成才丛书

王溢然　詹国梁
钱吉良　黎　子

高考数理化解题典型错误分析

GAOKAO SHULIHUA JIETI DIANXING CUOWU FENXI

江苏科学技术出版社

高考数理化解题典型错误分析

王溢然　詹国梁
钱吉良　黎　子

江苏科学技术出版社

高考数理化解题典型错误分析
王溢然 等

出版：江苏科学技术出版社
发行：江 苏 省 新 华 书 店
印刷：七 二 一 四 工 厂

开本787×1092毫米 1/32 印张14 字数306,800
1985年4月第1版 1985年4月第1次印刷
印数1—101,300册

书号：13196·178 定价2.10元
责任编辑 贾丽华 吴国平

编 者 的 话

为了帮助高中毕业生和自学青年在复习数理化课程时，了解历届高考试题答卷上考生出现的一些典型错误，及其造成错误的原因，熟悉高考试题的内容和要求，从中吸取有关的经验教训；并帮助他们针对有关试题的正误解答，进行讨论与思考，起到举一反三、触类旁通的作用，以进一步作好复习迎考准备，因此我们编写了这本书。

本书分数学、物理学、化学三个部分。均以一九七七年恢复高考以来的高考试题（包括其附加题）及其答卷中出现的典型错误为主要依据和素材，结合各科特点和教学实际，分门别类归纳分析。在此基础上还选编了少量具有典型意义的自测题，并附解答或提示，可供读者作综合训练用。

数学、物理学、化学三个部分，分别由詹国梁、王溢然、钱吉良同志写出初稿，全书由黎子同志修改、统稿、定稿。编写过程中，我们参阅了近年来有关教育、教学刊物上刊登的对高考试题分析的文章。全书插图由王益良同志绘制，在此一并致谢。

应该指出，高考制度需要改革，试题也需要进行研究与改进，造成考生错误的原因也有试题本身的问题，为慎重起见本书基本上未涉及这一内容。另外，限于时间仓促和我们掌握的阅卷情况不够全面，以及我们的水平，书中的缺点、错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

目　　录

Ⅰ、数学部分

Ⅱ、物理部分

Ⅲ、化学部分

I、数 学 部 分

一、概念不清楚造成的错误

在数学中，一切分析、推理、计算都要根据概念，运用概念。并且只有透彻理解、灵活运用概念，才能掌握运算的技能和技巧，具备正确、迅速、合理的逻辑论证和空间想象力。所以说，正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提，是学好定理、公式、法则和数学方法以及提高解题能力的基础。

但是，这样的思想认识，不是每个同学都是十分清楚的。不少同学平时以为概念、定义比较简单，浮光掠影，一学而过；到了毕业复习阶段，只顾埋头解题，忽视对数学概念的学习、理解和运用，或者把数学概念当作僵死的条文，死记硬背。因而，高考时便出现了形形色色的概念性错误。在历届高考的答卷上，这种错误不仅反映在直接考查基本概念的题解中，而且还突出地反映在计算题、证明题以及作图题的解答之中。由于概念不清而错误迭出的现象，屡见不鲜，俯拾即是。

【例1】 三个数 a、b、c 不全为零的充要条件是：

（A） a、b、c 都不是零。

（B） a、b、c 中最多有一个是零。

（C） a、b、c 中只有一个是零。

(D)　a、b、c 中至少有一个不是零。

(1983年高考理科试题一(3))。

【错解】 因为a、b、c只有一个是零$\Rightarrow a$、b、c三个数不全为零，所以，三个数a、b、c不全为零的充要条件是a、b、c中只有一个是零，故应选择(C)为答案。

【分析】 这里，先混淆了"不全为零"与"只有一个是零"这两个不同的概念，前者包括了a、b、c三个数都不是零这种情况，而后者明确a、b、c三个数中恰好一个是零。两者显然是有区别的；后又混淆了"充分条件"与"充要条件"这两个不同的概念，这里，虽然a、b、c只有一个是零$\Rightarrow a$、b、c不全为零；但是a、b、c不全为零$\not\Rightarrow a$、b、c中只有一个是零。所以，a、b、c中只有一个是零，仅仅是a、b、c不全为零的充分条件而并非是必要条件。

【正确解答】 因为三个数a、b、c不全为零包括三种情况：(1)a、b、c都不是零；(2)a、b、c中恰有二个不为零；(3)a、b、c中恰有一个不为零。总括起来，就是a、b、c中至少有一个不是零。并且，反之也对。所以，三个数a、b、c不全为零的充要条件是a、b、c中至少有一个不是零。即应选择(D)为答案。

【讨论与思考】

1. 本题中涉及a、b、c"不都是零"、"都不是零"、"至多有一个是零"、"恰有一个是零"、"至少有一个不是零"这些词语，虽仅两字的次序不同，或仅一、二字之差，但所表达的意义却相差甚远。例如：a、b、c"都不是零"只有一种情况：$a\neq 0$、$b\neq 0$、$c\neq 0$；a、b、c"恰有一个是零"有三种情况：$a=0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$；$a\neq 0$，$b=0$，$c\neq 0$；$a\neq 0$，$b\neq 0$，$c=0$。而a、b、c"不都

是零”却包含七种情况：(1) $a=0, b=0, c\neq 0$；(2) $a\neq 0, b=0, c=0$；(3) $a=0, b\neq 0, c=0$；(4) $a\neq 0, b\neq 0, c=0$；(5) $a=0, b\neq 0, c\neq 0$；(6) $a\neq 0, b=0, c\neq 0$；(7) $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$。

2.充分条件、必要条件和充要条件是数学中的重要概念。如何理解这三个不同的概念，我们应从命题的假设和结论的因果关系上去理解。

如果命题“若A则B”为真（即$A\Rightarrow B$），那么A叫做使B成立的充分条件，B叫做使A成立的必要条件；如果命题“若A则B”为真（即$A\Rightarrow B$），而命题“若B则A”为假（即$B\nRightarrow A$），那么A就叫做使B成立的充分但非必要的条件；如果命题“若B则A”为真（即$B\Rightarrow A$)，而命题“若A则B”为假（即$A\nRightarrow B$），那么，A就叫做使B成立的必要但非充分的条件；如果命题“若A则B”和“若B则A”均为真（即$A\Longleftrightarrow B$），那么A就叫做使B成立的充分且必要的条件（简称充要条件）。这时B也叫使A成立的充要条件。

在数学中经常遇到，要证明形如“A的充要条件是B”这样一类命题，根据充要条件的定义，就应该证明下面的两个命题同时成立：(1)若A则B（必要性$\Rightarrow$）；(2)若B则A（充分性$\Leftarrow$）。

3.在解答数学问题时，要特别注意“都”、“不都”与“都不”；“至少”、“至多”与“恰好”；“或”与“且”；“包含”与“属于”等词义的区别，必须理解正确，运用恰当，否则，将使解题思路混乱，从而导致错误的结论。

4.请你正确使用数学用语中的字和词，解答下面几个问题：

（1）若A、B、C不都是零，试说明二元二次方程$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$表示什么类型的曲线？

（2）若三个方程$x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$中，至少有一个方程有实数解，试求实数a的范围。（提示：从“至少有一个方程有实数解”的反面入手）。

（3）解不等式 $|x^2-5x|>6$ （注意：“或”、“且”两字的使用）。

（4）设$M=\{x : x\leqslant\sqrt{12}\}$，$a=\sqrt{11}$，则下列关系式中正确的是：①$a\subset M$；②$a\overline{\in}M$；③$\{a\}\in M$；④$\{a\}\subset M$。（1983年高考理科试题副题一（1））

【例2】 将多项式x^5y-9xy^5分别在下列范围内分解因式：（1）实数范围；（2）复数范围。（1980年高考理科试题一）。

【错解】

（1）x^5y-9xy^5

$$=xy(x^4-9y^4)=xy(x^2+3y^2)(x^2-3y^2)$$

$$=xy(x^2+3y^2)(x+\sqrt{3}y)(x-\sqrt{3}y)$$

$$=xy(x^2+3y^2)(x+\sqrt{3}y)(\sqrt{x}+\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{y}).$$

（2）x^5-9xy^5

$$=xy(x+\sqrt{3}yi)(x-\sqrt{3}yi)(x+\sqrt{3}y)(x-\sqrt{3}y)$$

$$=xy\left[\sqrt{x}+\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\sqrt{y}(i-1)\right]\cdot\left[\sqrt{x}-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\sqrt{y}(i-1)\right]\cdot\left[\sqrt{x}+\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\sqrt{y}(i+1)\right]\cdot$$

$$[\sqrt{x}-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\sqrt{y}(i+1)]\cdot(\sqrt{x}+\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{y}i)(\sqrt{x}-\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{y}i)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{y}).$$

【分析】 如果将上述两题的结果进行展开还原的话，那么与原多项式完全一致，并无错误。但是，只要对照因式分解的定义，就会发现上述解答的问题所在。

现行初中数学课本代数第二册中是这样定义的："把一个多项式化为几个整式的积的形式叫做多项式的因式分解"。这一定义中"几个整式"是关键性词语，应该特别注意，紧紧扣住。

【错解】（1）中的$(\sqrt{x}+\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{y})$与$(\sqrt{x}-\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{y})$与〔错解〕(2)中除$xy$之外其它所有的因式都不是有理式，当然更不是整式。因而，这样的分解都不是因式分解。可见，所以产生这样的错误，其原因是对因式分解这一重要概念模糊不清。

【正确解答】（1）
$$\begin{aligned}&x^5y-9xy^5\\=&xy(x^4-9y^4)\\=&xy(x^2+3y^2)(x^2-3y^2)\\=&xy(x^2+3y^2)(x+\sqrt{3}y)(x-\sqrt{3}y).\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}&x^5y-9xy^5\\=&xy(x+\sqrt{3}yi)(x-\sqrt{3}yi)\\&(x+\sqrt{3}y)(x-\sqrt{3}y).\end{aligned}$$

【讨论与思考】

1.关于多项式的因式分解的概念，除了它的定义之外，还需要注意以下两点：

（1）在分解因式时要注意到因式分解的范围。多项式

的因式分解，根据数的范围有三种情况：①在有理数范围内；②在实数范围内；③在复数范围内。

同一个多项式因式分解的结果（包括每个因式中的系数与自变数所取的值），可能由于所考虑的数的范围不同而不同。本题在有理数范围内，则应该分解为：$xy(x^2+3y^2)(x^2-3y^2)$，这一结果与它在实数范围内、复数范围内所分解的结果均不相同；又如：多项式 $x^4+x^2y^2+y^4$ 在有理数或实数范围内的分解结果都是：$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$，而在复数范围内则可分解为：

$$[x+(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)y]\cdot[x+(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)y]\cdot$$

$$[x-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)y][x-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)y].$$

再如，多项式$x^2-4xy+4y^2-4z^2$（1978年高考试题(一)），在三种不同的数的范围内，分解的结果都是相同的，结果为：$(x-2y+2z)(x-2y-2z)$。一般来说，如果题目本身无特殊声明，都是在有理数的范围内进行分解。

（2）在复数范围内，每个 n 次（$n>1$）多项式一定要分解到为 n 个一次因式的乘积为止。但决不能认为，在复数范围内，多项式可以无休止地分解下去。因为，否则将与多项式的因式分解的定义相抵触。

2.思考题：分别在有理数范围、实数范围、复数范围内对下面两个多项式进行因式分解。

（1）$2x^4-2x^2-4$；（2）$(x+y)^4+(x^2-y^2)^2+(x-y)^4$.

【例3】 求使函数 $y=\arcsin(\sin x)$有意义的 x 的实数范围（1982年高考理科试题一（3））。

【错解一】 $x\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。

【错解二】 $x\in[-1,1]$。

【错解三】 $x\in[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}](k\in J)$。

【分析】 造成上述三种错误的根本原因在于对反三角函数的概念没有真正理解，特别是反三角函数的定义域及其主值区间没有从它们的实质上去掌握，而只是从形式上死记反正弦函数$y=\arcsin x$的定义域：$x\in[-1,1]$；主值区间：$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。答题时，不加具体分析，或张冠李戴，或生搬硬套。〔错解一〕的答卷者，一方面见到$\sin x$，知道其中x是角（或弧），另一方面模模糊糊地联想到反正弦函数的主值区间$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$是指角（或弧）的范围，于是轻率地下结论：$x\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$；〔错解三〕显然是在〔错解一〕的思想支配下，转而想到"终边相同的角的三角函数值相同"，盲目地推衍而得；〔错解二〕的答卷者没有注意到$y=\arcsin(\sin x)$是一个复合函数，它是由$y=\arcsin u$，$u=\sin x$这两个函数复合而成的，误将$y=\arcsin u$的定义域$u\in[-1, 1]$当作$y=\arcsin(\sin x)$的定义域$x\in[-1,1]$。

【正确解答】 由反正弦函数的定义域可知：

$y=\arcsin(\sin x)$表示一个角，它的正弦值等于$\sin x$，并且$y\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。即有$\sin x=\sin y$，

$\because y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$；　$\therefore \sin y\in[-1,1]$。

即$\sin x\in[-1,1]$；　　因此，$x\in(-\infty,+\infty)$。

【讨论与思考】

1．本题的另一种解法：设，$\sin x=u$，

则　$y=\arcsin(\sin x)=\arcsin u$ 根据反正弦函数的定义域：$u\in[-1,1]$，得$\sin x\in[-1,1]$，因此，$x\in(-\infty,+\infty)$。

2．反三角函数的概念是反三角函数的三角运算和解三角方程的基础。为了能深刻理解，切实掌握反三角函数的概念，应该注意以下三个方面。

（1）从反函数的存在性深刻理解反三角函数定义的本质，明确“在闭区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上，可以找到函数$y=\sin x$所有的函数值$[-1,1]$。在这个区间上，对应关系$x\to y=\sin x$是从$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$到$[-1,1]$的一一对应，因此，在这个区间上$y=\sin x$有反函数”，从而弄清反正弦函数$y=\arcsin x$的定义域与主值区间的来龙去脉。

（2）从正反两个方面去理解反三角函数的意义。

①明确 $y=\arcsin x$ 表示在区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上的角（或弧），它的正弦值正好等于$x$，即$x=\sin y$或$\sin(\arcsin x)=x$。其中$x\in[-1,1]$，$y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$。

②指出下列各式中的错误。

$\arcsin\sqrt{3}$，$\arccos\left(-\frac{3}{2}\right)$，$\arccos\pi$，$\text{arctg}60°$，

$\text{arcctg}(2-5i)$；

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$，$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$，

$\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$，

$\sin[\arcsin(-\sqrt{2})]=-\sqrt{2}$，$\sin(\arccos x)$

$=\pm\sqrt{1-x^2}$。

（3）从练习中进一步加深对反三角函数意义的理解。

例如，求$\sin\left[\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$、$\cos\left[2\,\text{arctg}\frac{1}{3}\right)$的值等。

3.思考题

（1）求函数$y=\sin(\arccos x)$，$y=\arccos(\text{tg}x)$的定义域。

（2）x在什么范围内下列各等式成立？

①$\sin(\arcsin x)=x$；　　②$\arcsin(\sin x)=x$；

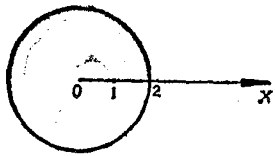
③$\arccos(\cos x)=x$；④$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$。

【例4】　画出极坐标方程$(\rho-2)\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0$（$\rho>0$）的曲线（1984年高考理科试题三（2））。

【错解】　由极坐标方程$(\rho-2)\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0$得

$\rho=2$或$\theta=\frac{\pi}{4}$。

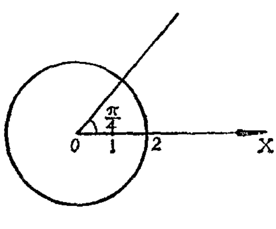
因为极坐标方程必须含有变数 ρ，所以原极坐标方程即为 $\rho=2$。故原极坐标方程给定的曲线是一个以原点为圆心，半径为2的圆周(图 1－1)。



(图 1－1)

【分析】“在极坐标系中，曲线可以用含有 ρ、θ 这两个变数的方程 $\varphi(\rho,\ \theta)=0$ 来表示，这种方程叫做曲线的极坐极方程”（参见六年制重点中学课本《解析几何》）。根据这一定义，曲线的极坐标方程 $\varphi(\rho,\ \theta)=0$ 与曲线的直角坐标方程 $F(x,y)=0$ 相类似，即使方程 $\varphi(\rho,\ \theta)=0$ 中只含一个变数 ρ 而成为 $\varphi(\rho)=0$，或者只含有一个变数 θ 而成为 $\varphi(\theta)=0$，它们仍然都是曲线的极坐标方程。反之，将 $\varphi(\theta)=0$ 排斥在曲线的极坐标方程之外，这与 $F(x)=0$ 排斥在曲线的直角坐标方程之外，同样都是错误的（例如，有的学生不理解方程 $x^2-1=0$ 在直角坐标系中分别表示两条直线 $x-1$ 与 $x=-1$）。

【正确解答】 由极坐标方程 $(\rho-2)(\theta-\frac{\pi}{4})=0$，$(\rho>0)$ 得：$\rho=2$ 或 $\theta=\frac{\pi}{4}$。



(图 1－2)

因为方程 $\rho=2$ 表示一个以原点为圆心，半径为2的圆周；方程 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 表示通过极点，极角为 $\frac{\pi}{4}$ 的半射线。而因条件中 $\rho>0$，故此半射线不包括极点0。

从而，原方程给出的曲线是

由一个圆与一条挖去端点的射线所组成（图1－2）。

【讨论与思考】

1.在答卷中，有的考生把给定的方程所确定的曲线误认为是由$\rho-2=0$和$\theta-\frac{\pi}{4}=0$所确定的曲线的交点。请读者自己分析造成这种错误的原因。

2.如果把曲线看作适合某种条件的点的集合或轨迹，那么，上述“曲线的极坐标方程”的定义是不确切的。但是，可否仿照曲线的直角坐标方程的定义，对曲线的极坐标方程作如下的定义：“如果曲线C上的点的极坐标都满足极坐标方程$\varphi(\rho, \theta)=0$；并且坐标满足方程$\varphi(\rho, \theta)=0$的点又都在曲线C上，$\varphi(\rho, \theta)=0$就叫做曲线C的极坐标方程”。回答是否定的。如对等速螺线的极坐标方程$\rho=a\theta$，螺线上一点的坐标$(\frac{\pi}{4}a, \frac{\pi}{4})$满足该方程，但这点的其它坐标$(\frac{\pi}{4}a, \frac{\pi}{4}+2n\pi)$ $(n\neq0)$便都不满足该方程了；又如对于曲线方程$\rho=\cos^2\theta$，线上一点的坐标$(1, 0)$满足该方程，这点的坐标$(1, 2n\pi)$ $(n\neq0)$也满足该方程，但是这点的坐标$(-1, (2n+1)\pi)$便都不满足该方程了。

因此，曲线的极坐标方程的确切定义应该是：

如果曲线C上的点的极坐标之一满足极坐标方程$\varphi(\rho, \theta)=0$，并且坐标满足方程$\varphi(\rho, \theta)=0$的点都在曲线C上，$\varphi(\rho, \theta)=0$就叫做曲线C的极坐标方程。

【例5】 当实数t取什么值时，复数$Z=\sqrt{|\cos t|}+$