

21

世纪高等院校教材

# 线性代数简明教程

方小娟 王 敏 侯仁民 主编

51.2-43  
52

 科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

21 世纪高等院校教材

# 线性代数简明教程

方小娟 王 敏 侯仁民 主编

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书是根据全国高等学校工科数学线性代数课程教学基本要求和全国硕士研究生入学数学考试大纲有关部分的规定内容,并按照新形势下教材改革的精神编写的一本简明教程.内容包括:矩阵、向量空间、行列式、线性方程组、标准正交基和矩阵的对角化、二次型等.各章配有适量的习题和补充题,并选入了部分近年研究生入学考试的数学试题,书末附有部分习题答案与提示.

本书既适用于高等院校工科、经济学科、管理学科等各专业大学生,又可供有关专业人员、工程技术专业工作者学习和参考,也可作为硕士研究生入学考试的复习参考书.

### 图书在版编目(CIP)数据

线性代数简明教程/方小娟,王敏,侯仁民主编.—北京:科学出版社, 2005

21世纪高等院校教材

ISBN 7-03-015670-6

I. 线… II. ①方…②王…③侯… III. 线性代数—高等学校—教材  
IV. O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字:(2005)第060592号

责任编辑:姚莉丽、祖翠娥/责任校对:张 琪  
责任印制:安春生/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2005年8月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2005年8月第一次印刷 印张: 7 1/2

印数: 1—7 000 字数: 134 000

定价: 12.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈路通〉)

## 序

线性代数有着悠久的历史，是数学学科中的一门重要的基础课。它在离散数学、管理科学、经济学、线性规划和计算机科学等学科中有着广泛的应用，是大学本科理科和经济管理等学科各专业的学生必修的一门十分重要的课程。现实生活中的许多实际问题都需要线性代数的方法来解决。线性代数解决问题的方法千变万化，涉及的领域也十分广泛。

由方小娟、王敏、侯仁民主编的《线性代数简明教程》一书是他们多年教学经验的结晶。该书以矩阵为中心和主线，首先介绍了矩阵的概念和运算，突出了分块矩阵的作用。将向量作为一种特殊的矩阵来处理，将行列式放在矩阵的后面。整个书中充分利用了分块矩阵来处理问题，同时将初等变换的方法贯穿全书，使该书的内容简明扼要，浅显易懂。在该书的写作过程中，作者遵循由浅入深、由易到难、由具体到抽象的原则，从宏观框架到微观处理都倾注了大量辛勤劳动和创新思想，使该书的内容紧凑，易教易学。同时又符合线性代数教学大纲的基本要求。作者对许多内容的处理方法得当，内容安排有特色，使该书成为一本有特色的好的教科书。它既适用于高等院校理工科各专业大学本科，又可供有关专业人员、工程技术专业工作者及有兴趣的读者学习和参考。

刘桂真

2004年12月于山东大学

## 前 言

本书是在现有线性代数教科书内容的基础上，根据作者多年教学实践积累的经验，按照新形势下教材改革的精神，在既符合线性代数课程教学基本要求又符合硕士研究生入学考试大纲数学内容要求的前提下编写的一本有特色的简明教程。

全书在内容结构上，以矩阵为中心，突出分块矩阵的作用，并以分块矩阵的广义初等变换为基本方法贯穿全书，因此内容显得新颖、简洁、清楚。在各章的编排上与现有书本有显著不同。本书首先介绍矩阵，把向量作为一种特殊矩阵处理；把行列式放在后面和方阵结合在一起；而后对于其他内容都利用分块矩阵的方法进行讨论。这样避免了传统教材中出现的重复，而且定理的证明简单明了。

全书简明扼要、逻辑性强，对所有定理都进行了严密的证明，深入浅出，通俗易懂。以较少的篇幅将线性代数中基本概念、基本理论和基本方法展示在读者面前。同时还特别注意本书使用的广泛性，除可作为高等学校的试用教材和教学参考书外，还可作为报考工程、经济、管理等学科硕士研究生入学考试的复习参考书，同时又可供有关专业人员，工程技术专业工作者以及有兴趣的读者学习和参考。

在本书出版之际，谨向给予支持和指导的北京大学方新贵教授和山东大学刘桂真教授及对本书提出过具体意见的所有教师，致以真诚的谢意。

由于作者水平所限，书中难免有错误和不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编 者

2005年3月

# 目 录

<b>第 1 章 矩阵</b> .....	1
1.1 数域 .....	1
1.2 矩阵的概念 .....	2
1.3 矩阵的运算 .....	5
1.4 可逆矩阵 .....	11
1.5 矩阵的初等变换和初等方阵 .....	14
习题 1 .....	19
<b>第 2 章 向量空间</b> .....	24
2.1 基本概念 .....	24
2.2 $F^n$ 中的线性关系 .....	25
2.3 向量组的等价与向量组的秩 .....	29
2.4 向量空间的基 .....	33
习题 2 .....	37
<b>第 3 章 行列式</b> .....	40
3.1 行列式的概念 .....	40
3.2 排列 .....	43
3.3 $n$ 阶行列式的定义 .....	44
3.4 行列式的性质 .....	46
3.5 行列式按行(列)展开定理 .....	49
3.6 行列式的计算 .....	52
习题 3 .....	56
<b>第 4 章 线性方程组</b> .....	60
4.1 线性方程组的矩阵表示和向量表示 .....	60
4.2 矩阵的秩 .....	63
4.3 线性方程组解的判定定理 .....	67
4.4 线性方程组解的结构 .....	69
习题 4 .....	73
<b>第 5 章 标准正交基和矩阵的对角化</b> .....	76
5.1 向量的内积和正交化 .....	76
5.2 矩阵的特征值与特征向量 .....	79

---

5.3 矩阵的对角化问题·····	82
5.4 实对称矩阵的对角化·····	85
习题 5 ·····	88
<b>第 6 章 二次型</b> ·····	<b>91</b>
6.1 二次型的概念·····	91
6.2 正定二次型·····	94
习题 6 ·····	97
<b>部分习题答案与提示</b> ·····	<b>99</b>
<b>参考文献</b> ·····	<b>109</b>

# 第 1 章 矩 阵

## 1.1 数 域

数是数学的一个基本概念. 数的发展从自然数到整数、有理数, 然后是实数, 再到复数. 对于数我们往往用集合的观点去研究它们, 特别是在这些数的集合中定义运算, 如加减、乘除, 并研究其运算规律.

**定义 1.1** 设  $F$  是复数集  $C$  的一个子集合, 如果  $F$  满足

(1)  $1 \in F$ ;

(2) 若  $a, b \in F$ , 则  $a + b, a - b, ab$  都属于  $F$ , 并且当  $a \neq 0$  时,  $\frac{b}{a} \in F$ .

则称  $F$  构成一个数域.

显然, 有理数集  $Q$ , 实数集  $R$ , 复数集  $C$  都是数域. 而全体整数组成的集合  $Z$  不构成数域.

**定义 1.2** 如果一个数集  $F$  中任意两个数作某一运算的结果仍在  $F$  中, 则称数集  $F$  对该运算是封闭的.

因此数域的定义也可以说成: 如果一个包含数 1 的数集  $F$ , 对于加、减、乘、除 (除数不为 0) 四种运算都是封闭的, 则  $F$  就称为一个数域.

**定理 1.1** 任何数域都包含有理数域.

**证明** 设  $F$  是任一个数域, 由定义 1.1 知  $1 \in F$ , 根据  $F$  对加法的封闭性, 则  $F$  包含全体自然数. 由对减法的封闭性, 可知  $F$  包含全体整数, 由于任何一个有理数都可表示成两个整数的商, 由  $F$  对除法的封闭性, 故  $F$  包含全体有理数. 证毕.

**例 1.1.1** 设  $F = \{a + b\sqrt{p}, a, b \in Q, p \text{ 是一素数}\}$ , 则  $F$  是一个数域.

**证明** 显然  $1 \in F$ . 设  $a + b\sqrt{p}, c + d\sqrt{p} \in F$ , 则

$$(a + b\sqrt{p}) \pm (c + d\sqrt{p}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{p} \in F,$$

$$(a + b\sqrt{p})(c + d\sqrt{p}) = (ac + pbd) + (ad + bc)\sqrt{p} \in F,$$

当  $a + b\sqrt{p} \neq 0$  时, 显然  $a - b\sqrt{p}$  也不为零, 于是

$$\begin{aligned} \frac{c + d\sqrt{p}}{a + b\sqrt{p}} &= \frac{(c + d\sqrt{p})(a - b\sqrt{p})}{a^2 - b^2p} \\ &= \frac{ac - pbd}{a^2 - b^2p} + \frac{ad - bc}{a^2 - b^2p}\sqrt{p} \in F. \end{aligned}$$

故  $F$  是数域.

证毕.



因为素数有无穷多,根据例 1.1.1 可知数域有无穷多.

## 1.2 矩阵的概念

**定义 1.3** 设  $F$  是一个数域,  $a_{ij} \in F (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ , 数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为定义在数域  $F$  上的一个  $m$  行  $n$  列矩阵, 简称  $m \times n$  矩阵, 其中  $a_{ij}$  称为矩阵的元素,  $i$  称为元素  $a_{ij}$  的行指标,  $j$  称为元素  $a_{ij}$  的列指标.  $m \times n$  矩阵可记为  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 也可记为  $A_{m \times n}$ . 若  $m = n$ , 则称  $A$  为  $n$  阶方阵.

从本节以后所给出的矩阵若没有特别说明都是指定义在数域  $F$  上的矩阵.

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{l \times k}$ , 如果  $m = l$ ,  $n = k$  (此时称  $A, B$  为同型矩阵) 且  $a_{ij} = b_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ , 则称矩阵  $A$  与矩阵  $B$  相等, 记作  $A = B$ .

也就是说, 只有完全相同的矩阵才称为相等.

元素都是 0 的矩阵称为零矩阵, 记作  $O$ . 注意不同型的零矩阵是不相等的.

对于  $n$  阶方阵, 若从左上角到右下角的直线 (叫做主对角线) 上的元素都是 1, 其余元素全为 0, 即形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

的矩阵称为  $n$  阶单位矩阵, 记作  $E_n$ . 除对角线上的元素外, 其余元素全为 0, 即形为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}_{n \times n}$$

的矩阵称为对角矩阵, 记作  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . 当  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$  时, 称为数量矩阵.

**例 1.2.1** 某公司向下属三个连锁店  $a_1, a_2, a_3$  配送四种商品  $b_1, b_2, b_3, b_4$  的数量情况, 我们可用以下矩阵给出:

$$\begin{matrix} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

这里的行表示连锁店而列表示商品,如第三列的第二个元素 7 表示第 3 种商品发送到第 2 个连锁店的数量.

**例 1.2.2** 四个城市间的单向航线如图 1.1 所示.若令

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ 市到 } j \text{ 市有一条单向航线,} \\ 0, & i \text{ 市到 } j \text{ 市没有单向航线,} \end{cases}$$

则图 1.1 可用矩阵表示为

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

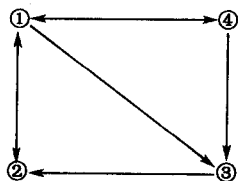


图 1.1

**例 1.2.3**  $n$  个变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  与  $m$  个变量  $y_1, y_2, \dots, y_m$  之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases} \quad (1.1)$$

表示一个从变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  到变量  $y_1, y_2, \dots, y_m$  的线性变换,其中  $a_{ij}$  为常数,线性变换(1.1)的系数  $a_{ij}$  构成矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  (称  $A$  为线性变换(1.1)的系数矩阵).

对于矩阵可以进行分块,即把矩阵用若干条纵线和若干条横线分成许多小矩阵,每个小矩阵称为  $A$  的一个子块.以子块为元素的矩阵称为分块矩阵.

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 把  $A$  分成  $k \times s$  ( $k \leq m, s \leq n$ ) 个子块成分块矩阵,即

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1s} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{k1} & \mathbf{A}_{k2} & \cdots & \mathbf{A}_{ks} \end{pmatrix},$$

其中子块  $\mathbf{A}_{ij}$  为  $m_i \times n_j$  矩阵,称  $\mathbf{A}_{ij}$  为分块矩阵  $A$  的第  $i$  行第  $j$  列的元素,并且

$$\sum_{j=1}^s n_j = n, \quad \sum_{i=1}^k m_i = m.$$

例 1.2.4 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 若令  $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $A = \begin{pmatrix} E_2 & O \\ E_2 & D \end{pmatrix}$  就是分

块矩阵, 其中  $E_2$  表示二阶单位矩阵,  $O$  是二阶零矩阵.

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 把  $A$  的每一行作为一个子块, 可得  $A = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$ , 其中

$$\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \quad (i = 1, \dots, m),$$

称  $\beta_i$  为行矩阵. 同样, 把矩阵  $A$  的每一列作为一个子块, 可得  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots,$

$\alpha_n)$ , 其中  $\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} (j = 1, \dots, n)$ , 称  $\alpha_j$  为列矩阵.

我们常用到把一个矩阵分为四块的情形, 如  $n$  阶方阵  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 其中  $A$  为  $r \times r$  矩阵,  $B$  为  $r \times (n-r)$  矩阵,  $C$  为  $(n-r) \times r$  矩阵,  $D$  为  $(n-r) \times (n-r)$  矩阵.

设  $A$  为  $n$  阶方阵, 若  $A$  的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块, 其余子块都为零矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中  $A_i$  为  $m_i (i = 1, 2, \dots, s)$  阶方阵, 则称  $A$  为准对角矩阵.

例 1.2.5 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 令  $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,

则  $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$  就是准对角矩阵.

## 1.3 矩阵的运算

对数域  $F$  上的矩阵可以定义一些运算,这里主要是矩阵的加法、乘法及矩阵和  $F$  中的数的乘法等.

### 1.3.1 矩阵的加法

**定义 1.4** 设两个  $m \times n$  矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , 则矩阵

$$C = (c_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

称为  $A$  与  $B$  的和, 记为  $C = A + B$ .

矩阵的加法就是两个矩阵的对应元素相加, 因此只有两个同型矩阵才能进行加法运算.

容易证明, 矩阵的加法满足以下运算规律:

设  $A, B, C, O$  都是  $m \times n$  矩阵, 则有

(1) 结合律:  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;

(2) 交换律:  $A + B = B + A$ ;

(3)  $A + O = A$ .

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 矩阵  $(-a_{ij})_{m \times n}$  称为  $A$  的负矩阵, 记作  $-A$ , 显然有

(4)  $A + (-A) = O$ .

由此即可定义矩阵的减法:

$$A - B = A + (-B).$$

对于分块矩阵也有类似的加法规则.

设  $A, B$  为同型矩阵且采取相同的分块方法, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{ks} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{k1} & \cdots & B_{ks} \end{pmatrix},$$

其中  $A_{ij}, B_{ij} (i=1, \dots, k; j=1, \dots, s)$  为同型矩阵, 则

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1s} + B_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} + B_{k1} & \cdots & A_{ks} + B_{ks} \end{pmatrix}.$$

**例 1.3.1** 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , 把  $A, B$  按列分块得

$$A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad B = (\beta_1, \dots, \beta_n),$$

则  $A + B = (\beta_1 + \alpha_1, \dots, \beta_n + \alpha_n)$ .

## 1.3.2 数乘矩阵

定义 1.5 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $\lambda \in F$ ,  $\lambda$  与矩阵  $A$  的乘积是一个矩阵, 记作  $\lambda A$  或  $A\lambda$ , 定义为  $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m \times n}$ , 即

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

不难验证, 对于分块矩阵, 亦有  $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{k1} & \cdots & \lambda A_{ks} \end{pmatrix}$ .

数乘矩阵适合以下运算规律.

对于任意的  $k, l \in F$  和任意的同型矩阵  $A, B$  都有

$$(1) (k+l)A = kA + lA;$$

$$(2) k(A+B) = kA + kB;$$

$$(3) k(lA) = (kl)A;$$

$$(4) 1 \cdot A = A.$$

## 1.3.3 矩阵的乘法

定义 1.6 设  $1 \times n$  矩阵  $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$ ,  $n \times 1$  矩阵  $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ , 则  $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$  称为  $\alpha$  与  $\beta$  的积, 记为  $\alpha\beta$ , 即

$$\alpha\beta = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

对于两个矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times s}$ ,  $B = (b_{ij})_{s \times n}$ , 将  $A, B$  分别按行和列分块, 即

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \quad B = (\beta_1, \cdots, \beta_n),$$

则  $A$  与  $B$  的乘积定义为

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 & \cdots & \alpha_1 \beta_n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_m \beta_1 & \cdots & \alpha_m \beta_n \end{pmatrix}.$$

根据定义可以看出, 当且仅当矩阵  $A$  的列数等于矩阵  $B$  的行数时, 乘积  $AB$  才有意义.

例 1.3.2 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$ , 则

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}.$$

矩阵的乘法满足以下运算规律(假设运算都有意义):

- (1) 结合律:  $A(BC) = (AB)C$ ;
- (2) 分配律:  $A(B+C) = AB+AC$ ,  $(B+C)A = BA+CA$ ;
- (3)  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ ,  $\lambda \in F$ .

应当注意矩阵乘法不满足交换律, 即  $AB$  与  $BA$  不一定相等(如例 1.3.2).

对于单位矩阵  $E$ , 零矩阵  $O$  和任意的  $m \times n$  矩阵  $A$ , 显然有

$$E_m A = A E_n = A, \quad O_{s \times m} A = O_{s \times n}, \quad A O_{n \times t} = O_{m \times t}.$$

在 1.2 节例 1.2.3 中的线性变换(1.1), 利用矩阵的乘法可记作

$$Y = AX,$$

其中  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ .

例 1.3.3 设有两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + 4y_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 - z_3, \\ y_2 = 2z_1 - 3z_2 + 2z_3. \end{cases}$$

利用矩阵乘法求从变量  $z_1, z_2, z_3$  到变量  $x_1, x_2$  的线性变换.

解 所给两个线性变换用矩阵形式表示为

$$X = AY, \quad Y = BZ,$$

其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ . 于是

$$X = A(BZ) = (AB)Z.$$

由于

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -4 \\ 9 & -10 & 7 \end{pmatrix},$$

因此所求线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = 7z_1 - 4z_3, \\ x_2 = 9z_1 - 10z_2 + 7z_3. \end{cases}$$

对于分块矩阵的乘法, 应将  $A$  的列的分法和  $B$  的行的分法一致. 如

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{ik} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sk} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1j} & \cdots & B_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{k1} & \cdots & B_{kj} & \cdots & B_{kl} \end{pmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{matrix}$$

$n_1 \quad \cdots \quad n_k$

这里  $A_{ik}$  的列数要等于  $B_{kj}$  的行数, 则

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix},$$

其中  $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + \cdots + A_{ik}B_{kj}$ , 即  $AB$  可以按照一般的矩阵乘法进行, 把所有的子块都看成矩阵的一般元素处理.

设  $A_{m \times n} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$ ,  $B_{n \times s} = (B_1, \cdots, B_s)$ ,  $\lambda_i \in F$ , 则有以下结果:

$$(1) AB = A(B_1, \cdots, B_s) = (AB_1, \cdots, AB_s), \quad AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_m B \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_1 \\ \vdots \\ \lambda_m A_m \end{pmatrix},$$

$$B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \end{pmatrix} = (B_1, \cdots, B_s) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \end{pmatrix} = (\lambda_1 B_1, \cdots, \lambda_s B_s).$$

有了矩阵的乘法就可以定义矩阵的幂. 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 定义  $A$  的幂如下:

$$A^1 = A, \quad A^{k+1} = A^k A = \cdots = \underbrace{A \cdots A}_{k+1 \text{ 个}}.$$

特别, 对于单位矩阵  $E$ , 有  $E^k = E$ ,  $(lE)(kE) = (lk)E$ ,  $k, l \in F$ .

容易证明矩阵的幂运算满足

$$A^k A^l = A^{k+l}, \quad (A^k)^l = A^{kl}, \quad k, l \in F,$$

但  $(AB)^k$  与  $A^k B^k$  不一定相等.

**例 1.3.4** 在 1.2 节例 1.2.2 中, 四个城市间的单向航线表示为矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则有 } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ 若记 } A^2 = (b_{ij}), \text{ 则 } b_{ij} \text{ 表示从 } i \text{ 市经}$$

一次中转到  $j$  市的单向航线条数. 如  $b_{23} = 1$  表示从②市经一次中转到③市的单向航线有 1 条(②→①→③);  $b_{42} = 2$  表示从④市经一次中转到②市的单向航线有 2 条(④→①→②; ④→③→②).

**例 1.3.5** 某企业为促进技术进步,对职工分批脱产轮训.若现有不脱产职工 8000 人,脱产在参加轮训的 2000 人.而计划每年从现在不脱产的那些人员中抽调 30% 的人参加轮训,而在轮训队伍中让 60% 的人结业回到工作岗位上去.若职工总人数不变,问一年后不脱产职工及脱产职工各有多少?两年后又怎样?

**解** 根据题意先写出矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix},$$

$a_{11}$  为原生产人员中留下继续生产的百分比,  $a_{21}$  为原生产人员中调起参加轮训的百分比,  $a_{12}$  为原轮训人员中回到生产中去的百分比,  $a_{22}$  为轮训人员中留下继续轮训的百分比.若用矩阵

$$x = \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

表示目前人员的结构,则

$$Ax = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6800 \\ 3200 \end{pmatrix}$$

为一年后的人员结构,即不脱产职工有 6800 人,脱产职工有 3200 人.而

$$A^2x = A(Ax) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6800 \\ 3200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6680 \\ 3320 \end{pmatrix}$$

为两年后的人员结构.可以看出,这时脱产参加轮训的人数约为不脱产人员的一半.

### 1.3.4 矩阵的转置

**定义 1.7** 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{n \times m}$ , 如果

$$b_{ij} = a_{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n),$$

则称  $B$  为  $A$  的转置矩阵,记  $B$  为  $A^T$  或  $A'$ , 即



$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

列矩阵  $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  的转置矩阵是行矩阵  $\alpha^T = (a_1, \cdots, a_n)$ , 且易知

$$\alpha^T \alpha = a_1^2 + \cdots + a_n^2.$$

对于分块矩阵  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{ks} \end{pmatrix}$ , 有  $A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{k1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1s}^T & \cdots & A_{ks}^T \end{pmatrix}$ .

例 1.3.6 设  $H = \begin{pmatrix} E_2 & C \\ D & O_2 \end{pmatrix}$ , 其中  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $H^T$ .

$$\text{解 } H^T = \begin{pmatrix} E_2^T & D^T \\ C^T & O_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & D^T \\ C^T & O_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的转置适合以下运算规律(假设运算都有意义):

- (1)  $(A^T)^T = A$ ;
- (2)  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ;
- (3)  $(kA)^T = kA^T, k \in F$ ;
- (4)  $(AB)^T = B^T A^T$ .

证明 除去(4)以外都是显然的. 以下证明(4). 设  $A = (a_{ij})_{m \times s}$ ,  $B = (b_{ij})_{s \times n}$ .

当  $n = 1$  时, 可设  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$ , 则  $AB = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^s a_{1j} b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^s a_{mj} b_j \end{pmatrix}$ . 因此

$$(AB)^T = \left( \sum_{j=1}^s b_j a_{1j}, \cdots, \sum_{j=1}^s b_j a_{mj} \right) = (b_1, \cdots, b_s) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1s} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix} = B^T A^T.$$

当  $n$  为任意正整数时, 设  $B = (B_1, \cdots, B_n)$ , 于是

$$AB = A(B_1, \cdots, B_n) = (AB_1, \cdots, AB_n),$$