1+1

轻巧夺冠

qingqiaoduoguan

同步讲解

全国著名特级高级教师联合编写

华东师大版

八年级数学 下

总主编：刘 强 美澳国际学校校长
学科主编：明知白 北京东城区数学特级教师
中国数学奥林匹克高级教练

金版
第三次修订

北京出版社出版集团
BEIJING PUBLISHING HOUSE(GROUP)
北京教育出版社
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

1+1 轻巧夺冠

同步讲解

全国著名特级高级教师联合编写

华东师大版

八年级数学 下

总主编：刘　强
主　编：姚　雳
编　者：赵苏阳　胡翠玲

北京出版社出版集团 BEIJING PUBLISHING HOUSE (GROUP)
北京教育出版社 BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

1+1轻巧夺冠·同步讲解
(华东师大版)八年级数学(下)
刘强　总主编
*
北京出版社出版集团
北京教育出版社 出版
(北京北三环中路6号)
邮政编码:100011
网址:www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
全国各地书店经销
北京旭升印刷装订厂印刷
*
880×1230毫米　16开本　6.125印张　160000字
2005年11月第3次修订版　2005年11月第1次印刷

ISBN 7-200-05537-9/G·1889
定价:7.50元

1+1 轻巧夺冠

全版 同步讲解

丛书特点

1、左右两栏对照讲解。左栏为知识点讲解；右栏为与知识点相对应的例题。
2、从基础知识的梳理，重点难点的突破（或新旧知识的融会贯通），与科技发展、生活实际相联系的综合、创新、应用三个层面解读每节内容。
3、采用“同步讲解”与“优化训练”相配套的“1+1”模式。有讲有练，方便实用。

1+1轻巧夺冠·同步讲解(华东师大版)八年级数学(下)

第16章 数的开方

第16章 数的开方

§16.1 平方根与立方根 / 2

知识要点归纳

基础知识及掌握这些知识的方法，“源于教材，高于教材”。可以帮助你高效率地掌握基础知识结构，得到学法指导。

思维能力拓展

对重点、难点进行深层次的拓展讲解和思路点拨，能有效地形成基础知识的提高和升华，是考试得高分的关键所在。

名师解题 不但有解题思路、方法的分析和点拨，也有解题时易错点和易忽略点的提示，能有效地避免解题时心理屏蔽作用和“低级错误”，深入浅出，指点迷津。

综合创新运用

用前瞻性、预测性的目光去分析、展示每节知识点可能出现的考题形式、命题角度、深度，并形成与科技发展、生活实际相联系的创新应用能力，努力做到与中、高考命题趋势“合拍”，步调一致。

素质能力测试

题目轻灵、简练，针对本节（课）所有知识点设计，与前面的讲解相互对应，形成“讲、例、练”三案合一的形式，学以致用，当堂达标。

点击知识点 标注在每道随堂训练题的后面，指明该道题目对应知识点的序号，形成对每个知识点的及时巩固和有效的强化训练，并能查漏补缺，一目了然。

真情讲练·轻巧夺冠

优化训练·学生训练用书

同步讲解

优化训练·教师讲评用书

目　录

第 16 章 数的开方

§16.1 平方根与立方根

同步教材研读
名师解疑释惑

知识要点归纳

1 平方根

如果一个数的平方等于 a，则这个数就叫做 a 的平方根(或二次方根). 就是说，如果 $x^2=a$，那么 x 就叫做 a 的平方根. 这里 a 是 x 的平方数，它是一个非负数，即 $a\geqslant 0$.

2 平方根的表示方法

一个正数 a 的平方根有两个，它们互为相反数，我们用 $\sqrt{a}$ 表示正数 a 的正的平方根，用 $-\sqrt{a}$ 表示正数 a 的负的平方根，因此正数 a 的平方根可记作 $\pm\sqrt{a}$.

3 平方根的性质

(1)一个正数有两个平方根，它们互为相反数；

(2)0 有一个平方根，是 0 本身；

(3)负数没有平方根.

对这个重要性质，要从任何数的平方都不可能是负数来理解，所以负数不能开平方.（见例 2、例 9）

4 算术平方根

正数 a 的正的平方根，叫做 a 的算术平方根，记作 $\sqrt{a}$，读作"根号 a". 0 的算术平方根为 0. 由于一个正数 a 的平方根有两个，它们互为相反数，因此只要求出算术平方根，另一个平方根自然就得到了.

$\sqrt{a}$ 的意义：(1)$\sqrt{a}$ 中的 $a\geqslant 0$；(2)$\sqrt{a}\geqslant 0$；

(3)$(\sqrt{a})^2=a$.

5 (1)求一个非负数的平方根的运算，叫做开平方.

(2)开平方是一种运算，而平方根是开平方运算的结果，开平方运算与平方运算是互逆的.

注意：我们以前还学过有理数的加、减、乘、除、乘方运算，它们的计算结果是惟一的，而开方运算的结果不一定，一个正数开平方的结果有两个，它们互为相反数，0 开平方的结果惟一，是 0，而负数不能开平方.

6 用计算器直接求一个非负数的算术平方根

用计算器求一个非负数的算术平方根，要先熟悉计算器的常用键，如 $\boxed{\text{AC/ON}}$ 键是开机(清除)键，

典型题例解析
了解考题形式

名师解题

例 1 求下列各数的平方根和算术平方根.

(1)0.002 5；(2)$2\frac{1}{4}$；(3)$(-6)^2$；(4)3^2+4^2；(5)0；

(6)$(-2)\times(-8)$.

解析 因为开平方运算是平方运算的逆运算，因此可以通过平方运算来求一个数的平方根，也可以检验一个数是不是另一个数的平方根.

(1)因为 $(\pm 0.05)^2=0.002\ 5$，

所以 0.002 5 的平方根是 ± 0.05，算术平方根是 0.05.

(2)因为 $2\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$，而 $\left(\pm\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$，

所以 $2\frac{1}{4}$ 的平方根是 $\pm\frac{3}{2}$，算术平方根是 $\frac{3}{2}$.

(3)因为 $(-6)^2=(\pm 6)^2$，

所以 $(-6)^2$ 的平方根是 ± 6，算术平方根是 6.

(4)因为 $3^2+4^2=5^2=(\pm 5)^2$，所以 3^2+4^2 的平方根是 ± 5，算术平方根是 5.

(5)因为 $0^2=0$，所以 0 的平方根是 0，算术平方根是 0.

(6)因为 $(-2)\times(-8)=(\pm 4)^2$，

所以 $(-2)\times(-8)$ 的平方根是 ± 4，算术平方根是 4.

例 2 求下列各式中的未知数 x.

(1)$x^2-121=0$；

(2)$(x-2)^2=100$；

解析 此题用解方程的形式加深对平方根定义的理解，同时为将来学习一元二次方程打下坚实的基础.

(1)$\because x^2-121=0$，

$\therefore x^2=121$(表示 x 是 121 的平方根)，

$\therefore x=\pm\sqrt{121}$，

$\therefore x=\pm 11$.

(2)$\because (x-2)^2=100$(表示 $x-2$ 是 100 的平方根)，

$\therefore x-2=\pm\sqrt{100}$，

$\therefore x-2=10$，或 $x-2=-10$，

$\therefore x=12$，或 $x=-8$.

要关机按$\boxed{\text{OFF}}$键,那么如何求一个非负数的算术平方根呢?例如:求169的算术平方根,在计算器上依次键入$\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{1}$ $\boxed{6}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$,则计算器的显示结果为13,所以169的算术平方根为13,可表示为$\sqrt{169}=13$.

7 对记号$\sqrt{a}$,$-\sqrt{a}$,$\pm\sqrt{a}$的理解

(1)$\sqrt{a}(a\geqslant0)$表示非负数,即$\sqrt{a}\geqslant0$.它是a的算术平方根.

(2)$-\sqrt{a}(a\geqslant0)$表示a算术平方根的相反数,或者说表示a的负的平方根.

(3)$\pm\sqrt{a}(a\geqslant0)$表示a的平方根,a的平方根有两个,它们互为相反数.

(4)$a<0$时,$\sqrt{a}$,$-\sqrt{a}$,$\pm\sqrt{a}$皆无意义.

8 立方根的意义

如果一个数的立方等于a,那么这个数就叫做a的立方根.(见例3)

9 立方根的表示方法

数a的立方根,记作$\sqrt[3]{a}$,读作"三次根号a",其中a是被开方数,3是根指数.

10 立方根的性质

由立方根的定义可以得到立方根的性质:

(1)正数有一个正的立方根;

(2)负数有一个负的立方根;

(3)零的立方根是零.

注意:立方根的性质与平方根的性质不同,负数有立方根,但没有平方根,例如-64的立方根为-4,但-64没有平方根.

11 开立方是立方的逆运算

正如开平方是平方运算的逆运算一样,开立方运算也是立方运算的逆运算,例如:

$2^3=?$,这是求2的三次幂,等于8,8叫做幂,属乘方运算,$\sqrt[3]{8}=?$这是求8的三次方根,等于2,2叫立方根,属开立方运算.

12 怎样求一个数的立方根

方法一:由立方根的定义,求一个完全立方数的立方根.

例如:求$-91\frac{1}{8}$的立方根.

解:$\because -91\frac{1}{8}=-\frac{729}{8}$,而$(-\frac{9}{2})^3=-\frac{729}{8}$,

$\therefore$ $-91\frac{1}{8}$的立方根是$-\frac{9}{2}$.

方法二:查立方根表.

方法三:利用计算器求立方根.

13 怎样求负数的立方根

因为负数有一个负立方根,根据这一性质可以得到:如果$a>0$,那么$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$.

例3 求下列各数的立方根.

(1)729;(2)$-2\frac{10}{27}$;(3)±0.343.

解析 根据开立方与立方互为逆运算的关系,可以通过立方的方法求一个数的立方根,其中±0.343表示0.343与-0.343两个数.

(1)$\because 9^3=729$,$\therefore$ 729的立方根是9,即$\sqrt[3]{729}=9$.

(2)$\because -2\frac{10}{27}=-\frac{64}{27}$,$(-\frac{4}{3})^3=-\frac{64}{27}$

$\therefore -\frac{64}{27}$的立方根是$-\frac{4}{3}$,即$\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}=\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=-\frac{4}{3}$.

(3)$\because 0.7^3=0.343$,$(-0.7)^3=-0.343$,

$\therefore$ $\sqrt[3]{\pm0.343}=\pm0.7$.

例4 求下列各式的值.

(1)$-\sqrt[3]{-\frac{64}{343}}$;　　(2)$\sqrt[3]{1-0.973}$;

(3)$-\sqrt[3]{4+\frac{17}{27}}$;　　(4)$\sqrt[3]{24\times90\times100}$.

解析 (1)根据立方根的性质,可以将负号移至根号外;(2)、(3)应注意运算顺序,先做加减法;(4)应先将数字化为质因数的形式.

(1)$-\sqrt[3]{-\frac{64}{343}}=\sqrt[3]{\frac{64}{343}}=\frac{4}{7}$;

(2)$\sqrt[3]{1-0.973}=\sqrt[3]{0.027}=0.3$;

(3)$-\sqrt[3]{4+\frac{17}{27}}=-\sqrt[3]{4\frac{17}{27}}=-\sqrt[3]{\frac{125}{27}}=-\frac{5}{3}$.

(4)$\sqrt[3]{24\times90\times100}=\sqrt[3]{2^3\times3\times5\times2\times3^2\times10^2}$

$=\sqrt[3]{2^3\times3^3\times10^3}=2\times3\times10=60$.

例5 求下列各式中的x.

(1)$125x^3+343=0$;　　(2)$(x-5)^3=-729$.

解析 (1)$\because 125x^3=-343$,$x^3=-\frac{343}{125}$,

$\therefore$ $x=\sqrt[3]{-\frac{343}{125}}=-\frac{7}{5}$.

(2)两边开立方得 $x-5=\sqrt[3]{-729}$,

$\therefore$ $x-5=-9$,$\therefore$ $x=-4$.

例6 先用计算器求值,再将各组数从小到大排列,并总结其规律.

(1)$\sqrt[3]{413}$,$\sqrt[3]{234}$,$\sqrt[3]{132}$,$\sqrt[3]{43}$;

(2)$\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$,$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$,$\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$,$\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$.

解析 我们已经学会了被开方数为整数的计算器求值法,当被开方数为分数时,又将如何操作呢?如$\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$,依次键入$\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ $\boxed{(}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{5}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$,显示结果为0.843 432 665,可取四位有效数字.

(1)$\sqrt[3]{413}\approx4.508$,$\sqrt[3]{234}\approx3.911$,$\sqrt[3]{132}\approx3.390$,$\sqrt[3]{43}\approx2.561$,

$\therefore \sqrt[3]{43}<\sqrt[3]{132}<\sqrt[3]{234}<\sqrt[3]{413}$.

例如，$\sqrt[3]{-64}=-\sqrt[3]{64}=-4$.

注意：这个性质，对于平方根来说是完全不能适用的，因为负数没有平方根.

14 用计算器求一个数的立方根

用计算器求一个数的立方根，只需直接按一定顺序按键. 例如：求 1 331 的立方根，在计算器上依次键入 $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ $\boxed{1}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{=}$，则计算器的显示结果为 11，因此 $\sqrt[3]{1\ 331}=11$. 求一个负数的立方根，例如：求 -729 的立方根. 可采取两种方法：方法 1：在计算器上依次键入 $\sqrt[3]{\ }$ $\boxed{-}\boxed{7}\boxed{2}\boxed{9}\boxed{=}$，则显示的结果为 -9，$\therefore \sqrt[3]{-729}=-9$；方法 2：先求 729 的立方根，再求它的相反数，在计算器上依次键入 $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ $\boxed{7}\boxed{2}\boxed{9}\boxed{=}$，则显示的结果为 9，再得到 $-\sqrt[3]{729}=-9$.（见例 6）

15 n 次方根的定义

一般地，如果一个数的 n 次方等于 a，那么这个数叫做 a 的 n 次方根，即若 $x^n=a$（n 为正整数），则 x 叫做 a 的 n 次方根.

16 正数、零、负数的 n 次方根

(1) 当 n 为偶数时：

①正数的 n 次方根有两个，它们互为相反数；

②零的 n 次方根有一个，仍然是 0.

③负数的 n 次方根不存在.

(2) 当 n 为奇数时：

①正数的 n 次方根有一个，仍为正数；

②零的 n 次方根有一个，仍然是 0；

③负数的 n 次方根有一个，仍为负数.（见例 7）

思维能力拓展

17 利用算术平方根的意义解题

例如：已知 $\sqrt{a}+|b-3|=0$，求 a 和 b 的值.

本题求 a、b 的值，可根据条件得到关于 a、b 的方程组进行求解. 由 $\sqrt{a}$ 及 $|b-3|$ 均为非负数，再由非负数的性质"几个非负数的和为零". 可知，这几个数均为 0，因为 $\sqrt{a}\geqslant 0$，$|b-3|\geqslant 0$，又 $\sqrt{a}+|b-3|=0$. 所以 $\sqrt{a}=0$，$|b-3|=0$，得 $a=0$，$b=3$.

注意：非负数的特性"几个非负数的和为零，则这几个非负数均为零"常用于字母求值问题. 要熟悉几种常见形式的非负数，如平方数、绝对值、算术平方根等.

综合创新运用

18 用算术平方根的意义解决实际问题

例如：如图 16-1-1，在一块正方形白铁皮的右

(2) $\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\approx 0.843\ 4$，$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\approx 0.873\ 6$，$\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\approx 1.186$，

$\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\approx 1.357$，

$\therefore \sqrt[3]{\frac{3}{5}}<\sqrt[3]{\frac{2}{3}}<\sqrt[3]{\frac{5}{3}}<\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$.

规律：本题的根指数相同，而被开方数不同，通过显示结果可以知道，当根指数不变时，被开方数越大，值越大，即当根指数不变时，值随着被开方数的增大而增大.

例 7 (1) 求 64 的六次方根；　(2) 求 -128 的七次方根；

(3) 求 $\frac{1}{32}$ 的五次方根；　(4) 求 -243 的五次方根；

(5) 625 的四次方根.

解析 此题能够使我们进一步理解 n 次方根的概念及 n 次方根的性质，解题时注意偶次方根与奇次方根的区别.

(1) $\because 2^6=64$，$(-2)^6=64$，

$\therefore$ 64 的六次方根是 ± 2，即 $\pm\sqrt[6]{64}=\pm 2$.

(2) $\because (-2)^7=-128$，$\therefore -128$ 的七次方根是 -2.

即 $\sqrt[7]{-128}=-2$.

(3) $\because \left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$，$\therefore \frac{1}{32}$ 的五次方根是 $\frac{1}{2}$，即 $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=\frac{1}{2}$.

(4) $\because (-3)^5=-243$，$\therefore -243$ 的五次方根是 -3.

即 $\sqrt[5]{-243}=-3$.

(5) $\because 5^4=625$，$(-5)^4=625$，$\therefore$ 625 的四次方根是 ± 5，

即 $\pm\sqrt[4]{625}=\pm 5$.

例 8 已知 $\sqrt{2x^2-18}+|y+2|=0$，求 x，y 的值.

解析 算术平方根、绝对值、偶次幂都是非负数，而如果非负数相加得 0 的话，则各个非负数必为 0.

由题意可知，

$$\begin{cases}2x^2-18=0, & ①\\ y+2=0. & ②\end{cases}$$

由①，得

$$2x^2=18$$
$$x^2=9$$
$$x=\pm 3.$$

由②，得

$$y+2=0.$$
$$y=-2.$$

所以　$x=\pm 3$，$y=-2$.

例 9 对于代数式 $3a+6$，当 a 为何值时，

(1) 有两个平方根，且这两个平方根互为相反数？

(2) 只有一个平方根？

(3) 没有平方根？

解析 本题要求符合相关条件的 a 的取值范围. 由于问题涉及到平方根的存在性，因此，可考虑利用正数、零和负数的平方根的存在规律，列出相应的不等式或方程，通过求解所列不等式或方程，

上角切去一个边长为 3 cm 的小正方形,若余下部分的面积为 16 cm^2,求这块正方形铁皮原来的边长.

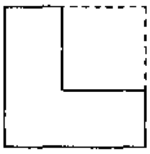

图 16-1-1

解析:本题要求原正方形铁皮的边长,可先求出其面积,再利用算术平方根意义求出边长.由题意可知,切去的小正方形面积与余下部分的面积的和等于原正方形铁皮的面积,从而由条件所给数据即可求得原正方形铁皮的面积.

由题意得,原正方形铁皮的面积为 $3^2+16=25(cm^2)$,

而 25 的算术平方根是 $\sqrt{25}=5$.

答:原正方形铁皮的边长是 5 cm.

求得所要确定的 a 的取值范围.

(1)代数式 $3a+6$ 有两个平方根,它们互为相反数,则应有:

$$3a+6>0,$$

解这个不等式,得 $a>-2$.

所以当 $a>-2$ 时,代数式 $3a+6$ 有两个平方根,它们互为相反数.

(2)代数式 $3a+6$ 只有一个平方根,则应有 $3a+6=0$.

解这个方程,得 $a=-2$.

(3)代数式 $3a+6$ 没有平方根,则应有 $3a+6<0$.

解这个不等式,得 $a<-2$.

所以当 $a<-2$ 时,代数式 $3a+6$ 没有平方根.

例10 如果 a 是一个数的完全平方数,那么与它相邻且比它大的完全平方数是什么?

解析 解此题的关键是理解题意,由于 a 是一个数的完全平方数,我们不妨将数设为 x,则可以得到 $x^2=a$,那么 $x=\pm\sqrt{a}$,那么与它相邻且比它大的数为 $\sqrt{a}+1$ 或 $-\sqrt{a}-1$,由此得到它的完全平方数为 $(\sqrt{a}+1)^2$ 或 $(-\sqrt{a}-1)^2$,即 $(\sqrt{a}+1)^2$.

解:由于 a 是一个数的完全平方数,

不妨设 $x^2=a$,则 $x=\pm\sqrt{a}$.

那么与它相邻且比它大的完全平方数为 $(x+1)^2$ 或 $(x-1)^2$,

也就是 $(\sqrt{a}+1)^2$ 或 $(-\sqrt{a}-1)^2$,即 $(\sqrt{a}+1)^2$.

素质能力测试

(一)选择题

1. 下列各数没有平方根的是(　　)

A. -2^2　　B. $(-2)^2$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. 2^3

2. 下列式子中运算错误的是(　　)

A. $\pm\sqrt{0.04}=\pm0.2$　　B. $\sqrt{9}=\pm3$

C. $-\sqrt{121}=-11$　　D. $\sqrt{49}=7$

3. $\sqrt{256}$的平方根是(　　)

A. 16　　B. ±16　　C. 4　　D. ±4

4. 下列说法正确的是(　　)

A. 负数没有立方根

B. 一个正数的立方根有两个,它们互为相反数

C. 如果一个数有立方根,则它必有平方根

D. 不为 0 的任何数的立方根,都与这个数本身的符号同号

5. 如果一个数的平方根与立方根相等,这样的数有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 无数个

6. $\sqrt[3]{64}$的平方根是(　　)

A. 4　　B. ±8　　C. 2　　D. ±2

(二)填空题

7. 64 的平方根是________,算术平方根是________.

8. 0.014 4 的平方根是________,算术平方根是________.

9. $(-1.21)^2$ 的平方根是________,算术平方根是________.

10. $\sqrt{25}$的平方根是________,算术平方根是________.

11. $(\sqrt{64}-\sqrt{36})$的平方根是________,算术平方根是________.

12. 如果 $x^3=-8$,那么 x 叫做 -8 的________,$x=$________.

点击知识点

1~3. 平方根及算术平方根的定义

4. 平方根与立方根的性质

5~14. 平方根与立方根的定义及表示方法

13. $\frac{64}{125}$的立方根是________.

14. 一个数的立方根是它本身,这个数是________.

(三)解答题

15. 求下列各式的值

15. 求平方根与立方根

(1)$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2}$.

(2)$\pm\sqrt{1\frac{11}{25}}$.

(3)$-\sqrt{(-6)\times(-216)}$.

(4)$\sqrt{5^2-4^2}$.

(5)$\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{9}{4}}+\sqrt{1\frac{9}{16}}-\sqrt{\frac{1}{16}}$.

(6)$\pm\sqrt[3]{1\,000}$.

(7)$-\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

(8)$\sqrt[3]{\frac{19}{27}-1}$.

16. 已知$(x-1)^2+5\sqrt{y-5x}+|x-y+z+1|=0$,求$x+y+z$的平方根.

16. $\sqrt{a}$的理解

17. 若正数M的两个平方根为$2m-3$和$4m-5$,求M的值.

17. 平方根定义的理解

18. 一个圆柱体的体积为3 641立方厘米,高是12厘米,该圆柱体的底面半径是多少厘米?

18、19. 平方根与立方根的实际应用

19. 有一个形状为正方体的纸箱,它的体积是80立方厘米,请你估计一下这个正方体的边长大约是多少厘米?(精确到0.1厘米)

20. 举例说明什么样的数的立方根等于它本身?什么样的数的立方根大于它本身?什么样的数的立方根小于它本身?

20. 立方根

21. 若$|a-b+2|$与$\sqrt{a+b-1}$互为相反数,求$\sqrt[3]{22a+2b}$的值.

21. 平方根与立方根的综合应用

§16.2 二次根式

同步教材研读
名师解疑释惑

典型题例解析
了解考题形式

知识要点归纳

1 二次根式的概念

形如$\sqrt{a}(a\geqslant0)$的式子叫做二次根式. 实际上它是一个非负数 a 的算术平方根. 对于二次根式的概念,可以从以下几个方面来理解:

(1)从表达形式上看,二次根式必须含有二次根号"$\sqrt{\ }$".

(2)二次根式中的被开方数 a 既可以表示一个数,也可以表示一个代数式,但必须保证$\sqrt{a}$有意义. 由平方根的意义可知,a 必须是非负数,也就是说,a 如果表示数,必须是非负数,如果表示代数式,那么这个代数式的值也必须是非负数.

(3)式子$\sqrt{a}(a\geqslant0)$既表示二次根式,又表示非负数 a 的算术平方根,因此式子$\sqrt{a}\geqslant0$,也就是说,二次根式一定是非负数,所以$\sqrt{a}$中不但 a 是非负数,$\sqrt{a}$也是非负数,即$\sqrt{a}$中,$a\geqslant0$,$\sqrt{a}\geqslant0$.

(4)形如$b\sqrt{a}(a\geqslant0)$的式子是不是二次根式呢? 首先我们考虑$b\sqrt{a}$的意义,它表示 b 与$\sqrt{a}$的乘积,如$2\sqrt{3}$表示$2\times\sqrt{3}$,因此它是二次根式. 如$-\frac{1}{3}\sqrt{2}$表示$-\frac{1}{3}$与$\sqrt{2}$乘积,它是二次根式,$\frac{8}{3}\sqrt{5}$也是二次根式,但要注意不能写成$2\frac{2}{3}\sqrt{5}$,也就是说,当 b 为带分数时,要改写成假分数,这和代数式的书写要求是一致的.

2 确定二次根式中被开方数的取值范围

由于$\sqrt{a}$表示一个正数 a 的正的平方根,因此根据算术平方根的定义,要使$\sqrt{a}$有意义,被开方数 a 就必须是非负数,即 $a\geqslant0$. 由此可以确定二次根式中被开方数的取值范围.(见例 2)

3 二次根式的性质

(1)$\sqrt{a}\geqslant0(a\geqslant0)$. 因为$\sqrt{a}(a\geqslant0)$表示非负数 a 的算术平方根,所以由算术平方根的定义可得$\sqrt{a}\geqslant0$.

(2)$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$. 由于$\sqrt{a}(a\geqslant0)$表示非负数 a 的算术平方根,将非负数 a 的算术平方根平方,就等于它本身 a,因此有$(\sqrt{a})^2=a$. 如果我们将公式$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$逆用,即$a=(\sqrt{a})^2(a\geqslant0)$,那么就可

名师解题

例1 在式子$\sqrt{3}$, $\sqrt{x^2+1}$, $\sqrt{a+1}(a=-3)$, $\sqrt{\frac{y}{2}}(y>0)$, $\sqrt{-2x}(x<0)$和a^2-1中,是二次根式的有(　　)

A. 2个　　B. 3个　　C. 4个　　D. 5个

解析 二次根式有两个特点,一是式子必须含有二次根号,二是被开方数不能为负数. 因为$3>0$,$x^2+1>0$,所以$\sqrt{3}$, $\sqrt{x^2+1}$是二次根式;当$y>0$时,$\frac{y}{2}>0$;当$x<0$时,$-2x>0$,所以$\sqrt{\frac{y}{2}}(y>0)$, $\sqrt{-2x}(x<0)$也是二次根式;因为a^2-1不含二次根号;$a=-3$时,$a+1=-2<0$,所以a^2-1, $\sqrt{a+1}(a=-3)$不是二次根式,故二次根式有 4 个,应选 C.

例2 x 是怎样的实数时,下列各式在实数范围内有意义?

(1)$\sqrt{10-3x}$;　(2)$\sqrt{-(x-2)^2}$;　(3)$\sqrt{x^2+1}$;

(4)$\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}$.

解析 利用二次根式有意义的要求,可把每一个问题转化为解相应的不等式或不等式组.

(1)由题意,得$10-3x\geqslant0$,解这个不等式,得$x\leqslant\frac{10}{3}$.

所以当$x\leqslant\frac{10}{3}$时,式子$\sqrt{10-3x}$有意义.

(2)由题意,得$-(x-2)^2\geqslant0$,所以$(x-2)^2\leqslant0$. 又因为$(x-2)^2\geqslant0$,所以$(x-2)^2=0$. 即$x=2$.

所以当$x=2$时,式子$\sqrt{-(x-2)^2}$有意义.

(3)由题意,得$x^2+1\geqslant0$,此式对任意实数 x 都成立,所以当 x 为任意实数时,式子$\sqrt{x^2+1}$都有意义.

(4)由题意,得$\begin{cases}x+3\geqslant0,\\3-x\geqslant0.\end{cases}$解这个不等式组,得$-3\leqslant x\leqslant3$.

所以当$-3\leqslant x\leqslant3$时,式子$\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}$有意义.

例3 计算:

(1)$(\sqrt{7})^2-\sqrt{25}$;　(2)$-(\sqrt{x+3})^2$;

(3)$[(-\sqrt{-a})^2]^3$;　(4)$(\sqrt{x+15})^2-(\sqrt{x+5})^2$.

解析 利用式子$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$进行计算.

(1)原式$=7-5=2$;　(2)原式$=-(x+3)=-x-3$;

(3)原式$=(-a)^3=-a^3$;

(4)原式$=(x+15)-(x+5)=x+15-x-5=10$.

以利用此公式把任意一个非负数写成一个数的平方的形式.而负数就不能写成一个数的平方的形式.

4. $\sqrt{a^2}$与$(\sqrt{a})^2$ 的异同

$(\sqrt{a})^2$ 表示 a 的算术平方根的平方,因此只有当 $a\geqslant0$ 时,此式才有意义.而$\sqrt{a^2}$表示 a^2 的算术平方根,a 的取值范围不仅是非负数,负数也可以,原因是任何数的平方都是非负数,即 $a^2\geqslant0$.也就是说,无论 a 为正数、负数或零,都有 a^2 为非负数.所以$\sqrt{a^2}$总是有意义的.如 a 为-5 时,$\sqrt{a}$无意义,而$\sqrt{a^2}=\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5$ 是有意义的.又如:$a=5$ 时,$\sqrt{5}$有意义,且$(\sqrt{5})^2=5$,$\sqrt{a^2}=\sqrt{5^2}=\sqrt{25}=5$,此时$(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}(a\geqslant0)$.即当 $a\geqslant0$ 时,$(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}$;当 a 为任意实数时,$\sqrt{a^2}$都有意义,且有$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant0),\\-a(a\leqslant0),\end{cases}$即$\sqrt{a^2}$的意义与$|a|$的意义是相同的.如$\sqrt{5^2}=|5|=5$,$\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5$.由此可知,$\sqrt{a^2}$与$(\sqrt{a})^2$ 的不同之处是 a 的取值范围不同,但当 $a\geqslant0$ 时,$(\sqrt{a^2})=\sqrt{a^2}=a$.(见例 4)

5. 二次根式的乘法

公式$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant0,b\geqslant0)$.

将二次根式相乘转化为被开方数相乘,运算结果要尽量化简,将根号内能开得尽的因式移到根号外面.(见例 5)

6. 积的算术平方根的性质

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$.

这就是说:积的算术平方根,等于积中各因式的算术平方根的积.

注意:$a\geqslant0,b\geqslant0$ 是公式成立的条件,如果不满足这个条件,等式的右端就没有意义,等式也就不能成立了.(见例 6)

7. 根号内因式向根号外移动的根据

使用公式:$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant0)$.

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$.

8. 把根号外面的非负因式平方以后移到根号里面

使用公式:$a=\sqrt{a^2}(a\geqslant0)$.(见例 7)

9. 二次根式的除法

公式:$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}(a\geqslant0,b>0)$.

上面的公式实质上是商的算术平方根运算法则的逆用.

10. 商的算术平方根的性质

$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant0,b>0)$.

例 4 化简二次根式 $\sqrt{(3-\pi)^2}$.

解析 本题考查学生应用公式$\sqrt{a^2}=|a|$的能力,其关键在于确定符号.

因为　　$3<\pi$,

所以　　$3-\pi<0$.

所以　　$\sqrt{(3-\pi)^2}=|3-\pi|=\pi-3$.

例 5 计算:

(1) $\sqrt{10}\times\sqrt{7}$;　　(2)$\sqrt{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{128}$;

(3)$\dfrac{3}{4}\sqrt{18ab}\cdot\left(-\dfrac{2}{a}\sqrt{\dfrac{6b^2}{a}}\right)$;　　(4)$(2\sqrt{3}+\sqrt{6})(2\sqrt{3}-\sqrt{6})$.

解析 此题是运用二次根式的乘法公式来进行计算的.有理数的乘法运算律及乘法公式对于二次根式都适用,计算后的结果应尽量化简:

(1) $\sqrt{10}\times\sqrt{7}=\sqrt{10\times7}=\sqrt{70}$.

(2)$\sqrt{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{128}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\times128}=\sqrt{64}=8$.

(3)$\dfrac{3}{4}\sqrt{18ab}\cdot\left(-\dfrac{2}{a}\sqrt{\dfrac{6b^2}{a}}\right)$

$=\left[\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{2}{a}\right)\right]\left(\sqrt{18ab}\cdot\sqrt{\dfrac{6b^2}{a}}\right)$

$=-\dfrac{3}{2a}\sqrt{18ab\cdot\dfrac{6b^2}{a}}=-\dfrac{3}{2a}\sqrt{6^2\times3b^3}$

$=-\dfrac{3}{2a}\cdot6b\sqrt{3b}=-\dfrac{9b}{a}\sqrt{3b}$.

(4)$(2\sqrt{3}+\sqrt{6})(2\sqrt{3}-\sqrt{6})=(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2$

$=4\times3-6=12-6=6$.

例 6 化简:

(1) $\sqrt{48}$;　　(2) $\sqrt{8a^3b}$;

解析 逆用$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant0,b\geqslant0)$得$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$,运用它要先把被开方数分解成一个数与质因数的积,再运用$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant0)$进行化简.

(1) $\sqrt{48}=\sqrt{16\times3}=\sqrt{16}\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

(2) $\sqrt{8a^3b}=\sqrt{2^2a^2\cdot2ab}=\sqrt{(2a)^2}\cdot\sqrt{2ab}=2a\sqrt{2ab}$.

例 7 把下列各式根号外的因式移到根号内.

(1)$5\sqrt{\dfrac{3}{5}}$;　(2)$-3\sqrt{2}$;　(3)$-2a\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2a}}$.

解析 将根号外的因式移到根号内时,要将根号外的数写成平方的形式作为被开方数.如 $5=\sqrt{5^2}$,实际上是运用公式 $a=\sqrt{a^2}(a\geqslant0)$.此题还用到了公式$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant0,b\geqslant0)$.如果根号外有负号,则不能移到根号内,如$-3\sqrt{2}=-\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2}=-\sqrt{3^2\times2}=-\sqrt{18}$.移到根号内的因式或因数必须是正数或正的因式,但有些字母的取值需从被开方数中判断,如(3)小题.

(1)$5\sqrt{\dfrac{3}{5}}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{5}}=\sqrt{25\times\dfrac{3}{5}}=\sqrt{15}$.

这就是说，商的算术平方根等于被除式的算术平方根除以除式的算术平方根.

注意：$a\geqslant0$，$b>0$ 是公式成立的条件，否则等式右端无意义，等式就不成立了.

11 化去二次根号内的分母

在根式的运算中，要求最后的结果中根号内不含分母，因此，如果根号内含有分母，应该化去. 同时注意：

(1)在化去二次根号中的分母时，首先应对分母进行质因数分解，进而确定要同乘的数；

(2)根号内的分母移到根号外面时，仍然是分母，应防止$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{2^2}}=2\sqrt{2}$的错误.

12 分母化成有理式（分母有理化）

运用二次根式的除法运算公式可将分母中的根号去掉. 今后的二次根式的运算结果要求尽量化简，其中有一个要求就是分母不带根号.（见例10）

13 二次根式的分解因式

由于 $a=(\sqrt{a})^2$，$b=(\sqrt{b})^2$（$a\geqslant0$，$b\geqslant0$），所以可得 $a-b=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$，运用它可将分母中含有根式的多项式化成有理式.

14 同类二次根式

几个二次根式化成最简二次根式以后，如果被开方数相同，这几个二次根式就叫做同类二次根式. 同类二次根式与整式中的同类项相类似，如：$-2\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{3}$是同类二次根式，$3\sqrt{ab}$与$-5\sqrt{ab}$也是同类二次根式. 又如：$\sqrt{8}$与$\sqrt{18}$需要化简后再判断，$\because\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，$\therefore\sqrt{8}$与$\sqrt{18}$是同类二次根式；$\sqrt{125}$与$\sqrt{\frac{1}{45}}$，$\because\sqrt{125}=5\sqrt{5}$，而$\sqrt{\frac{1}{45}}=\sqrt{\frac{1\times5}{45\times5}}=\frac{\sqrt{5}}{3\times5}=\frac{\sqrt{5}}{15}$，$\therefore\sqrt{125}$与$\sqrt{\frac{1}{45}}$是同类二次根式；$\sqrt{12}$与$\sqrt{18}$，$\because\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，它们的被开方数不同，$\therefore\sqrt{12}$与$\sqrt{18}$不是同类二次根式.

15 如何合并同类二次根式

合并同类二次根式与合并同类项相类似.

例如：$3a^2b-2a^2b+\frac{1}{2}a^2b=\left(3-2+\frac{1}{2}\right)a^2b=\frac{3}{2}a^2b$，即系数相加减，字母与字母的指数不变，类似地，合并同类二次根式，如 $3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}=\left(3-2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，就是将同类二次根式的系数相加减，根式与被开方数保持不变.

16 同类二次根式定义的理解

(1)判断是否是同类二次根式时，首先要将被开方数化简，化简结果应满足：①被开方数中不含能开

$(2)-3\sqrt{2}=-\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2}=-\sqrt{3^2\times2}=-\sqrt{18}$.

(3)由$\frac{1}{2a}>0$，得 $a>0$，

$\therefore -2a\sqrt{\frac{1}{2a}}=-\sqrt{(2a)^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2a}}=-\sqrt{4a^2\cdot\frac{1}{2a}}=-\sqrt{2a}$.

例8 比较下列各组数的大小.

(1)5 与 $2\sqrt{6}$；　　(2)$7\sqrt{2}$与$3\sqrt{11}$；

解析 比较二次根式的大小主要是通过比较二次根式的被开方数的大小来实现的.

(1)$5=\sqrt{25}$，$2\sqrt{6}=\sqrt{24}$，

$\because\sqrt{25}>\sqrt{24}$，$\therefore5>2\sqrt{6}$.

(2)$7\sqrt{2}=\sqrt{98}$，$3\sqrt{11}=\sqrt{99}$，

$\because\sqrt{98}<\sqrt{99}$，$\therefore7\sqrt{2}<3\sqrt{11}$.

例9 去掉下列各根式内的分母.

(1)$3\sqrt{\frac{2y}{3x}}$（$x>0$）；

(2)$\sqrt{\frac{x+5}{3+x}}$；

(3)$\sqrt{\frac{x-1}{x^3(x+1)}}$（$x>1$）；

(4)$\sqrt{\frac{(m-n)(m^2-n^2)}{m^2+2mn+n^2}}$（$m>n>0$）.

解析 去掉根式内的分母，一般情况下要先将分母的多项式进行因式分解，然后再找各因式的有理化因式.

(1)原式$=3\sqrt{\frac{2y\cdot3x}{(3x)^2}}=\frac{3}{3x}\sqrt{6xy}=\frac{1}{x}\sqrt{6xy}$.

(2)原式$=\sqrt{\frac{(x+5)(3+x)}{(3+x)^2}}=\frac{1}{3+x}\sqrt{x^2+8x+15}$.

(3)原式$=\sqrt{\frac{(x-1)\cdot x\cdot(x+1)}{x^6(x+1)^2}}=\frac{1}{x^3(x+1)}\sqrt{x^3-x}$.

(4)原式$=\sqrt{\frac{(m-n)^2(m+n)}{(m+n)^2}}=\frac{m-n}{m+n}\sqrt{m+n}$.

例10 计算：

(1)$\frac{2\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$；　　(2)$\frac{5}{3\sqrt{5}-7}+\frac{5}{3\sqrt{5}+7}$.

解析 (1)原式$=\frac{(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$

$=\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{6}-8\sqrt{3}+8}{4}$

$=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}-4\sqrt{3}+4}{2}$.

(2)原式$=\frac{5(3\sqrt{5}+7)+5(3\sqrt{5}-7)}{(3\sqrt{5}-7)(3\sqrt{5}+7)}$

$=\frac{15\sqrt{5}+35+15\sqrt{5}-35}{-4}$

$=-\frac{15}{2}\sqrt{5}$.

得尽方的因数或因式；②被开方数中不含有分母．然后看被开方数是否相同，如果相同就是同类二次根式，如果不相同就不是同类二次根式．

（2）同类二次根式的判断主要看被开方数和根指数，与根式的系数无关．（见例 11）

17．二次根式的加减法

二次根式的加减实质上就是合并同类二次根式．一般按以下三个步骤进行：

（1）将每个二次根式都化简；

（2）找出化简后的同类二次根式；

（3）合并同类二次根式．

一定要注意不是同类二次根式是不能合并的．不要犯类似$\sqrt{3}+3\sqrt{5}=4\sqrt{15}$的错误．（见例 12）

18．二次根式加减法中的几个注意点

（1）二次根式的加减运算的实质就是合并同类二次根式，因此正确地化简二次根式及准确地判断同类二次根式是解题的关键．二次根式的加减运算与整式的加减运算相类似，只需将二次根式的系数相加减，二次根式不变，被开方数也不变．不要把不是同类二次根式的根式进行加减运算．如$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$，$2+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$，$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})$，$a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=(a+b)\sqrt{ab}$都是错误的，运算时一定要注意．

（2）在二次根式的加减运算中，加法运算律中的交换律和结合律、去括号和添括号法则都是适用的．

（3）二次根式加减运算的结果应是化简后的几个二次根式的和或整式，系数有带分数的一定要化成假分数．

思维能力拓展

19．二次根式的意义的应用

例如：若 m 适合关系式 $\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=\sqrt{x-199+y}\cdot\sqrt{199-x-y}$，试确定 m 的值．

本题式子较长，要注意观察找出一些被开方数间的关系，注意到 $x-199+y$ 与 $199-x-y$ 互为相反数，而且 $x-199+y\geqslant0$，$199-x-y\geqslant0$ 同时成立，故有 $x-199+y=0$，$x+y=199$，代入已知等式中，就可以得 $\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=0$．又由算术平方根都是非负数知 $\sqrt{3x+5y-2-m}=0$，$\sqrt{2x+3y-m}=0$，从而有

$$\begin{cases}3x+5y-m-2=0, & ①\\ 2x+3y-m=0, & ②\\ x+y=199. & ③\end{cases}$$

②×2−①，得 $x+y-m+2=0$．　④

③代入④，得 $m=199+2=201$．

所以 $m=201$．

例11　化简下列各二次根式，并指出哪些是同类二次根式？

$\sqrt{3a^4}$，$\sqrt{\dfrac{1}{a}}$，$\sqrt{a^3}$，$\sqrt{48a}$，$\sqrt{\dfrac{a}{50}}$．

解析　判断几个二次根式是否为同类二次根式，先要把各个二次根式进行化简，化简后被开方数完全相同的二次根式才是同类二次根式．

因为 $\sqrt{3a^4}=\sqrt{3a\cdot a^2}=a\sqrt{3a}$；

$\sqrt{\dfrac{1}{a}}=\sqrt{\dfrac{a}{a^2}}=\dfrac{1}{a}\sqrt{a}$；

$\sqrt{a^3}=\sqrt{a\cdot a^2}=a\sqrt{a}$；

$\sqrt{48a}=\sqrt{16\times3a}=4\sqrt{3a}$；

$\sqrt{\dfrac{a}{50}}=\sqrt{\dfrac{2a}{100}}=\dfrac{1}{10}\sqrt{2a}$．

所以，$\sqrt{3a^3}$ 与 $\sqrt{48a}$ 是同类二次根式，$\sqrt{\dfrac{1}{a}}$ 与 $\sqrt{a^3}$ 是同类二次根式．

例12　计算：

（1）$3\sqrt{8}-2\sqrt{18}+5\sqrt{32}$；

（2）$7\sqrt{x}-3x\sqrt{\dfrac{1}{x}}+\dfrac{2}{x}\sqrt{x^3}$．

解析　二次根式的化简就是把各二次根式化简以后合并为同类二次根式，合并同类二次根式的方法类似于合并同类项．

（1）$3\sqrt{8}-2\sqrt{18}+5\sqrt{32}=6\sqrt{2}-6\sqrt{2}+20\sqrt{2}=20\sqrt{2}$；

（2）$7\sqrt{x}-3x\sqrt{\dfrac{1}{x}}+\dfrac{2}{x}\sqrt{x^3}=7\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2\sqrt{x}=6\sqrt{x}$．

例13　计算：

（1）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(2\sqrt{12}+4\sqrt{\dfrac{1}{8}}-3\sqrt{48}\right)$；

（2）$(2-\sqrt{5})^2-(2+\sqrt{5})^2$．

解析　二次根式的混合运算就像有理数的混合运算一样，也是先算乘方，再算乘除，最后算加减．运算时要灵活运用运算律、乘法公式及因式分解的方法，使运算过程简化．

（1）原式$=2\sqrt{6}+1-6\sqrt{6}=-4\sqrt{6}+1$；

（2）原式$=(2-\sqrt{5}+2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}-2-\sqrt{5})=4\cdot(-2\sqrt{5})$
$=-8\sqrt{5}$．

例13　已知 $x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$，$y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$，求 x^2-xy+y^2 的值．

解析　本题若直接代入计算较麻烦，可根据 x、y 的特点，先求得 $x+y=\sqrt{7}$，$xy=\dfrac{1}{2}$．如果将式子变成关于 $x+y$ 和 xy 的式子，再代入比直接代入求值简单得多．

因为　$x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$，$y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$，

所以　$x+y=\sqrt{7}$，$xy=\dfrac{1}{2}$．

所以　$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=(\sqrt{7})^2-3\times\dfrac{1}{2}=5\dfrac{1}{2}$．

解关于 x、y 的对称形式的式子的值，往往可考虑将其变形为关于 $x+y$、xy 的式子，再将 $x+y$、xy 的值整体代入计算．

20. $\sqrt{a^2}=|a|$的应用

例如　化简：$\sqrt{x^2+2x+1}$.

本题要化简二次根式，需先把被开方数因式分解，然后运用$\sqrt{a^2}=|a|$进行化简，但由于题中未给出x的范围，所以在去掉绝对值符号时必须加以讨论.

$\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$.

当$x+1\geqslant0$，即$x\geqslant-1$时，$|x+1|=x+1$；

当$x+1<0$，即$x<-1$时，

$|x+1|=-(x+1)=-x-1$.

例15　已知$9+\sqrt{11}$的小数部分是a，$9-\sqrt{11}$的小数部分是b，求$a\div b$.

解析　$\because 3<\sqrt{11}<4$，$\therefore 12<9+\sqrt{11}<13$，

又$\because -3>-\sqrt{11}>-4$，即$-4<-\sqrt{11}<-3$.

$\therefore 5<9-\sqrt{11}<6$.

$\therefore 9+\sqrt{11}$的整数部分是12，$9-\sqrt{11}$的整数部分是5.

$\therefore a=(9+\sqrt{11})-12=\sqrt{11}-3$，

$b=(9-\sqrt{11})-5=4-\sqrt{11}$.

$$\therefore a\div b=\frac{\sqrt{11}-3}{4-\sqrt{11}}=\frac{(\sqrt{11}-3)(4+\sqrt{11})}{(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})}$$

$$=\frac{4\sqrt{11}+11-12-3\sqrt{11}}{16-11}=\frac{1}{5}(\sqrt{11}-1).$$

素质能力测试

(一)选择题

1. 若$x>5$，则下列各式中没有意义的是（　　）

A. $\sqrt{x-5}$　　B. $\sqrt{5+x}$

C. $\sqrt{x^2-25}$　　D. $\sqrt{25-x^2}$

2. 如果$\sqrt{(x-2)^2}=x-2$，那么x的取值范围是（　　）

A. $x\leqslant2$　　B. $x<2$　　C. $x\geqslant2$　　D. $x>2$

3. 若$x<-1$，则$|2x-1|+\sqrt{x^2+2x+1}$等于（　　）

A. $1-x$　　B. $x-2$　　C. $3x$　　D. $-3x$

4. 计算：$\sqrt{18}\div\sqrt{\frac{3}{4}}\times\sqrt{\frac{4}{3}}$的结果是（　　）

A. $3\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $5\sqrt{2}$　　D. $6\sqrt{2}$

5. 下列各式中不成立的是（　　）

A. $\sqrt{(-4)(-x^2)}=2|x|$　　B. $\sqrt{40^2-24^2}=\sqrt{64\times16}=32$

C. $\sqrt{\left(\frac{5}{9}-1\right)^2}=\frac{5}{9}-1=-\frac{4}{9}$　　D. $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})=4$

6. 使等式$\sqrt{(a+2)(2-a)}=\sqrt{a+2}\cdot\sqrt{2-a}$成立的条件是（　　）

A. $a\geqslant-2$　　B. $a\leqslant2$　　C. $-2<a<2$　　D. $-2\leqslant a\leqslant2$

7. 下列二次根式与$\sqrt{3}$是同类二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{\frac{1}{9}}$　　B. $\sqrt{18}$

C. $\sqrt{12}$　　D. $\sqrt{8}$

8. 下列各式中计算正确的是（　　）

A. $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{5}$　　B. $3+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

C. $m\sqrt{b}-n\sqrt{b}=(m-n)\sqrt{b}$　　D. $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{32}}{2}=\sqrt{25}-\sqrt{16}=5-4=1$

9. 若$x\sqrt{\frac{5}{x}}+\sqrt{20x}+5\sqrt{\frac{x}{5}}=4$，则$x=$（　　）

A. ±1　　B. 1　　C. $\pm\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$

(二)填空题

10. 计算：

(1)$(\sqrt{0.3})^2=$______；　　(2)$\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2=$______；

点击知识点

1～3. 二次根式的概念及其应用

4～6，13、14. 二次根式的乘除法

7～9，15、16. 同类二次根式的应用及二次根式的加减法

10～12. 二次根式的应用

(3) $(-3\sqrt{2})^2=$______；　　(4) $-\left(-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=$______；

(5) $(x\sqrt{xy})^2=$______；　　(6) $(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a-b})^2=$______.

11. 如果 $x<5$，那么 $\sqrt{(x-5)^2}=$______.

12. 若 $|x-3|+(x-y+1)^2=0$，则 $\sqrt{x^2y+xy^2+\frac{y^3}{4}}=$______.

13. $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=$______.

14. 化简 $y\sqrt{\frac{x}{y}}=$______. $(y<0)$

15. 已知两个已化简的二次根式 $\sqrt{7a+b}$ 与 $\sqrt[b+3]{6a-b}$ 是同类二次根式，则 $a=$______，$b=$______.

16. 写两个二次根式，使它与 $\sqrt{8}$ 是同类二次根式______.

17. 借助计算器可以求得 $\sqrt{4^2+3^2}$，$\sqrt{44^2+33^2}$，$\sqrt{444^2+333^2}$，$\sqrt{4\,444^2+3\,333^2}$……仔细观察上面几道题的计算结果，试猜想 $\sqrt{\underbrace{44\cdots4}_{2\,005个}{}^2+\underbrace{33\cdots3}_{2\,005个}{}^2}=$______.

17. 探索题

(三)计算题

18. (1) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\left(-\frac{2}{5}\sqrt{75}\right)$　　(2) $\frac{5}{2}\sqrt{x^3y^2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{32x}{y}}\right)$

18. 二次根式的应用

(3) $(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})(4\sqrt{3}+3\sqrt{2})$　　(4) $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$

(四)解答题

19. 已知 $x=-1$，$y=\sqrt{2}$，求 x^2+y^2-xy 的值.

19～22. 二次根式的综合运用

20. 已知 $\sqrt{x+y-3}$ 与 $\sqrt{x-y+5}$ 互为相反数，求 x^2-y^2 的值.

21. 先将 $\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}\div\sqrt{\frac{x}{x^3-2x^2}}$ 化简，然后自选一个合适的 x 值，代入化简后的式子求值.

22. 在一个边长为 $(10\sqrt{15}+5\sqrt{5})$ 的正方形内部挖去一个边长为 $(10\sqrt{15}-5\sqrt{5})$ 的正方形，求剩余部分的面积.

§16.3 实数与数轴

同步教材研读
名师解疑释惑

知识要点归纳

1 无理数

在求一个数的方根的过程中，我们发现许多数的方根都不是准确值，而是近似值，例如：

$\sqrt{2}=1.414\ 213\ 56\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\ 050\cdots$，$\sqrt[3]{2}=1.259\ 921\cdots$，等等，另外，圆周率 $\pi=3.141\ 592\ 653\cdots$.

上述这些数都不是有限小数或无限循环小数，即不是有理数，它们都是无限不循环小数，我们称无限不循环小数为无理数.

注意：

(1)无理数应满足三个条件：①是小数；②是无限小数；③不循环.

(2)无理数不都是带根号的数(例如 π 就是无理数)，反之，带根号的数也不一定都是无理数(例如 $\sqrt{4}$，$\sqrt[3]{27}$ 就是有理数).

2 实数的分类

有理数和无理数统称实数.

实数的分类如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\\\text{零}\\\text{负有理数}\end{cases}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

凡是有理数都可以化为分数形式(整数可以看作分母是1的分数)，但无理数就不能化为分数形式.

另外，若按实数大小来分类，则有

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\\\text{零}\\\text{负实数}\end{cases}$$

3 实数与数轴的关系

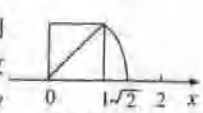

图 16-3-1

我们知道，有理数都可以用数轴上的点来表示．那么无理数是否能用数轴上的点来表示呢？我们来试一试，看在数轴上能否找到无理数. 首先我们计算一下边长为1的正方形的对角线的长，设边长为1的正方形的对角线长为 x，由于正方形是菱形，所以正方形的面积等于其对角线乘积的一半，而边长为1的正方形的面积为1. 由此可得方程

典型题例解析
了解考题形式

名师解题

例1 下列说法正确的是(　　)

A. 无限小数是无理数

B. 带根号的数是无理数

C. 无理数是无限小数

D. 无理数是开不尽方的数

解析 无理数指的是无限不循环小数，它属于无限小数的一部分，但无限小数并不都是无理数，其中还包含了无限循环小数；开不尽方的数是无理数，但无理数不都是开不尽方的数．故应选C.

例2 下列各数中，哪些是有理数？哪些是无理数？

①3.14；②0.101 001 000…(每相邻两个1之间依次多个0)；

③$-\frac{3}{2}\pi$；④$0.\dot{7}\dot{8}$；⑤$\sqrt[3]{27}$；⑥0；⑦$-\frac{121}{119}$；⑧$\sqrt{6+\frac{1}{4}}$；⑨$0.\dot{1}$；

⑩$\frac{4}{9}\sqrt{2}$.

解析 要判断一个数是有理数还是无理数，只需看该数是有限小数还是无限小数，是循环小数还是不循环小数．分数和整数是有理数，无限不循环小数是无理数.

$\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$，$\sqrt{6+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$ 是有理数，0 也是有理数.

有理数：①，④，⑤，⑥，⑦，⑧，⑨.

无理数：②，③，⑩.

例3 将下列各数填在相应的大括号里.

$-\frac{3}{2}$，$0.\dot{8}$，$-\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$，$\sqrt[4]{16}$，-2，0.2^{-2}，$|-\sqrt{3}|$，$\frac{22}{7}$，π，$\sqrt{8}$，0，$-\frac{1}{5}$，7^{-2}，$(-\frac{1}{7})^{-2}$，$\sqrt[3]{-8}$，$-0.212\ 112\ 111\cdots$(每相邻两个2之间依次多个1).

自然数集合{　　　　　　　　　　　　　　}；

有理数集合{　　　　　　　　　　　　　　}；

正数集合{　　　　　　　　　　　　　　}；

分数集合{　　　　　　　　　　　　　　}；

整数集合{　　　　　　　　　　　　　　}；

无理数集合{　　　　　　　　　　　　　　}；

解析 对实数进行分类时，应先对某些数进行计算和化简，再根据结果进行分类，特别是对带有根号的数，应化简后再判断．如 $-\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=-\sqrt[3]{(\frac{2}{3})^3}=-\frac{2}{3}$，$\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$，$\sqrt[3]{-8}=-2$ 都不是