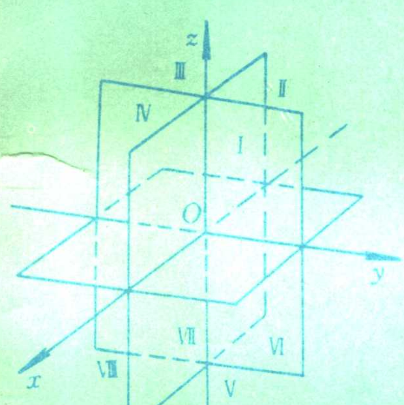
北京大学教材

解析几何

（第二版）

丘维声　编



北京大学出版社

北京大学教材

解析几何

(第二版)

丘维声 编

北京大学出版社
北京

书　　名：解析几何(第二版)
著作责任者：丘维声
责 任 编 辑：王明舟
标 准 书 号：ISBN 7-301-00349-8/O·63
出 版 者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话：出版部　62752015　发行部　62559712　编辑部　62752032
排 印 者：北京大学印刷厂
发 行 者：北京大学出版社
经 销 者：新华书店
850×1168毫米　32开本　11.375印张　260千字
1996年10月第二版　1996年10月第一次印刷
定　　价：15.00元

内 容 提 要

本书是北京大学数学系解析几何课程的教材。主要讲述解析几何的基本内容和基本方法，包括：向量代数、空间直线和平面、常见曲面、坐标变换、二次曲线方程的化简、正交变换、仿射变换、射影平面和射影变换等。本书注意培养读者的空间想象能力；论证严谨而简明；叙述深入浅出、条理清楚。书中有适量例题且每节都配了习题。

本书可作为综合大学和高等师范院校的解析几何课程的教材，也可供其他学习解析几何课程的广大读者作为教材或教学参考书。

前　言

解析几何是大学数学系的主要基础课程之一，学好这门课对于学习数学分析、高等代数、微分几何和力学等课程都有很大的帮助，并且它本身的内容对于解决一些实际问题也是很有用的。

本书是以作者近几年在北京大学数学系讲授解析几何课程的讲稿为基础编写成的。编写中主要考虑了以下几点：

1. 贯穿全书的主线是阐述解析几何的几种基本方法：坐标法、向量法、坐标变换法、点变换法。第一、二、三章主要讲坐标法和向量法，并且用这些方法讨论了空间中的平面和直线，以及常见曲面。第四、五章主要讲坐标变换法，并且用这些方法讨论了二次曲线方程的化简。第六、七章主要讲点变换法，讲了三种变换：正交变换、仿射变换和射影变换；讲了如何用点变换法研究图形的性质；并且运用这些变换分别讨论了二次曲线的正交分类、仿射分类和射影分类。

2. 本书主要讲欧氏几何和仿射几何，同时射影几何的内容也占了一定的篇幅。本书在讲射影几何的内容时，紧紧抓住几何背景（主要是抓住"中心投影"和"把"），从而使读者易于理解射影平面、齐次坐标、交比、射影坐标和射影映射等概念。

3. 本书注意培养读者对空间图形的直观想象能力，这尤其体现在第三章中关于旋转面、柱面和锥面方程的建立，以及专门用一节介绍了画空间图形常用的三种方法，画曲面的交线和画曲面围成的区域的方法。

4. 本书论证严谨，同时又力求简明。叙述上深入浅出，条理清楚，注意讲清所讨论问题的来龙去脉。

5. 本书在第四章§2结合坐标变换引进了矩阵的概念，讲了矩阵的运算以及可逆矩阵、正交矩阵等内容。这样从第四章§3开始，

本书就运用了矩阵的工具，从而使很多叙述和证明变得比较简单。

6. 本书仔细注意了习题的选择和配置。每一节后面都配了习题，有些习题是为了熟练掌握正文内容的，有些习题是富有启发性的，有的习题是对正文内容的补充。加"*"号的题较难一些。

本书可供综合大学和高等师范院校的数学系、力学系作为解析几何教材。如果周学时为 4+2(即每周 4 学时讲课，2 学时习题课)，则一学期可讲完全书(加"*"号的内容可略去)。如果周学时为 3+1，则可略去加"*"号内容以及第六章 §6 和第七章。

作者衷心感谢姜伯驹教授，他仔细审阅了本书初稿，提出了许多宝贵的修改意见，尤其是第七章，在他的指导下，作者对这一章的初稿作了修改，使得该章的质量有了很大的提高。

作者感谢章学诚副教授和尤承业副教授，他们曾经对本书初稿的提纲提出了宝贵意见。作者还要感谢吴光磊教授、丁石孙教授、程庆民教授、田畴教授以及北京大学数学系几何代数教研室的同志们给予的支持和帮助。

由于作者水平的限制，书中缺点错误在所难免，诚恳地希望大家批评指正。

丘 维 声

1986年4月于北京大学

目　　录

第一章　向 量 代 数

解析几何最基本的方法是坐标法,即,建立一个坐标系,使得点用有序实数组(称为它的坐标)表示,从而图形可以用方程表示,通过方程来研究图形的性质.坐标法的优越性在于它利用了数可以进行运算的优点.那么,能否把代数运算直接引到几何中来?即什么样的几何对象能够做运算?我们从力学中知道,力、速度这些量既有大小、又有方向,它们可以用有向线段来表示,力(或速度)的合成可以通过有向线段来进行.这类既有大小、又有方向的量称为向量(或矢量),本章要研究向量的代数运算.利用向量的运算来研究图形性质的方法称为向量法,它的优点在于比较直观,比综合法简便,并且它在力学、物理学中也有重要的应用.此外,我们这里讲向量的概念及其运算也为线性代数中讲向量空间提供了几何背景,而一般的向量空间在现代数学中起着特别重要的作用.在解析几何中,常常把向量法和坐标法结合起来使用.

§1　向量及其线性运算

1.1　向量的概念

既有大小、又有方向的量称为**向量**(或**矢量**).向量用符号 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \cdots$, 或 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \cdots$ 表示.

一个向量 $\boldsymbol{a}$ 可以用一条有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示,用这条线段的长度 $|AB|$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的大小,用起点 A 到终点 B 的指向表示 $\boldsymbol{a}$ 的方向(如图 1.1).

图　1.1

规定长度相等并且方向相同的有向线段表示同一个向量.例如,若 $\overrightarrow{AB}$ 表示向量

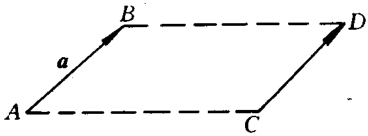


图 1.2

$\boldsymbol{a}$,则 $\overrightarrow{AB}$ 经过平行移动得到的有向线段 $\overrightarrow{CD}$ 仍然表示向量 $\boldsymbol{a}$ (如图 1.2). 我们记作 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

我们今后把向量的大小也称为向量的**长度**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度记作 $|\boldsymbol{a}|$.

长度为零的向量称为**零向量**,记作 $\boldsymbol{0}$. 零向量的方向不确定.

长度为 1 的向量称为**单位向量**. 与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^0$.

与 $\boldsymbol{a}$ 长度相等并且方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**反向量**,记作 $-\boldsymbol{a}$. 例如 $\overrightarrow{BA}$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 的反向量,因此 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

1.2 向量的加法

我们知道,接连作两次位移 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 的效果是作了位移 $\overrightarrow{AC}$ (如图 1.3). 由这个实际背景我们作出

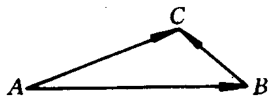


图 1.3

定义 1.1 对于向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\boldsymbol{a}$, 作 $\overrightarrow{BC}$ 表示 $\boldsymbol{b}$, 把 $\overrightarrow{AC}$ 表示的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 1.4). 也就是

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

由这个公式表示的向量加法规则通常称为"三角形法则".

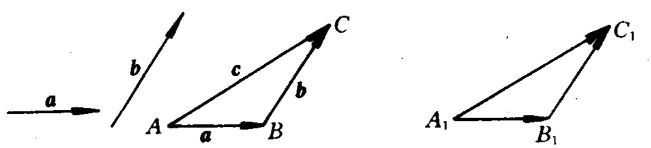


图 1.4

注 1 若另取一个起点 A_1, 作 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 表示 $\boldsymbol{a}$, 作 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 表示 $\boldsymbol{b}$, 则容易说明 $\overrightarrow{A_1C_1}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 表示同一个向量(如图 1.4). 因此向量的加法与起点的选择无关.

注 2 也可以从同一起点 O 作 $\overrightarrow{OA}$ 表示 $\boldsymbol{a}$, 作 $\overrightarrow{OB}$ 表示 $\boldsymbol{b}$, 再以 OA 和 OB 为边作平行四边形 $OACB$, 则容易说明对角线 $\overrightarrow{OC}$ 也表示向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{c}$(如图 1.5). 这称为向量加法的“平行四边形法则”.

图 1.5

向量的加法适合下述规律:

(1) 结合律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, 其中 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$是任意向量;

(2) 交换律: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$, 其中 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是任意向量;

(3) 对任意向量 $\boldsymbol{a}$, 有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(4) 对任意向量 $\boldsymbol{a}$, 有 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

证明 (1) 作 $\overrightarrow{OA}$ 表示 $\boldsymbol{a}$, 作 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\boldsymbol{b}$, 作 $\overrightarrow{BC}$ 表示 $\boldsymbol{c}$ (如图 1.6), 则

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$
$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

因此

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

(2) 作 $\overrightarrow{OA}$ 表示 $\boldsymbol{a}$, 作 $\overrightarrow{OB}$ 表示 $\boldsymbol{b}$, 以 OA 和 OB 为边作平行四边形 $OACB$, 则 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 并且 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$, 从而

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

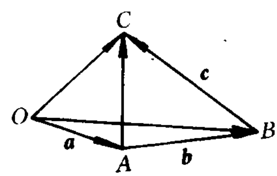


图 1.6

(3) 作 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{0}$ 可用 $\overrightarrow{BB}$ 表示,

于是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}.$$

(4) 作$\overrightarrow{AB}$表示 $\boldsymbol{a}$, 则

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0}.$$

本书中用符号"$A:=B$"表示用 B 来规定 A, 读作"A 定义成 B".

向量的减法的定义为:

定义 1.2 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}:=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 分别用同一起点的有向线段 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 表示, 则

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}.$$

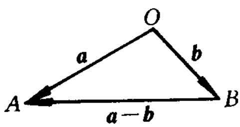


图 1.7

容易看出, 对于任意向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, 都有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

这个不等式称为**三角形不等式**, 它是用向量的形式表示: 三角形的一边不大于另两边的和.

1.3 向量的数量乘法

定义 1.3 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量, 它的长度为

$$|\lambda\boldsymbol{a}|:=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同, 当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$, 由于 $|0\boldsymbol{a}|=0|\boldsymbol{a}|=0$, 所以 $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 同理, 对一切实数 λ 都有 $\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 因为 $|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向, 并且

$$||\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^{-1}|\boldsymbol{a}|=1,$$

所以 $\boldsymbol{a}^0=|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a}$. 把一个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 乘以它的长度的倒数, 便得到一个与它同向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$. 这称为把 $\boldsymbol{a}$ 单位化.

向量的数量乘法适合下述规律: 对于任意向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 和任意实数 λ, μ 有

(1) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$, $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$;

(2) $\lambda(\mu \boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(3) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$; (1.1)

(4) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$. (1.2)

关于(1)和(2)可以用定义 1.3 直接验证.

(3)的证明 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或者 λ, μ 中有一个为零时,则等式(1.1)显然成立. 下面设 λ, μ 都不等于零,并且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$.

情形 1. 若 λ, μ 同号,则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\mu\boldsymbol{a}$ 方向相同,因此有

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|&=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|\\&=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|,\end{aligned}$$

又有

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|,$$

因而

$$|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|=|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|,$$

并且当 λ, μ 同号时,显然 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 与 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 同向,所以

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

情形 2. 若 λ, μ 异号,由于 λ 和 μ 的地位是对称的,因此不妨设 $\lambda>0$, $\mu<0$. 又分以下三种情形:

2.1) 若 $\lambda+\mu=0$,则等式(1.1)的左边为 $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,右边为

$$\lambda\boldsymbol{a}+(-\lambda)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+(-1)(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\boldsymbol{a}+(-\lambda\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0},$$

因此(1.1)式成立.

2.2) 若 $\lambda+\mu>0$, 因为 $\lambda+\mu>0$, $-\mu>0$, 于是由情形 1 知

$$[(\lambda+\mu)+(-\mu)]\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu)\boldsymbol{a},$$

即得

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu\boldsymbol{a}),$$

从而有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

2.3) 若 $\lambda+\mu<0$,因为 $\lambda+\mu$ 与 $-\lambda$ 同号,于是由情形 1 知

$$[(\lambda+\mu)+(-\lambda)]\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\lambda)\boldsymbol{a}.$$

类似于 2.2) 可得(1.1)式.

(4)的证明 若 $\lambda=0$ 或者 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 中有一个为 $\boldsymbol{0}$, 则(1.2)式显然成立. 下面设 $\lambda\neq 0$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.

若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行, 则存在实数 μ 使得 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$, 于是

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\lambda(1\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a})=\lambda[(1+\mu)\boldsymbol{a}]\\&=[\lambda(1+\mu)]\boldsymbol{a}=(\lambda+\lambda\mu)\boldsymbol{a}\\&=\lambda\boldsymbol{a}+(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda(\mu\boldsymbol{a})\\&=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

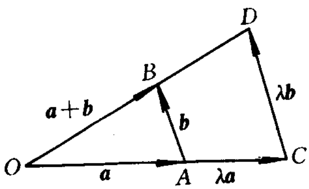


图 1.8

若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不平行, 那么当 $\lambda>0$ 时, 作 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ 分别表示 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 于是 $\overrightarrow{OB}$ 表示 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; 作 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CD}$ 分别表示 $\lambda\boldsymbol{a}$, $\lambda\boldsymbol{b}$(如图 1.8). 则 $\triangle OAB\backsim\triangle OCD$, 从而 D 必在直线 OB 上, 于是 $\overrightarrow{OD}$ 表示 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$; 又 $\overrightarrow{OD}$ 表示 $\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$, 所以有

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

当 $\lambda<0$ 时可以作类似讨论.

1.4 共线(共面)的向量组

向量的加法和数量乘法统称为向量的线性运算.

设 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 是一组向量, k_1, k_2, $\cdots$, k_n 是一组实数, 则 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n$ 是一个向量, 称它是向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 的一个**线性组合**, 称 k_1, $\cdots$, k_n 是这个组合的**系数**.

定义 1.4 向量组若用同一起点的有向线段表示后, 它们在一条直线(一个平面)上, 则称这个向量组是**共线的(共面的)**.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线, 则记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

显然 $\boldsymbol{0}$ 与任意向量共线; 共线的向量组一定共面; 两个向量一定共面; 若 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$(或者 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$), 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

命题 1.1 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线, 并且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则存在唯一的实数 λ 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明　存在性. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，则 $\boldsymbol{b}^0=\boldsymbol{a}^0$，从而有

$$\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}^0=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}^0=|\boldsymbol{b}|(|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a})=(|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|^{-1})\boldsymbol{a},$$

取 $\lambda=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|^{-1}$，即得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，可以类似讨论.

唯一性. 假如 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{a}$，则 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda-\mu=0$，即 $\lambda=\mu$.

命题 1.2　$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ，μ，使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}. \tag{1.3}$$

证明　必要性. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则有 $1\boldsymbol{a}+1\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不全为 $\boldsymbol{0}$，不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则存在实数 λ 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，从而有

$$\lambda\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

充分性. 若有不全为零的实数 λ，μ 使得 (1.3) 式成立，不妨设 $\lambda\neq0$，则由 (1.3) 式得 $\boldsymbol{a}=-\dfrac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{b}$，因此 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

推论 1.1　$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线的充分必要条件是：从 (1.3) 式成立可以推出 $\lambda=\mu=0$.

命题 1.3　若 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面.

证明　若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共线，从而它们共面. 若 $\boldsymbol{a}\not\parallel\boldsymbol{b}$，则当 $\lambda>0$，$\mu>0$ 时，由图 1.9 知，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面. 对 λ，μ 的其他取值情况，可以类似讨论.

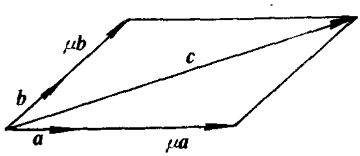


图　1.9

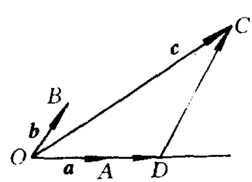


图　1.10

命题 1.4 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面，并且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则存在唯一的一对实数 λ, μ 使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

证明 存在性. 从同一起点 O 作

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}.$$

过 C 作 $CD // OB$，且与直线 OA 交于 D. 因为 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，所以有实数 λ 使得 $\overrightarrow{OD}=\lambda\boldsymbol{a}$. 同理有 $\overrightarrow{DC}=\mu\boldsymbol{b}$. 因此有

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

唯一性. 假如 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}$，则有

$$(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{a}+(\mu-\mu_1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，根据推论 1.1 即得

$$\lambda-\lambda_1=0,\ \mu-\mu_1=0,$$

于是 $\lambda=\lambda_1,\ \mu=\mu_1$.

命题 1.5 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是有不全为零的实数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}. \tag{1.4}$$

证明 必要性. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面，若 $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$，则有实数 λ, μ 使得 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$. 即

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+(-1)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

若 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则有不全为零的实数 λ, μ 使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，从而有

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+0\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

充分性. 不妨设 $k_1\neq 0$，则由 (1.4) 式得

$$\boldsymbol{a}=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{b}-\frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{c},$$

因此 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

推论 1.2 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面的充分必要条件是：从 (1.4) 式成立可以推出 $k_1=k_2=k_3=0$.

由于上述这些命题，使得向量的线性运算可以用来解决有关点的共线或共面问题，直线的共点问题以及线段的定比分割问题；并