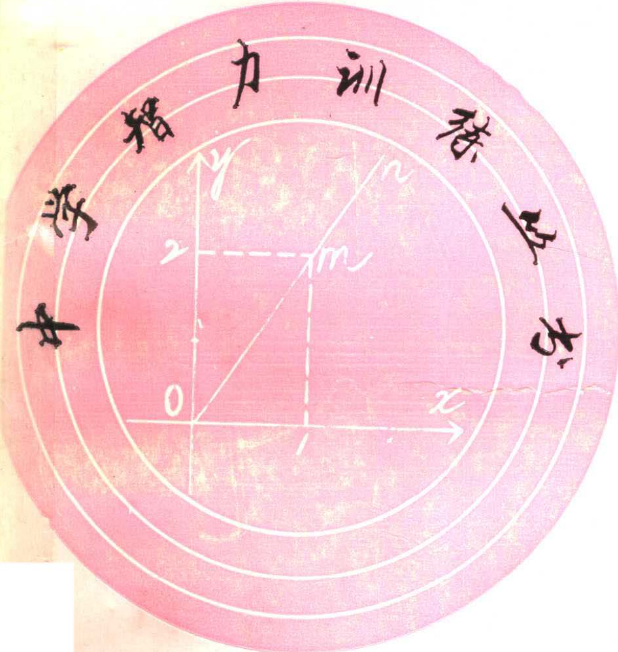
初中数学

解题思路与方法

曲正惠　景齐家　刘庆华



石油大学出版社

初中数学解题思路与方法

曲正惠 景齐家 刘庆华 编

石油大学出版社

初中数学解题思路与方法

曲正惠 景齐家 刘庆华

石油大学出版社出版
山东省 东营市
山东省新华书店发行
垦利县印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 7.375印张 166千字
1989年8月第1版 1989年8月第1次印刷
印数：1—13 000册

ISBN 7-5636-0034-5/G_{63}·02

定价：2.25元

前　言

为帮助在校初中生更好地掌握所学知识，我们编写了这本《初中数学解题思路与方法》，供初中生课外学习使用。

本书面向全体初中学生，强调基础知识的掌握和基本技能的训练，以加强学生对基本概念的理解和运用、开拓学生的解题思路、提高学生的解题能力。在编写过程中，本书采用了专题讲座的形式，将反映相同或相近的解题方法的知识放在一起，充分体现本书注重思路与方法的特点，使读者更能了解所学知识的内在联系。在内容处理上，本书不是面面俱到，而是侧重初中数学的重点和难点，精选有代表性的题目，在解题分析上下功夫，尽量做到从思想方法上启发学生，使之收到举一反三的功效。考虑到广大初中学生对数学竞赛有着浓厚兴趣，所以也安排一定篇幅对初中数学竞赛中常碰到的整除性、不定方程和抽屉原则等内容作了简明扼要的介绍。

就目前情况看，如何做选择题已成为学习数学的一个重要内容。纵观近年来各种门类的竞赛和考试，选择题占了较大比重，为此本书对如何做选择题作了重点论述，希望所归纳的方法对读者有启发和指导作用。

书中各个专题都附有少量的练习题，并附录了“1984—1988年胜利油田初中数学竞赛题”、“1988年山东省高中招生数学试题”和一部分“综合练习题”。这些题目，有的为了使读者通过练习强化对本书专题知识的理解和掌握，有的则是资料性的，使读者对初中数学竞赛和升学考试的题目从

内容到形式有更清楚地了解。所有题目都附有答案，以便学生练习时查对。

由于编者水平有限，书中疏漏和错误之处在所难免，敬希读者批评指正。

编　者

1988年12月

目　　录

初中数学常见内容与思想方法

一、方程及其解法

（一）一元一次方程

任何一元一次方程都可通过去分母、去括号、移项和合并同类项化为一般形式

$$ax=b$$

若a、b是具体数字，可直接解之；

若a、b是字母，则应进行讨论：

（1）当$a\neq0$时，方程有唯一解　$x=\dfrac{b}{a}$；

（2）当$a=b=0$时，方程变为$0x=0$，有无数多解；

（3）当$a=0$且$b\neq0$时，方程无解。

例1　解方程　$m(mx-1)=2(2x-1)$

解　原方程可化为：$(m+2)(m-2)x=m-2$

（注意：不得将$m-2$约去）

（1）当$m\neq\pm2$时，方程有唯一解 $x=\dfrac{1}{m+2}$；

（2）当$m=2$时，方程变为$0x=0$，有无数多解；

（3）当$m=-2$时，方程变为$0x=-4$，方程无解。

例2　k是什么数的时候，方程

$k(x-1)=5x-2$的解是

①正数　②负数　③等于零　④没有解。

解　原方程可化为：

$$(k-5)x=k-2$$

(1) 当$k\neq5$时，方程有唯一解　$x=\dfrac{k-2}{k-5}$

①令$\dfrac{k-2}{k-5}>0$，解得　$k>5$或$k<2$，

因此，当$k>5$或$k<2$时，解是正数；

②令$\dfrac{k-2}{k-5}<0$，解得　$2<k<5$，

因此，当$2<k<5$时，解为负数；

③令$\dfrac{k-2}{k-5}=0$，得　$k=2$。

因此，当$k=2$时，解为零。

(2) 当$k=5$时，原方程变为：$0x=3$，

显然，此时原方程无解。

例3　几个人分铅笔，每人a枝，多15枝；每人9枝，少5枝，求人数。

解　设人数为x，则得方程

$$ax+15=9x-5$$

整理得　$(9-a)x=20$

(1) 如果$a=9$，方程无解，应用题也无解；

(2) 如果$a\neq9$，方程有唯一解　$x=\dfrac{20}{9-a}$

①若$a>9$，则　$x=\dfrac{20}{9-a}<0$，

因人数不能是负数，方程的解不合题意，所以此时应用题无解。

②若$a<9$，则 $$x=\frac{20}{9-a}>0,$$

因铅笔枝数和人数都必须是正整数，即$9-a$必须是20的约数，所以a只能是4，5，7，8，当a分别为4，5，7，8时，应用题的解分别为：4人，5人，10人和20人。

（二）二元一次方程组

1．二元一次方程

$Ax+By+C=0$ （A，B不同时为零）

(1) 当$B=0$时，变为$Ax+C=0$，即$x=-\frac{C}{A}$，它表示垂直于x轴的一条直线；

(2) 当$B\neq0$时，变为$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$，它表示斜率为$-\frac{A}{B}$，在$y$轴上的截距为$-\frac{C}{B}$的一条直线。

注意：当$A\neq0$，$B\neq0$时，直线与x轴，y轴必定相交，且交点坐标分别为$(-\frac{C}{A},0)$和$(0,-\frac{C}{B})$。

如直线$4x+2y-8=0$与坐标轴的交点坐标为(2，0)和(0，4)。如图1所示。

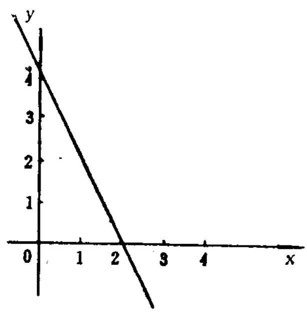


图 1

其中，在直线上每一个点的坐标组成一个特解，如

$$\begin{cases}x=2\\y=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x=0\\y=4,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1\\y=6\end{cases}\quad\cdots\cdots。$$

因直线上有无数多个点，所以二元一次方程有无数多个解。

2。二元一次方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$$

(1) 当$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$时，可推得$-\frac{A_1}{B_1}\neq-\frac{A_2}{B_2}$，即两直线的斜率不等，此时两直线必相交，交点坐标就是方程组唯一的一组解；

(2) 当$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$时，可推得斜率相等，但在$y$轴上的截距不等，此时两直线必平行，方程组无解；

(3) 当$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$时，斜率和截距分别相等，此时两条直线重合，方程组有无数多组解。直线上每个点的坐标都是方程组的解。

例1 a为什么实数的时候，方程组

$$\begin{cases}ax+4y=8\\3x+2y=6\end{cases}\quad \text{的解是正数？}$$

分析：该方程组的解只可能有如下两种情况：

(1) 当$\frac{a}{3}\neq\frac{4}{2}$时，即$a\neq6$时，有唯一的一组解；

(2) 当$\frac{a}{3}=\frac{4}{2}\neq\frac{8}{6}$时，即$a=6$时，方程组无解。

因该题要求解是正数，所以必须在有唯一组解的情况下（即$a\neq6$时）再进一步讨论。

解 当$\frac{a}{3}\neq\frac{4}{2}$时，即当$a\neq6$时，方程组有唯一的一组解

$$\begin{cases} x=-\dfrac{4}{a-6} \\ y=\dfrac{3(a-4)}{a-6} \end{cases}$$

要使$x>0$，必须且只需$a-6<0$；要使$y>0$，必须且只需$a-4<0$，故a的值必须适合不等式组

$$\begin{cases} a-6<0 \\ a-4<0, \end{cases} \quad \text{解得} \quad a<4$$

所以当$a<4$时，原方程组的解是正数。

想想看：本题能否有负数解？

例2 买红铅笔和黑铅笔共a枝，用去了3角1分。已知红铅笔每枝5分，黑铅笔每枝3分，问两种铅笔各买了几枝？

解 设红铅笔和黑铅笔分别买了x枝和y枝，则得方程组

$$\begin{cases} x+y=a \\ 5x+3y=31 \end{cases} \quad \text{（以分做单位）}$$

$\because \frac{1}{5}\neq\frac{1}{3}$，$\therefore$该方程组必有唯一的一组解。利用消元法

可得 $$\begin{cases} x=\dfrac{31-3a}{2} \\ y=\dfrac{5a-31}{2} \end{cases}$$ 。

因铅笔枝数x，y必须是正数，所以首先应令$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$，

即 $\begin{cases} 31-3a>0 \\ 5a-31>0 \end{cases}$，解得 $\dfrac{31}{5}<a<\dfrac{31}{3}$，

即 $6\dfrac{1}{5}<a<10\dfrac{1}{3}$。

因铅笔的枝数a又必须是整数，所以a只可能是7，8，9，10。而x，y也必须是整数，即$31-3a$与$5a-31$必须是2的倍数，故只有如下两种情况：

当$a=7$时，$\begin{cases} x=5 \\ y=2; \end{cases}$

当$a=9$时，$\begin{cases} x=2 \\ y=7。 \end{cases}$

由此可知，该题中的铅笔总枝数a只能为7或9。

当$a=7$时，买红铅笔5枝，黑铅笔2枝，

当$a=9$时，买红铅笔2枝，黑铅笔7枝。

试试看：能否用一元一次方程来解？

练　习　一

1. 解关于x的方程　$(x+a)(x-b)=(x-a)(x+b)$

2. 已知方程　$(x+a)(x+b)=x^2-2x-1$有无数多解，求a和b的值。

3. 解方程　$2|x-1|+3=4x$

4. k是什么实数的时候，方程组

$\begin{cases}3x-6y=1\\5x-ky=2\end{cases}$　的解符合$x<0$，$y<0$的条件？

5. m是什么整数的时候，方程组

$\begin{cases}4x+3y=60\\mx+(m+2)y=60\end{cases}$　的解符合$x>y>0$的条件？

（三）一元二次方程

1. 根与系数的关系——韦达定理

设方程$ax^2+bx+c=0$……①（$a\neq0$）或

$$x^2+px+q=0\ \cdots\cdots②$$

的根为x_1，x_2

则对于①有$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$，对于②有$\begin{cases}x_1+x_2=-p\\x_1\cdot x_2=q\end{cases}$。

韦达定理一般有如下的三种应用：

(1) 已知方程的一根或两根间的关系，求另一根及字母系数；

(2) 不解方程，求两根对称式的值；

(3) 已知某种条件，作二次方程。

例 1　已知方程 $x^2+4x-2m=0$ 的一个根为 -3，求另一根和 m 的值。

解　设方程的另一根为 x，则由韦达定理可得

$$\begin{cases}(-3)+x=-4\\(-3)\cdot x=-2m\end{cases}，解得\quad x=-1，\ m=-\frac{3}{2}$$

∴ 方程的另一根为 -1，m 的值为 $-\frac{3}{2}$。

想想看：若把条件改为：已知一根比另一根大4，求它的两个根和 m 的值呢？

例 2　(1) 设方程 $2x^2-x-2=0$ 的根为 x_1、x_2，求 $\frac{x_2^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}$ 的值；

(2) 设方程 $3x^2-4x-2=0$ 的根为 α、β，求 $|\alpha-\beta|$ 的值；

(3) 设方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 α、β，求 $\alpha^4+\beta^4$ 的值。

解　(1) 由韦达定理可得 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{1}{2}\\x_1\cdot x_2=-1\end{cases}$

$$\therefore \frac{x_2^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}=\frac{x_2^3+x_1^3}{x_1\cdot x_2}=\frac{(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)}{x_1\cdot x_2}$$

$$=\frac{(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]}{x_1\cdot x_2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+3\right)}{-1}=-\frac{13}{8}=-1\frac{5}{8}$$

(2) $\because \begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{4}{3} \\ \alpha\cdot\beta=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-4\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{2}{3}\sqrt{10}$$

(3) $\because \begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

$$\therefore \alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$$

$$=[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]^2-2(\alpha\beta)^2$$

$$=\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}\right]^2-2\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$$

例3　求一个二次方程，使它的两个根是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根的：

(1) 相反数；(2) 倒数；(3) n 倍。

解　设 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 x_1，x_2

则由韦达定理可得 $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

(1) 所求方程的两根和与两根积分别为

$$(-x_1)+(-x_2)=-(x_1+x_2)=\frac{b}{a}$$

和 $(-x_1)(-x_2)=x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$，

$\therefore\ p=-\dfrac{b}{a}$，$q=\dfrac{c}{a}$，$\therefore$ 所求的方程为

$x^2-\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$，即$ax^2-bx+c=0$，

由此可知：b变号，根变号。

如　方程$x^2+x-2=0$的两根为$x_1=1$，$x_2=-2$

则方程$x^2-x-2=0$的两根必为-1和2

（2）所求方程的两根和与两根积分别为

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-\dfrac{b}{a}}{\dfrac{c}{a}}=-\frac{b}{c}\ \text{和}\ \frac{1}{x_1}\bullet\frac{1}{x_2}=\frac{a}{c}\text{。}$$

$\therefore$ 所求方程为$x^2+\dfrac{b}{c}x+\dfrac{a}{c}=0$，即$cx^2+bx+a=0$

由此可知：a，c互换根互倒

如　方程$x^2+x-2=0$的两根为1与-2

则方程$-2x^2+x+1=0$的两根必为1与$-\dfrac{1}{2}$。

（3）$\because\ nx_1+nx_2=n(x_1+x_2)=-n\cdot\dfrac{b}{a}$

$nx_1\bullet nx_2=n^2x_1x_2=n^2\bullet\dfrac{c}{a}$

$\therefore$ 所求的方程为$x^2+n\cdot\dfrac{b}{a}x+n^2\bullet\dfrac{c}{a}=0$，

即　$ax^2+nbx+n^2c=0$

由此可知：若将原方程中的后两项分别乘以 n 与n^2，所得新方程的两根是原方程两根的n倍。

由以上三种情况，可总结口诀如下：

b变号，根变号，a、c互换根互倒，

b、c分乘n、n^2，根变n倍错不了。

例4 试根据方程$2x^2-(4K+1)x+2K^2-1=0$的根的不同情况，确定K的取值范围。

(1) 两根同号 (2) 两根同正 (3) 两根同负

(4) 两根异号 (5) 异号且正根绝对值大

(6) 异号且负根绝对值大 (7) 一根为零，一根不为零

(8) 两根皆为零 (9) 无实数根

解 判别式

$$\begin{aligned}\Delta=b^2-4ac&=[-(4K+1)]^2-4\times2(2K^2-1)\\&=8K+9,\end{aligned}$$

两根之积为$\dfrac{2K^2-1}{2}$，两根之和为$\dfrac{4K+1}{2}$

(1) 两根同号 $\begin{cases}\Delta\geqslant0\\积>0\end{cases}$，即$\begin{cases}8K+9\geqslant0\\2K^2-1>0\end{cases}$

解得 $K>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$-\dfrac{9}{8}\leqslant K<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 两根同正 $\begin{cases}\Delta\geqslant0\\积>0\\和>0\end{cases}$，

即$\begin{cases}K>\dfrac{\sqrt{2}}{2}或-\dfrac{9}{8}\leqslant K<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\K>-\dfrac{1}{4}\end{cases}$

解得 $K>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$