$时,两端既不固定,也不受外力的作用,即所谓的自由端.下面以 $x=l$ 端点为例导出第二边界条件.设 $x=l$ 的端点不是固定的,受到垂直于 x 轴的外力 $g_2(t)$的作用,则在该端点有

弦对端点的拉力+外力=0.

而弦对端点的拉力为$-T\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}$,故

$$-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}+g_2(t)=0,$$

即

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=g_2(t).$$

(3) 第三边界条件　已知端点的位移与所受外力作用的一个线性组合,即

$$\left[-T\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha_1 u\right]\bigg|_{x=0}=g_1(t),$$

$$\left[T\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha_2 u\right]\bigg|_{x=l}=g_2(t).\ (t\geqslant 0)\tag{2.18}$$

当 $g_1(t)=g_2(t)=0$时,表示弦的两端固定在弹性支承上,$\alpha_i>0$ $(i=1,2)$表示支承的弹性系数.所谓的弹性支承,可以理想化地视为弦的端点是缚在与 x 轴垂直的弹簧上.下面以 $x=l$ 端为例导出第三边界条件.设 $x=l$ 端是一个弹性支承,$u=0$为弹性支承的平衡位置,则在该端点有

弦对端点的拉力+弹性支承的作用力=0.

而弹性支承对端点的作用力为 $\alpha_2 u(l,t)$，弦在 $x=l$ 端对支承的拉力为 $-T\dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t)$，故

$$-T\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)-\alpha_2 u(l,t)=0,$$

即

$$\left[T\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha_2 u\right]\bigg|_{x=l}=0.$$

在区域 $[0,l]\times[0,+\infty)$ 上由方程(2.14)、初始条件(2.15)以及边界条件(2.16)～(2.18)中的任一个组成的定解问题称为弦振动方程的混合问题.

如果对于弦上的某一段，在所考虑的时间内，弦线端点(边界)的影响可以忽略不计，那么我们可以认为弦长是无穷的，这样就不必考虑边界条件. 在区域 $(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上，由方程(2.14)和初始条件(2.15)组成的定解问题称为弦振动方程的初值问题(或柯西(Cauchy)问题).

注2.2 初始条件必须写完整，这就是说必须把整个体系中各点的初始状态都写出来. 下面举例来说明这一点. 若把一根两端固定的长为 l 的弦在初始时刻拉成如图1-2所示的形状，初始条件应写成下述形式：

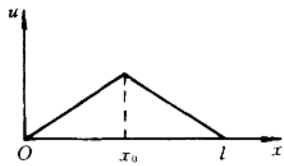

图 1-2

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\begin{cases} h\dfrac{x}{x_0}, & 0\leqslant x\leqslant x_0, \\ h\dfrac{l-x}{l-x_0}, & x_0\leqslant x\leqslant l. \end{cases} \tag{2.19}$$

初始条件应当给出整个系统的初始状态，而不只是系统中个别地方的初始状态. 如果把图1-2所示的初始位移写成

$$u(x_0,t)\big|_{t=0}=h, \tag{2.20}$$

那显然是不完整的，因为它只写出 x_0 点的初始位移，$[0,l]$ 中其它各点的位移情况并未表示出来.

§3 热传导方程的导出和定解条件

当一个导热物体内各处的温度不相等时，热量就从温度较高的地方流向温度较低的地方，这种现象就是热传导. 在工程技术中经常要研究热传导现象. 例如，修建大型混凝土水坝，为了避免由于温度控制不当而产生裂缝，必须分析研究它的发热和散热过程，确定坝体内的温度分布和变化规律.

3.1 热传导方程的导出

给定一空间物体 G，设其上的点 (x,y,z) 在时刻 t 的温度为 $u(x,y,z,t)$，试求 u 所满足的方程.

先介绍两个与该问题有关的物理定律. 一个是热量守恒定律，另一个是傅里叶(Fourier)热传导定律. 对于 G 中任一区域 Ω，热量守恒定律可以写成：

因温度变化而吸收的热量＝流入热量＋热源放出的热量.

傅里叶热传导定律是：在一温度场 $u(x,y,z,t)$ 中，在无穷小时间段 $\mathrm{d}t$ 内，流过一无穷小曲面片 $\mathrm{d}S$ 的热量为

$$\mathrm{d}Q = -k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\vec{n}$ 为曲面微元所指方向的单位法向量，$k(x,y,z)$ 为热传导系数.

考虑物体 G 内任意一个由光滑闭曲面 S 所围成的区域 Ω(如图1-3). 根据热量守恒定律，Ω 内各点的温度从时刻 t_1 的 $u(x,y,z,t_1)$ 改变为时刻 t_2 的 $u(x,y,z,t_2)$ 所吸收(或放出)的热量，应等于从 t_1 到 t_2 这段时间内通过 S 流入(或流出)Ω 内的热量和热源提供(或吸收)的热量之和.

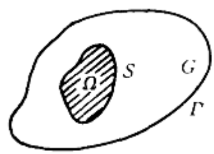

图 1-3

下面分别计算这些热量.

(1) Ω 内温度变化所需的热量

设物体 G 的比热(单位质量的物体温度改变1℃所需的热量)为 $c=c(x,y,z)$,密度为 $\rho=\rho(x,y,z)$,那么包含点(x,y,z)的体积微元 $\mathrm{d}V$ 的温度从 $u(x,y,z,t_1)$变为 $u(x,y,z,t_2)$所需热量为

$$c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V.$$

整个 Ω 内由于温度变化所需热量为

$$\begin{aligned}Q&=\iiint\limits_{\Omega}c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V\\&=\iiint\limits_{\Omega}c\rho\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}V=\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_{\Omega}c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{3.1}$$

(2) 通过 S 进入 Ω 内的热量

由傅里叶热传导定律,从 t_1到 t_2这段时间内通过 S 进入 Ω 的热量为

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\Big[\iint\limits_{S}k\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}S\Big]\mathrm{d}t.$$

应用奥—高(Остроградский—Gauss)公式,可得

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint\limits_{\Omega}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(k\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(k\frac{\partial u}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(k\frac{\partial u}{\partial z}\Big)\Big]\mathrm{d}V\right\}\mathrm{d}t.\tag{3.2}$$

(3) 热源提供的热量

用 $F(x,y,z,t)$表示热源强度,即单位时间内从单位体积内放出的热量,则从 t_1到 t_2这段时间内,Ω 内热源提供的热量为

$$Q_2=\int_{t_1}^{t_2}\Big[\iiint\limits_{\Omega}F(x,y,z,t)\mathrm{d}V\Big]\mathrm{d}t.\tag{3.3}$$

根据热量守恒定律有

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big[\iiint\limits_{\Omega}c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V\Big]\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \mathrm{d}V \right\} \mathrm{d}t$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\Omega} F(x,y,z,t) \mathrm{d}V \right] \mathrm{d}t.$$

由 Ω 及 t_1,t_2的任意性,可得

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F(x,y,z,t). \tag{3.4}$$

如果物体均匀且各向同性,即 ρ,c,k 均为常数,则方程(3.4)可写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = f(x,y,z,t), \tag{3.5}$$

其中 $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}, f = \dfrac{F}{c\rho}$. (3.5)就是三维热传导方程.

注3.1 方程(3.5)虽然被称为热传导方程,但它决不只是用来描述热传导现象.自然界中有许多现象可用它来刻画.例如分子在介质中的扩散,浓度 u 就满足(3.5).因此人们有时也称(3.5)为扩散方程.

3.2 定解条件

要确定物体的温度 u,除了要求它满足热传导方程(3.5)外,还必须指出它的初始条件(初始温度分布)

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y,z),\ (x,y,z) \in G \tag{3.6}$$

和边界条件(在边界 Γ 上的热状态).边界条件有三种.

(1) 第一边界条件 已知物体表面的温度

$$u|_{\Gamma} = g(x,y,z,t). \tag{3.7}$$

当 g=常数时,物体的表面保持恒温.

(2) 第二边界条件 已知物体表面上的热流量,即单位时间内流过表面上单位面积的热量

$$k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\Gamma} = g(x,y,z,t).\ (\vec{n}\text{ 为 }G\text{ 的外法线方向}) \tag{3.8}$$