高中数学综合题一题多解

翟 连 林主编

北 京 出 版 社

中学数学智力开发丛书

中学数学智力开发丛书

高中数学综合题一题多解

主编　翟连林

编者　汪祖亨　张载羽　朱荣兴

竺志平　王国顺　赵敏娴

施英杰　李仁杰

北　京　出　版　社

中学数学智力开发丛书

高中数学综合题一题多解

Gaozhong Shuxue Zongheti Yiti Duojie

翟连林　主编

*

北 京 出 版 社 出 版

（北京北三环中路6号）

新华书店北京发行所发行

北京第二新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　13印张　287,000字

1990年5月第1版　1990年5月第1次印刷

印数　1—20,200

ISBN 7-200-00769-2/G·205

定　价：4.80元

前　　言

培养正确迅速的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及分析问题和解决问题的能力，是中学数学教学中的一个重要任务．要完成这一任务，必须演算一定数量的题目．但不少自学青年和学生在演算习题时，往往只追求数量，而不顾质量．这样尽管用了不少时间，费了很大精力，但总因缺少有目的的总结、归纳，抓不住基本解题规律而收效甚微．

长期的教学实践使我们体会到："练不在于多，而在于精"．恰当而又适量地采用一题多解的方法，进行思路分析，探讨解题规律和对习题的多角度"追踪"，能"以少胜多地"巩固基础知识，提高分析问题和解决问题的能力，掌握基本的解题方法和技巧．为此，总结我们多年来从事数学教学的经验，数学教材的编写以及指导初、高中毕业生进行数学复习的经验，编写了这套"中学数学智力开发丛书"．这套丛书包括：《初中代数一题多解》、《平面几何一题多解》、《高中代数一题多解》、《立体几何一题多解》、《平面三角一题多解》、《平面解析几何一题多解》、《高中数学综合题一题多解》．

在编写这套丛书时，我们力求作到以下两点：第一，紧密配合中学数学教学内容，帮助读者在理解课本知识的基础上，开阔视野，启迪思维；第二，内容编排循序渐进，结构新颖，每对道题目的多种解法，注重思路分析和解题规律的总结，以帮助读者从中领悟要点，掌握解数学题的常用方法及基本解题

规律.

在本书编写过程中，唐英义、朱培勇二位老师给予大力支持和帮助，刘金玲、王学东、董春荣三同志帮助核算，在此一并表示感谢.

由于我们水平有限，书中不妥之处，敬请广大读者批评指正.

编者

1989年10月

目　录

第一章　常见综合题的类型

综合题的结构一般有三种，其一，由几个小题组合而成；其二，由某一单科的多知识点组合而成；其三，融多科知识与方法于一题．下面，我们通过例题对此三种结构进行一下剖析．

一、由小题组合的综合题

这类综合题通常是由几个明显的或隐蔽的小题组合而成．进一步细分，它又以下列三种形式为常见．

1．由几个明显的、独立的常规小题组合而成

例1　在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a、b、c，且$c=10$，$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，$P$为$\triangle ABC$内切圆上的动点，求点$P$到顶点$A$、$B$、$C$的距离的平方和的最大值与最小值．(1984年全国高考理科试题)

【分析】　本题实际上由如下两个常规小题组成：(1) a、b、c为三角形ABC的三边，且$c=10$，$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，试确定$\triangle ABC$的形状及其大小；(2) 在确定的$\triangle ABC$的内切圆上有一动点$P$，试求$PA^2+PB^2+PC^2$的最大值和最小值．

【解】　由$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$，用正弦定理作代换，得

$$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A}.$$

即 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$,

或 $\sin 2A=\sin 2B$.

$\because$ $\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{4}{3}$,知 $A\neq B$,且 A、B 为三角形的内角.

$\therefore$ $2A=\pi-2B$,即 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$.

知$\triangle ABC$ 是以 AB 为斜边的直角三角形.

再由 $c=10$, $\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$,

及 $a^2+b^2=c^2$,

可解得 $a=6, b=8$.

如图 1-1 建立坐标系,使$\mathrm{Rt}\triangle ABC$的三个顶点分别为$A(8,0)$、$B(0,6)$、$C(0,0)$.

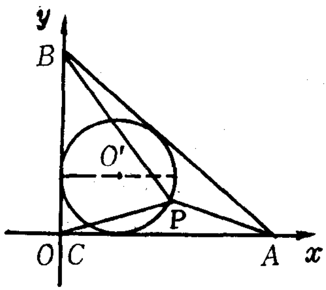

图 1-1

因 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, 有

$$a+b=c+2r.$$

$\therefore$ 内切圆半径 $r=\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{6+8-10}{2}=2$.

$\therefore$ 内切圆圆心为 $O'(2,2)$,方程为

$$(x-2)^2+(y-2)^2=4.$$

设圆上任一点为 $P(x,y)$,则有

$$\begin{aligned}S&=|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2\\&=(x-8)^2+y^2+x^2+(y-6)^2+x^2+y^2\\&=3x^2+3y^2-16x-12y+100\\&=3[(x-2)^2+(y-2)^2]-4x+76\\&=3\cdot 4-4x+76=88-4x.\end{aligned}$$

因 P 是圆上的点，故 $0 \leqslant x \leqslant 4$.

当 $x=0$ 时，有 $S_{\max}=88$.

当 $x=4$ 时，有 $S_{\min}=72$.

有时一道综合题以组题的形式出现，其中各小题呈阶梯形关系，后一小题的解决将借助于前一小题的结论. 如:

例 2 设数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 的前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系是 $S_n=-ba_n+1-\dfrac{1}{(1+b)^n}$，其中 b 是与 n 无关的常数，且 $b \neq -1$.

(1) 求 a_n 与 a_{n-1} 的关系;

(2) 写出用 n 和 b 表示的 a_n 的表达式;

(3) 当 $0<b<1$ 时，求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

【分析】 第(1)小题要求解题者去寻找 a_n 与 a_{n-1} 的关系，获得此关系式后就便于写出通项公式 a_n，进而也不难求得 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$. 显见这三小题构成的组题是环环相扣的，它们可看成是由三个递进型的常规小题组合而成.

【解】 (1) $\because \quad a_n=S_n-S_{n-1}$,

$$\therefore \quad a_n=\left[-ba_n+1-\frac{1}{(1+b)^n}\right] -\left[-ba_{n-1}+1-\frac{1}{(1+b)^{n-1}}\right].$$

于是解得 $a_n=\dfrac{b}{1+b}a_{n-1}+\dfrac{b}{(1+b)^{n+1}}. \ (n \geqslant 2)$

(2) $\because$ 由(1)得 $a_n=\dfrac{b}{1+b}a_{n-1}+\dfrac{b}{(1+b)^{n+1}}$,

$$\therefore \quad a_n-\frac{b}{1+b}a_{n-1}=\frac{b}{(1+b)^{n+1}}.$$

有 $a_2-\frac{b}{1+b}a_1=\frac{b}{(1+b)^3}$,

$$a_3-\frac{b}{1+b}a_2=\frac{b}{(1+b)^4},$$

……

$$a_{n-1}-\frac{b}{1+b}a_{n-2}=\frac{b}{(1+b)^n},$$

$$a_n-\frac{b}{1+b}a_{n-1}=\frac{b}{(1+b)^{n+1}}.$$

将上述 $n-1$ 个等式依次乘以 $\left(\frac{b}{1+b}\right)^{n-2}$, $\left(\frac{b}{1+b}\right)^{n-3}$, … $\frac{b}{1+b}$, 1. 再分别相加,得

$$\begin{aligned}a_n&=\left(\frac{b}{1+b}\right)^{n-1}a_1+\frac{b^n}{(1+b)^{n+1}}\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}+\cdots+\frac{1}{b^{n-1}}\right)\\&=\left(\frac{b}{1+b}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}+\cdots+\frac{1}{b^n}\right).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a_n=\begin{cases}\dfrac{n}{2^{n+1}}, & (b=1)\\[2ex]\dfrac{b-b^{n+1}}{(1-b)(1+b)^{n+1}}. & (b\neq1)\end{cases}$$

(3) 由(2)知当 $0<b<1$ 时, $a_n=\frac{b-b^{n+1}}{(1-b)(1+b)^{n+1}}$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_n&=-ba_n+1-\frac{1}{(1+b)^n}\\&=-b\cdot\frac{b-b^{n+1}}{(1-b)(1+b)^{n+1}}+1-\frac{1}{(1+b)^n}\\&=\frac{b^{n+2}-1}{(1-b)(1+b)^{n+1}}+1.\end{aligned}$$

$\because$ $0<b<1$ 时,有 $\lim\limits_{n\to\infty}b^{n+2}=0$, $(1+b)^{n+1}\to\infty$.

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0+1=1.$

2. 由按解题步骤分的小题组合而成

例 3 在$\triangle ABC$中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，若角A、B、C的大小成等比数列，且$b^2-a^2=ac$，则角B的弧度数等于多少？(1985 年全国数学联赛试题)

【分析】 先可由$b^2-a^2=ac$分析出A、B两角间的关系，再将此关系用于A、B、C成等比数列这一条件，合此二求解过程即可完成此题.

【解】 $\because \quad b^2-a^2=ac,$

$\therefore \quad (b-a)(b+a)=ac.$

用正弦定理作代换，即有

$$(\sin B-\sin A)(\sin B+\sin A)=\sin A\sin C,$$

或 $$2\cos\frac{B+A}{2}\sin\frac{B-A}{2}\cdot 2\sin\frac{B+A}{2}\cos\frac{B-A}{2}$$

$$=\sin A\sin C,$$

$$\sin(B+A)\sin(B-A)=\sin A\cdot\sin(B+A),$$

即得 $\sin(B-A)=\sin A.$

据此，唯有 $B=2A.$

又因 A、B、C成等比数列，

$\therefore \quad B^2=A\cdot C,$

即 $(2A)^2=A\cdot C.$

得 $C=4A.$

因 $A+B+C=\pi,$

得 $A+2A+4A=\pi.$

$\therefore \quad A=\frac{\pi}{7}$，进而有 $B=\frac{2}{7}\pi$，$C=\frac{4}{7}\pi$.

$\therefore$ B 角的弧度数为$\frac{2}{7}\pi$.

例 4 三棱锥各个侧面与底面成 45° 角，底面三角形各角成等差数列，且其最大边与最小边的长是方程 $3x^2-27x+32=0$ 的两个根，求此三棱锥的侧面积和体积.

【分析】 本题求解过程可分成三个步骤：(1) 先求底面三角形三边的长或其关系；(2) 求底面三角形内切圆的半径；(3) 利用公式计算三棱锥的侧面积和体积.

【解】 如图 1-2，设底面三角形三内角为 A、B、C，且对应边为 $a<b<c$. 因三角成等差数列，知$\angle B=60°$，

$\because$ a、c 为方程 $3x^2-27x+32=0$ 的两个根，

$\therefore$ $a+c=9, ac=\frac{32}{3}$.

又 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos 60°$

$=(a+c)^2-3ac=49$,

$\therefore$ $b=7$。

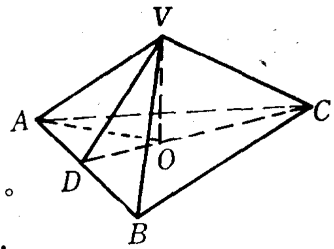

图 1-2

$\because$ 三棱锥各侧面与底面成 45° 角，可知顶点V在底面内的射影O应是$\triangle ABC$内切圆的圆心.

引 $VO\perp$ 面 ABC，连结 CO 交 AB 于 D，再连结 VD，则$\angle VDC=45°$.

设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r,

由 $\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{1}{2}ac\sin B$,

得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 于是 $VD=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{2}$, $VO=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore\ S_{侧}=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot VD=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{2}$$

$$=\frac{8}{3}\sqrt{6}.$$

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot VO=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{8}{9}.$$

3. 由有机构成的小题组成

例 5 已知 A、B、C 为锐角三角形的三内角，求证:

$$\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C>1.$$

【分析 1】 本题实质上相当于如下两个小题:（1）在三角形 ABC 中，求证 $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C$;（2）在锐角三角形 ABC 中，求证 $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C>1$.

【证法 1】 $\because\ A+B=\pi-C$,

$\therefore\ \operatorname{tg}(A+B)=\operatorname{tg}(\pi-C)$,

即 $\dfrac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}=-\operatorname{tg}C$,

去分母整理得

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C \qquad ①$$

又 A、B、C 均为锐角,

$\therefore\ \operatorname{tg}A>0,\ \operatorname{tg}B>0,\ \operatorname{tg}C>0.$

且因 $A+B+C=\pi$，则在 A、B、C 中至少有一个角大于 $\frac{\pi}{4}$. 不失一般性，令 $A>\frac{\pi}{4}$, 即有 $\operatorname{tg}A>1$.

$\therefore\ \operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C>1.$

据①式即得

$$\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C>1.$$

【分析2】 本题也可看作实质上相当于如下两个小题：(1)在锐角三角形 ABC 中，证 $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B>1$；(2)证 $\operatorname{tg}^2A\operatorname{tg}^2B\operatorname{tg}^2C>1$.

【证法2】 $\because$ A、B、C 是锐角三角形的三个内角，

$\therefore$ $A+B>\frac{\pi}{2}$,

不妨设 $0<\frac{\pi}{2}-A<B<\frac{\pi}{2}$,

有 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-A\right)<\operatorname{tg}B$,

即 $\operatorname{ctg}A<\operatorname{tg}B$,

或 $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B>1$.

同理可证 $\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C>1, \operatorname{tg}C\operatorname{tg}A>1$.

因 $\operatorname{tg}A$、$\operatorname{tg}B$、$\operatorname{tg}C$ 都是正数，三式相乘，得

$\operatorname{tg}^2A\operatorname{tg}^2B\operatorname{tg}^2C>1$,

$\therefore$ $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C>1$.

二、单科(多知识点)综合题

这类综合题若仅从题型风格或字面上看，其综合性似不明显. 但它因涉及该分科前后多个知识点而具有“综合”的含义；其次，这类题有时利用其它分科的知识方法去求解显得尤为简捷，因此含另一类“综合”意义.

例6 设 S_n 表示方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根的 n 次方的和，求证：$S_1=-\frac{b}{a}$；$S_2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$；$S_n=\frac{-bS_{n-1}-cS_{n-2}}{a}$.

【分析】 这是一道代数学科中涉及二次方程、韦达定理、根的对称多项式和数列递推关系的综合题. 考虑到利用递推

方法探求 $S_n=x_1^n+x_2^n$（设 x_1、x_2 为所给二次方程的二个根）与 $S_{n-1}=x_1^{n-1}+x_2^{n-1}$ 及 $S_{n-2}=x_1^{n-2}+x_2^{n-2}$ 的递推关系式较为繁杂，故可直接用由原方程变形再配凑的方法来证明.

【证明】 由上分析，据韦达定理有

$$S_1=x_1+x_2=-\frac{b}{a}.$$

$$S_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}.$$

由 x_1、x_2 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二根，可得

$$ax_1^2+bx_1+c=0,$$

和 $$ax_2^2+bx_2+c=0.$$

两式分别乘上 x_1^{n-2}、x_2^{n-2}，得

$$ax_1^n+bx_1^{n-1}+cx_1^{n-2}=0,$$

$$ax_2^n+bx_2^{n-1}+cx_2^{n-2}=0.$$

将此两式相加，得

$$a(x_1^n+x_2^n)+b(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})+c(x_1^{n-2}+x_2^{n-2})=0.$$

即 $$aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0.$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{-bS_{n-1}-cS_{n-2}}{a}.$$

例 7 空间是否有这样的四点 S、A、B、C 存在，使 $SA=BC=8$ cm，$SB=AC=10$ cm，$SC=AB=13$ cm. 为什么？

【分析】 本题涉及立体几何中的反证法、多面角的有关性质、多面体计算及三角形内的边角关系等知识点，是立体几何学科中的基本综合题.

【思考 1】 假设满足这种条件的四点存在，利用反证法推之.

【解法 1】 假定空间(包括平面)中有满足条件的四点存在，如图 1-3，设D为AB的中点，连结DS和DC，则$\triangle SDC$也存在，由$\triangle SAB\cong\triangle CAB$知

$$DS=DC.$$

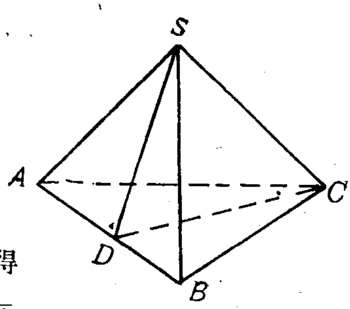

图 1-3

在$\triangle SAB$中，据中线定理，得

$$SD=\frac{1}{2}\sqrt{2(8^2+10^2)-13^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{159}<\frac{1}{2}\sqrt{169}=6.5.$$

于是　$DS+DC<6.5+6.5=13=SC.$

这显然与“三角形的两边之和大于第三边”相矛盾.

故空间不存在这样的四点.

【思考 2】 亦用反证法，但另据三角计算来推出矛盾.

【解法 2】 仍如图 1-3.

$\because$　$\cos\angle ASB=\frac{8^2+10^2-13^2}{2\cdot 8\cdot 10}=-\frac{1}{32}$,

$\therefore$　$\angle ASB\approx 91°11'$.

$\because$　$\cos\angle BSC=\frac{10^2+13^2-8^2}{2\cdot 10\cdot 13}\approx 0.7884$,

$\therefore$　$\angle BSC\approx 37°58'$.

$\because$　$\cos\angle ASC=\frac{8^2+13^2-10^2}{2\cdot 8\cdot 13}\approx 0.6394$,

$\therefore$　$\angle ASC\approx 50°15'$.

于是　$\angle BSC+\angle ASC\approx 88°13'<91°11'=\angle ASB.$

这与“三面角的任意两个面角之和大于第三个面角”这一性质相矛盾，故空间不存在这样的四点.

三、汇多科知识与方法于一体的综合题

这类综合题通常涉及不同数学分科的不同知识点，并须在求解过程中恰当地选用有关重要方法和技巧来获取简捷的解题途径.

例 8 已知锐角三角形 ABC 的外接圆半径是 R，点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上，求证 AD、BE、CF 是△ABC 的三条高的充要条件是 $S=\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$. 式中 S 是△ABC 的面积.（1986 年全国高中数学竞赛试题）

【分析】 本题涉及平面几何各有关性质、方法、充要条件的证明以及三角等学科运算工具的疏通.

【思考 1】 如图 1-4，由关系式

$$S=\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$$

$$=\frac{R}{2}EF+\frac{R}{2}FD+\frac{R}{2}DE,$$

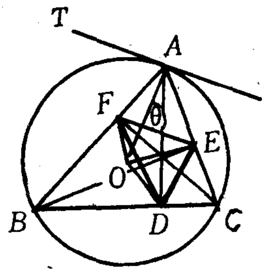

图 1-4

不难看出，可从 $S_{\triangle ABC}=S_{\text{四边形}OEAF}+S_{\text{四边形}OFBD}+S_{\text{四边形}ODCE}$ 着手考虑.

$$\because \quad S_{\text{四边形}OEAF}=\frac{1}{2}OA\cdot EF\cdot\sin\theta,$$

从而应有 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $EF\perp OA$. 联想到圆 O 在顶点 A 处的切线 AT 垂直于半径 OA，循此即可获得证明.

【证法 1】 必要性：因为△ABC 是锐角三角形，所以外接圆圆心 O 在三角形内.

于是 $\quad S_{\triangle ABC}=S_{\text{四边形}OEAF}+S_{\text{四边形}OFBD}+S_{\text{四边形}ODCE}$.