高等院校
通信与信息专业规划教材

# 电磁场与电磁波学习指导与习题解答

袁敬闳　张　靖　编著
王　园　主审

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等院校通信与信息专业规划教材

# 电磁场与电磁波学习指导与习题解答

袁敬闳　张　靖　编著

王　园　主审

机械工业出版社

本书是《电磁场与电磁波》一书的配套教材。全书按照该教材的章节顺序，给出每章的“基本内容概述”、“教学基本要求及重点、难点”、“典型例题解析”及“习题解答”。

本书可供高等院校电子信息类专业的教师和学生使用，作为“电磁场与电磁波”课程的教学参考书和学习指导书。

**图书在版编目（CIP）数据**

电磁场与电磁波学习指导与习题解答/袁敬闳，张靖编著.—北京：机械工业出版社，2006.1

高等院校通信与信息专业规划教材

ISBN 7-111-17480-1

Ⅰ.电… Ⅱ.①袁…②张… Ⅲ.①电磁场-高等学校-教学参考资料②电磁波-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 112036 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：胡毓坚　责任编辑：王　颖　版式设计：冉晓华
责任校对：张　媛　责任印制：杨　曦
北京机工印刷厂印刷
2006 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
787mm × 1092mm 1/16 · 12.75 印张 · 312 千字
0 001—5 000 册
定价：19.00 元

## 高等院校通信与信息专业规划教材
## 编委会名单

（按姓氏笔画排序）

# 出版说明

为了培养21世纪国家和社会急需的通信与信息领域的高级科技人才，配合高等院校通信与信息专业的教学改革和教材建设，机械工业出版社会同全国在通信与信息领域具有雄厚师资和技术力量的高等院校，组成阵容强大的编委会，组织长期从事教学的骨干教师编写了这套面向普通高等院校的通信与信息专业系列教材，并将陆续出版。

这套教材力求做到：专业基础课教材概念清晰、理论准确、深度合理，并注意与专业课教学的衔接；专业课教材覆盖面广、深度适中，不仅体现相关领域的最新进展，而且注重理论联系实际。

这套教材的选题是开放式的。随着现代通信与信息技术日新月异地发展，我们将不断更新和补充选题，使这套教材及时反映通信与信息领域的新发展和新技术。我们也欢迎在教学第一线有丰富教学经验的教师及通信与信息领域的科技人员积极参与这项工作。

由于通信与信息技术发展迅速，而且涉及领域非常宽，所以在这套教材的选题和编审中如有缺点和不足之处，诚请各位老师和同学提出宝贵意见，以利于今后不断改进。

机械工业出版社

高等院校通信与信息专业规划教材编委会

# 前　言

“电磁场与电磁波”历来被认为是一门教师难教、学生难学的课程。为了对改善这种情况有所帮助，我们编写了这本与《电磁场与电磁波》（冯林、杨显清、王园等编著，机械工业出版社 2004 年 6 月出版）配套的教学指导书。希望能帮助教师正确理解和掌握各章的教学基本要求，处理好课程教学中的重点和难点，也希望帮助学生正确理解和掌握“电磁场与电磁波”的基本内容，提高分析问题和解决问题的能力。

全书共分 11 章：电磁场的数学基础、麦克斯韦方程组、静态场分析、时变电磁场、静态场边值问题（一）、无界空间中的平面电磁波、波的反射与折射、有界空间中的电磁波（导行电磁波）、电磁波的辐射、电磁波的衍射和散射、静态场边值问题（二）及附录。除附录外，每章均由四部分组成：

**1. 基本内容概述**

对本章内容作简要归纳，给出重要的公式和结论。

**2. 教学基本要求及重点、难点**

根据课程教学大纲，提出本章必须牢固掌握的内容和一般了解的内容，对重点、难点作简要讨论。

**3. 典型例题解析**

详细分析和解答具有代表性的例题，意在使读者加深对基本理论的掌握，拓宽解题思路，提高解题技巧。

**4. 习题解答**

对每章的习题作了全解。

学习“电磁场与电磁波”课程，解题是重要的学习环节之一，也是学习过程中的难点所在。通过解题，能巩固和加深对基本理论的理解，培养理论联系实际的能力，掌握分析和计算的技巧，希望读者先要自己解题再看习题解答。

本书由袁敬闳编写第 1、3、5、8、9、10、11 章和附录，张靖编写第 2、4、6、7 章，全书由王园审核定稿。

本书是在总结了作者们多年从事“电磁场”课程教学的经验，参阅了近年来国内外的相关教材和参考书的基础上编写的。

由于作者水平有限，存在的不妥或错误之处，敬请读者指正。

编　者

# 目　录

# 第 1 章　电磁场的数学基础

## 1.1　基本内容概述

时空领域内发生的物理现象通称为“场”，一般有两类场：标量场和矢量场。研究电磁场在空间的分布和变化规律的基本数学工具是矢量场分析。矢量场的空间变化规律由其散度和旋度来描述，标量场的空间变化规律由其梯度来描述。本章主要讨论矢量场和标量场的微分和积分。

**1. 标量场和矢量场**

一个标量场可用一个标量函数 $u(x \cdot y \cdot z)$ 来描述。

标量场一般可形象直观地用等值面来描述：

$$u(x \cdot y \cdot z) = c \tag{1-1}$$

其中，$c$ 为常数。式(1-1)称为等值面方程。

一个矢量场可用一矢量函数来描述：

$$\boldsymbol{F}(x \cdot y \cdot z) = \boldsymbol{a}_x F_x(x \cdot y \cdot z) + \boldsymbol{a}_y F_y(x \cdot y \cdot z) + \boldsymbol{a}_z F_z(x \cdot y \cdot z) \tag{1-2}$$

常用矢量线来形象直观地描述矢量场，矢量场线的微分方程为：

$$\mathrm{d}x / F_x = \mathrm{d}y / F_y = \mathrm{d}z / F_z \tag{1-3}$$

**2. 标量场的方向导数和梯度**

标量场 $u(x \cdot y \cdot z)$ 在 $M_0$ 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数为：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{1-4}$$

上式中，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向余弦。

标量场的梯度 $\nabla u(x \cdot y \cdot z)$ 是一个矢量场，在直角坐标系下：

$$\mathrm{grad}\,u(x \cdot y \cdot z) = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial u}{\partial z} = \nabla u(x \cdot y \cdot z) \tag{1-5}$$

上式中，$\nabla = \boldsymbol{a}_x \dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \dfrac{\partial}{\partial z}$ 称为微分算子矢量

**3. 矢量场中的通量**

在一个矢量场 $\boldsymbol{F}(x \cdot y \cdot z)$ 中，取一个有向曲面 $S$，则 $\boldsymbol{F}$ 矢量场线穿过曲面 $S$ 上的总数量称为通量 $\psi$，

$$\psi = \int_S \boldsymbol{F}(x \cdot y \cdot z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}(x \cdot y \cdot z) \tag{1-6}$$

在直角坐标系中：

$$\psi = \int_s (F_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + F_y \mathrm{d}z\mathrm{d}x + F_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y) \tag{1-7}$$

矢量场 $\boldsymbol{F}(x \cdot y \cdot z)$中任一个闭合曲面 $S$ 的通量为：

$$\oint_S \boldsymbol{F}(x \cdot y \cdot z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}(x \cdot y \cdot z) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \tag{1-8}$$

**4. 矢量场的散度**

矢量场中任一点 $M$ 处的通量源的体密度称为散度：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}(x \cdot y \cdot z) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta v} \tag{1-9}$$

在直角坐标系中：

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{F}(x \cdot y \cdot z) &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{F_y}{y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ &= \left(\boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\boldsymbol{a}_x F_x + \boldsymbol{a}_y F_y + \boldsymbol{a}_z F_z) = \nabla \cdot \boldsymbol{F} \end{aligned} \tag{1-10}$$

通量和散度之间需要遵守的规则为：

$$\int_v \nabla \cdot \boldsymbol{F} \mathrm{d}v = \oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-11}$$

上式中，体积 $v$ 的闭合面为 $S$，式(1-11)称为散度定理或高斯定理。

**5. 矢量场中的环量**

矢量场中沿任一条闭合环路 $C$ 的线积分为：

$$\Gamma = \oint_S \boldsymbol{F}(x \cdot y \cdot z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}(x \cdot y \cdot z) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \tag{1-12}$$

式中，$\Gamma$ 称为环量，在直角坐标系中：

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_C [F_x(x \cdot y \cdot z)\mathrm{d}x + F_y(x \cdot y \cdot z)\mathrm{d}y + F_z(x \cdot y \cdot z)\mathrm{d}z] \tag{1-13}$$

**6. 矢量场的旋度**

矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在点 $M$ 处的环量面密度的最大值为：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{n}]\left[\lim_{\Delta S \to 0} \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} / \Delta S\right]_{\max} \tag{1-14}$$

$\boldsymbol{n}$ 为环路 $C$ 所围成的面积 $\Delta S$ 的方向，式(1-14)为旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$ 的定义式。

在直角坐标系中：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{a}_x F_x + \boldsymbol{a}_y F_y + \boldsymbol{a}_z F_z)$$

即：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{1-15}$$

环量和旋度之间需要遵守的规则为：

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-16}$$

$S$ 为闭合环 $C$ 所限定的曲面，式(1-16)称为旋度定理或斯托克斯定理。

**7. 亥姆霍兹定理**

一般情况下，矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度和旋度均不为零，即：$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(x \cdot y \cdot z) = g(x \cdot y \cdot z)$，和$\nabla \times \boldsymbol{F}(x \cdot y \cdot z) = \boldsymbol{G}(x \cdot y \cdot z)$

(1) 在无界空间中，矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度和旋度均已知的情况下，则此矢量场便惟一地确定。

(2) 在有界空间内，若已知 $\boldsymbol{F}$ 场的散度和旋度下，又已知边界条件，则此矢量场 $\boldsymbol{F}$ 也能惟一确定。这就是所谓的亥姆霍兹定理。它是分析求解电磁场与波的惟一依据。

**8. 无旋场**

有一种矢量场 $\boldsymbol{F}(x \cdot y \cdot z)$，它在空间每处的旋度都为零，即$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$ 则此矢量场通称为无旋场。静电场 $\boldsymbol{E}(x \cdot y \cdot z)$和重力场 $\boldsymbol{F}(x \cdot y \cdot z)$就是众所周知的无旋场又称守恒场。在守恒场中，必定有一个相应的标量场 $u(x \cdot y \cdot z)$存在。例如静电场 $\boldsymbol{E}(x \cdot y \cdot z)$中必定有一个电位标量场 $u(x \cdot y \cdot z)$存在，而电场与电位场之间的关系为：

$$-\boldsymbol{E}(x \cdot y \cdot z) = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial u}{\partial z} = \nabla u$$

即：

$$\boldsymbol{E} = -\nabla u \tag{1-17}$$

无旋度的电场 $\boldsymbol{E}$，它的环量恒等于零，即：

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

进一步可求得电位函数 $u$ 为：

$$u(x \cdot y \cdot z) = \int_{(x \cdot y \cdot z)}^{(x_p, y_p, z_p)} E(x \cdot y \cdot z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-18}$$

式(1-18)中 $p(x_p, y_p, z_p)$是电位的参考点(零电位点 $u_p = 0$)。

## 1.2 教学基本要求及重点、难点

### 1. 教学基本要求

理解标量场和矢量场的概念，了解等值面和矢量线是描述标量场和矢量场的主要方法。

矢量场的散度和旋度,标量场的梯度是矢量分析中最基本的和最重要的数学工具,故应深刻理解,掌握它们的计算公式和方法。

高斯定理和斯托克斯定理是矢量分析中两个重要的定理,应熟练掌握和应用。

在求解矢量场时,亥姆霍兹定理是一个重要的基本定理,应理解和掌握它。

**2. 重点及难点的讨论**

(1) 矢量场 $\boldsymbol{F}(x\cdot y\cdot z)$的旋度和散度,是在 $x\cdot y\cdot z$ 空间内分析$\boldsymbol{F}(x\cdot y\cdot z)$各处的空间变化特性:

1) $\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}$,$\boldsymbol{G}(x\cdot y\cdot z)$称为形成 $\boldsymbol{F}(x\cdot y\cdot z)$有旋的旋涡源函数,由于它也是矢量,故又称矢性源函数;$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=g$,$g(x\cdot y\cdot z)$称为引起 $\boldsymbol{F}(x\cdot y\cdot z)$有散发性的散度源函数,由于它是一个标量,故称为标性源函数。

2) $$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\left(\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{a}_xF_x+\boldsymbol{a}_yF_y+\boldsymbol{a}_zF_z)$$
$$=\partial F_x/\partial x+\partial F_y/\partial y+\partial F_z/\partial z=g(x\cdot y\cdot z)$$

$\boldsymbol{F}$ 的散度描述了 $\boldsymbol{F}$ 的三个分量沿着各自方向上的变化律之和。

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\left(\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\boldsymbol{a}_xF_x+\boldsymbol{a}_yF_y+\boldsymbol{a}_zF_z)$$
$$=\boldsymbol{a}_x\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{a}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{a}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$
$$=\boldsymbol{G}(x\cdot y\cdot z)$$

$\boldsymbol{F}$ 的旋度描述了 $\boldsymbol{F}$ 的三个分量沿着与其垂直方向上的变化率的矢量和。

3) 利用矢量微分算子$\nabla=\left(\boldsymbol{a}_x\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$后,将 $\boldsymbol{F}$ 的散度和旋度运算转化为$\nabla$和 $\boldsymbol{F}$ 的标量积和矢量积的乘法运算,初学者要牢记和熟练直角坐标系中的散度和旋度的运算。但在圆柱坐标和球坐标系内的运算必须(或可以)查找数学工具手册中的公式来运算。

(2) 亥姆霍兹定理指出:矢量场 $\boldsymbol{F}(x\cdot y\cdot z)$可由它的散度$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=g$ 和旋度$\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}(x\cdot y\cdot z)$两个方程联立求解,获得惟一性的解 $\boldsymbol{F}$。

1) 在无界空间内,若矢性源 $\boldsymbol{G}$ 及标性源 $g$ 均已知,则联立求解两个微分方程$\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}$和$\nabla\boldsymbol{F}=g$,可获得矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的惟一解,另须注意:若无界空间内 $\boldsymbol{G}=0$,$g=0$,则 $\boldsymbol{F}=0$。

2) 在有界空间内,$\boldsymbol{G}$ 及 $g$ 均已知,又已知此空间的边界条件,$\boldsymbol{F}$ 也能获得惟一解,即使 $\boldsymbol{G}=0$,$g=0$,边界条件不为零,则 $\boldsymbol{F}$ 也能有惟一解。

3) 若已知$\nabla\times\boldsymbol{F}=0$,$\nabla\boldsymbol{F}=g$,无旋度的矢量场,(又称守恒场),则一个有标量位$u(x\cdot y\cdot z)$存在,并应熟记:此标量位场的梯度与矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的关系为$\boldsymbol{F}=-\nabla u$(或 $\boldsymbol{F}=+\nabla u$)。

## 1.3 典型例题分析

**例 1-1** 已知 $\boldsymbol{R}(x\cdot y\cdot z)=\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\boldsymbol{a}_z z$，$R=|\boldsymbol{R}|$，求$\nabla\cdot\boldsymbol{R}$ 和$\nabla\times\boldsymbol{R}$。

**解一**：在直角坐标系中：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{R}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$$

$$\nabla\times\boldsymbol{R}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0$$

**解二**：在球坐标系中，因为有：

$$\boldsymbol{R}(x\cdot y\cdot z)=\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\boldsymbol{a}_z z=\boldsymbol{a}_r r$$

$$r=|\boldsymbol{R}|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

而在球坐标系下，$\nabla\boldsymbol{R}=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}_r r)=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2 r)=3$。

$$\nabla\times\boldsymbol{R}=\nabla\times(\boldsymbol{a}_r r)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}r & r\boldsymbol{a}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{a}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & 0 & 0\\ r & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

**例 1-2** 一个二维的速度矢量场$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}_x(-y)+\boldsymbol{a}_y x$。求(1)速度场线方程，(2)$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$，(3)$\nabla\times\boldsymbol{v}$。

**解**：(1) 速度场线方程为$-\mathrm{d}x/y=\mathrm{d}y/x$，两边积分得场线方程为：$x^2+y^2=c^2$

$c$ 为圆的半径，标明速度$|\boldsymbol{v}|$与半径 $c$ 成正比。

(2) $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial}{\partial x}(-y)+\dfrac{\partial}{\partial y}(x)=0$，场线无"源"头，一定是闭合场线(圆)。

(3) $\nabla\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0\\ -y & x & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{a}_z(2)$. 矢性源为 $\boldsymbol{a}_z 2$。

**例 1-3** 已知 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{a}_x(x-x')+\boldsymbol{a}_y(y-y')+\boldsymbol{a}_z(z-z')$，$R=|\boldsymbol{R}|$。

求(1) $\nabla|\boldsymbol{R}|$ (2) 若 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{R}/R^3$ 在 $R\neq0$ 处求旋度和散度。

**解**：(1) $R=|\boldsymbol{R}|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$，

故$\nabla|\boldsymbol{R}|=\nabla R=\boldsymbol{a}_x\dfrac{\partial R}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\dfrac{\partial R}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\dfrac{\partial R}{\partial z}$

$$= [(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-1/2}[\boldsymbol{a}_x(x-x')+\boldsymbol{a}_y(y-y')+\boldsymbol{a}_z(z-z')]$$

$= \boldsymbol{R}/R$。

(2) 旋度的运算公式中有：

$$\nabla\times(u\boldsymbol{A}) = u\nabla\times\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\times\nabla u,\nabla\cdot(u\boldsymbol{A}) = u\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla u$$

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}, u=1/R^3, \boldsymbol{D}=\boldsymbol{R}u$，则有

$$\nabla\times\boldsymbol{D} = \frac{1}{R^3}\nabla\times\boldsymbol{R}+\nabla\left(\frac{1}{R^3}\right)\times\boldsymbol{R}$$

其中 $\nabla(1/R^3)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{1}{R^3}\right)\nabla R = -3\boldsymbol{R}/R^5, \nabla\times\boldsymbol{R}=0$

因此得到 $$\nabla\times\boldsymbol{D}=0-\boldsymbol{R}\times\left(-\frac{3\boldsymbol{R}}{R^5}\right)=0,(R\neq 0)$$

$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{1}{R^3}\nabla\cdot\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}\cdot\nabla\left(\frac{1}{R^3}\right)$，又有 $\nabla\cdot\boldsymbol{R}=3$

因此得到 $$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{3}{R^3}+\boldsymbol{R}\cdot\left(-\frac{3\boldsymbol{R}}{R^5}\right)=0 \quad (\boldsymbol{R}\neq 0)$$

**注：**本例题中 $\nabla\times\boldsymbol{D}=0$ 和 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0(R\neq 0)$，由亥姆霍兹定理可知，空间内既无散度性源函数 $g$，又无旋度性源函数 $\boldsymbol{G}$，但在 $R\to 0$ 时 $\boldsymbol{D}\to\infty$，表明在 $R=0$ 处有一个点源函数。

## 1.4 习题解答

1. 给定两矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x2+\boldsymbol{a}_y3-\boldsymbol{a}_z4$ 和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x4-\boldsymbol{a}_y5+\boldsymbol{a}_z6$，求它们之间的夹角和 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量。

**解：**(1) $\cos\theta_{AB}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}/|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = \dfrac{(\boldsymbol{a}_x2+\boldsymbol{a}_y3-\boldsymbol{a}_z4)\cdot(\boldsymbol{a}_x4-\boldsymbol{a}_y5+\boldsymbol{a}_z6)}{\sqrt{2^2+3^2+(-4)^2}\sqrt{4^2+(-5)^2+6^2}}$

$$\theta_{AB} = \arccos\frac{8-15-24}{\sqrt{29}\sqrt{77}} = \arccos(-31/47.3) = 131°$$

(2) $AB=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_B=(\boldsymbol{a}_x2+\boldsymbol{a}_y3-\boldsymbol{a}_z4)\cdot(\boldsymbol{a}_x4-\boldsymbol{a}_y5+\boldsymbol{a}_z6)/\sqrt{4^2+(-5)^2+6^2}$

$AB=-31/\sqrt{77}=-3.53$。

2. 给定两矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x2+\boldsymbol{a}_y3-\boldsymbol{a}_z4$ 和 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{a}_x6-\boldsymbol{a}_y4+\boldsymbol{a}_z$，求 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}_x-\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z$ 上分量。

**解：**$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_C = \begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ 2 & 3 & -4\\ -6 & -4 & 1\end{vmatrix}\cdot(\boldsymbol{a}_x-\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z/\sqrt{3})$

$$=1/\sqrt{3}[\boldsymbol{a}_x(3-16)+\boldsymbol{a}_y(24-2)+\boldsymbol{a}_z(-8+18)]\cdot(\boldsymbol{a}_x-\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z)$$

$$= 1/\sqrt{3}(-\boldsymbol{a}_x 13 + \boldsymbol{a}_y 22 + \boldsymbol{a}_z 10)\cdot(\boldsymbol{a}_x - \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z) = -25/\sqrt{3} = -14.43$$

3. 给定三个矢量 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y 2 - \boldsymbol{a}_z 3$，$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{a}_y 4 + \boldsymbol{a}_z$ 和 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a}_x 5 - \boldsymbol{a}_z 2$，求(1) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 和 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$，(2) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$。

**解**：$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}_x(2-12) + \boldsymbol{a}_y(-1) + \boldsymbol{a}_z(-4)$$

$$(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ 0 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}_x 8 + \boldsymbol{a}_y 5 + \boldsymbol{a}_z 20$$

故(1) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) =$

$$(\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y 2 - \boldsymbol{a}_z 3)\cdot(\boldsymbol{a}_x 8 + \boldsymbol{a}_y 5 + \boldsymbol{a}_z 20) = -42$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = (-\boldsymbol{a}_x 10 - \boldsymbol{a}_y - \boldsymbol{a}_z 4)\cdot(\boldsymbol{a}_x 5 - \boldsymbol{a}_z 2) = -42$$

(2) $$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ -10 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}_x 2 + \boldsymbol{a}_y(-40) + \boldsymbol{a}_z 5$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 20 \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}_x 55 - \boldsymbol{a}_y 44 - \boldsymbol{a}_z 11$$

4. 求标量场 $u = xy + yz + zx$ 在点 $M(1,2,3)$ 处沿矢径的方向导数。

**解**：$\nabla u = \nabla(xy + yz + zx) = \boldsymbol{a}_x(y+z) + \boldsymbol{a}_y(x+z) + \boldsymbol{a}_z(y+x)$

$$\nabla u|_{(1,2,3)} = \boldsymbol{a}_x 5 + \boldsymbol{a}_y 4 + \boldsymbol{a}_z 3$$

矢径 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_x x + \boldsymbol{a}_y y + \boldsymbol{a}_z z = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y 2 + \boldsymbol{a}_z 3$

矢径的方向导数为：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \boldsymbol{n}\cdot\nabla u|_{(1,2,3)} = \frac{(\boldsymbol{a}_x 1 + \boldsymbol{a}_y 2 + \boldsymbol{a}_z 3)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}}\cdot(\boldsymbol{a}_x 5 + \boldsymbol{a}_y 4 + \boldsymbol{a}_z 3) = 22/\sqrt{14}$$

5. 已知标量函数场 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3x - 2y - 6z$

(1) 求 $\nabla u$；(2)在哪些点上 $\nabla u$ 等于零。

**解**：(1) $$\nabla u = \boldsymbol{a}_x\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= \boldsymbol{a}_x(2x+3) + \boldsymbol{a}_y(4y-2) + \boldsymbol{a}_z(6z-6)$$

(2) $\frac{\partial u}{\partial x} = (2x+3) = 0$，$x = -1.5$；$\frac{\partial u}{\partial y} = 4y - 2 = 0$，$y = 0.5$；$\frac{\partial u}{\partial z} = 6z - 6 = 0$，$z = 1$，则 $\nabla u$ 在点$(-1.5, 0.5, 1)$处为零。

6. 利用直角坐标系，证明$\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$

**证明**：$\nabla(uv)=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x}(uv)+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y}(uv)+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}(uv)$

$$=\left(\boldsymbol{a}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)v+u\left(\boldsymbol{a}_x\frac{\partial v}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial v}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=v\nabla u+u\nabla v$$

7. 已知矢量场$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x x^2yz+\boldsymbol{a}_y xy^2z+\boldsymbol{a}_z xyz^2$ 求$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$

**解**：$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}_x x^2yz+\boldsymbol{a}_y xy^2z+\boldsymbol{a}_z xyz^2)$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(x^2yz)+\frac{\partial}{\partial y}(xy^2z)+\frac{\partial}{\partial z}(xyz^2)=6xyz$$

8. 设$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\boldsymbol{a}_z z$，$r=|\boldsymbol{r}|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$，$\boldsymbol{E}_0$和$\boldsymbol{k}$均为常矢量，(1)求$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$，$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)$，$\nabla f(r)$；(2)$\nabla\cdot\boldsymbol{r}$，$\nabla\cdot(\boldsymbol{r}/r)$，$\nabla(r\cdot\boldsymbol{k})$；(3) 证明：$\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$。

**解**：在球坐标系内作梯度和散度的运算：

(1) $\nabla(1/r)=\boldsymbol{a}_r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(1/r)=-\boldsymbol{a}_r1/r^2=-\boldsymbol{r}/r^3$

$\nabla(1/r^3)=\boldsymbol{a}_r(-3)(1/r^4)=-3\boldsymbol{r}/r^5$

$\nabla[f(r)]=\boldsymbol{a}_r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[f(r)]=f'(r)\boldsymbol{r}/r$。

(2) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=1/r^2\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2r)\right\}=\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^3)=3$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{r}/r)=\boldsymbol{r}\cdot\nabla(1/r)+\frac{1}{r}\nabla\cdot\boldsymbol{r}=-r^2/r^3+3/r=2/r$

$\nabla\cdot(r\boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}\cdot\nabla(r)=\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}/r$

(3) **证明**：$\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{a}_r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\boldsymbol{k}r)=\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{a}_r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r}=\boldsymbol{k}$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0)\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=0+\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$

9. 已知矢量场$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_x x^2+\boldsymbol{a}_y x^2y^2+\boldsymbol{a}_z 24x^2y^2z^3$。(1)计算$\int_v\nabla\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}v$，其中$v$是中心在原点的单位立方体($|x|\leqslant\frac{1}{2}$，$|y|\leqslant\frac{1}{2}$，$|z|\leqslant\frac{1}{2}$)；(2) 计算$\boldsymbol{E}$在此立方体的表面$S$上的积分$\oint_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，以此验证散度定理。

**解**：(1) 首先求$\boldsymbol{E}$的散度：

$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=2x+2yx^2+72x^2y^2z^2$，其次求体积分：

$$\int_r\nabla\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}v=\int_r(2x+2yx^2+72x^2y^2z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_{-1/2}^{+1/2} \mathrm{d}x \int_{-1/2}^{+1/2} \mathrm{d}y \int_{-1/2}^{+1/2} (2x + 2yx^2 + 72x^2y^2z^2)\mathrm{d}z$$

$$= \int_{-1/2}^{+1/2} \mathrm{d}x \int_{-1/2}^{+1/2} \mathrm{d}y \left\{ (2x + 2yx^2) z \int_{-1/2}^{+1/2} + \frac{1}{3} 72x^2y^2z^3 \int_{-1/2}^{+1/2} \right\}$$

$$= \int_{-1/2}^{+1/2} \mathrm{d}x \int_{-1/2}^{+1/2} (2x + 2yx^2 + 6x^2y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1/2}^{+1/2} \mathrm{d}x (2x + \frac{1}{2}x^2) = 1/24$$

（2）求 $\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S (E_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + E_y \mathrm{d}z\mathrm{d}x + E_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \oint_S x^2y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \oint_S 24x^2y^2z^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 0 + 0 + 24\left\{ \frac{1}{8} \int_{-1/2}^{+1/2} x^2 \mathrm{d}x \int_{-1/2}^{+1/2} y^2 \mathrm{d}y \right\} \times 2 = 1/24$$

因此 $\int_v \nabla \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}v = \oint_S \boldsymbol{E} \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 1/24$，验证 3 散度定理。

10. 利用直角坐标系，证明：$\nabla \cdot (u\boldsymbol{A}) = u\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \nabla u$。

**证明：** $\nabla \cdot (u\boldsymbol{A}) = \left( \boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\boldsymbol{a}_x uA_x + \boldsymbol{a}_y uA_y + \boldsymbol{a}_z uA_z)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(uA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(uA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(uA_z)$$

$$= u\frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y \frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial A_z}{\partial z} + A_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= \boldsymbol{a}_x \cdot \boldsymbol{a}_x u \frac{\partial A_x}{\partial x} + \boldsymbol{a}_x \cdot \boldsymbol{a}_x A_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \cdot \boldsymbol{a}_y \left( u\frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$+ \boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{a}_z \left( u\frac{\partial A_z}{\partial z} + A_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$= u\boldsymbol{a}_x \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \boldsymbol{a}_x A_x + u\boldsymbol{a}_y \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \boldsymbol{a}_y A_y + u\boldsymbol{a}_z \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \boldsymbol{a}_z A_z$$

$$+ \left( \boldsymbol{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \boldsymbol{a}_x A_x + \left( \boldsymbol{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \boldsymbol{a}_y A_y + \left( \boldsymbol{a}_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot \boldsymbol{a}_z A_z$$

$$= u\left( \boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z)$$

$$+ \left( \boldsymbol{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot (\boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z)$$

$$= u\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \nabla u。$$

11. 求下列矢量的旋度：（1）$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x x^2 + \boldsymbol{a}_y y^2 + \boldsymbol{a}_z z^2$；（2）$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_x yz + \boldsymbol{a}_y zx + \boldsymbol{a}_z xy$；（3）$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a}_x (y^2 + z^2) + \boldsymbol{a}_y (z^2 + x^2) + \boldsymbol{a}_z (x^2 + y^2)$

**解**：(1) $\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}=\boldsymbol{a}_x\left(\dfrac{\partial z^2}{\partial y}-\dfrac{\partial y^2}{\partial z}\right)+\boldsymbol{a}_y\left(\dfrac{\partial x^2}{\partial z}-\dfrac{\partial z^2}{\partial x}\right)+\boldsymbol{a}_z\left(\dfrac{\partial y^2}{\partial x}-\dfrac{\partial x^2}{\partial y}\right)=0$

(2) $\nabla\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ yz & zx & xy\end{vmatrix}=\boldsymbol{a}_x(x-x)+\boldsymbol{a}_y(y-y)+\boldsymbol{a}_z(z-z)=0$

(3) $\nabla\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ (y^2+z^2) & (z^2+x^2) & (x^2+y^2)\end{vmatrix}=\boldsymbol{a}_x(2y-2z)+\boldsymbol{a}_y(2z-2x)+\boldsymbol{a}_z(2x-$
$2y)=2[\boldsymbol{a}_x(y-z)+\boldsymbol{a}_y(z-x)+\boldsymbol{a}_z(x-y)]$

12. 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\boldsymbol{a}_z z$，$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{k}$ 为常矢量。证明：(1) $\nabla\times\boldsymbol{r}=0$，$\nabla\times(\boldsymbol{r}/r)=0$，$\nabla\times[f(r)\boldsymbol{r}]=0$；(2) $\nabla\times(\boldsymbol{k}/r)=\dfrac{1^{\boldsymbol{k}}}{r^3}\times\boldsymbol{r}$，$\nabla\times(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}r})=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}r}$。

**证**：可在球坐标系中求证：

(1) $\nabla\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_r & r\boldsymbol{a}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{a}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & 0 & 0\\ r & 0 & 0\end{vmatrix}=0$

$\nabla\times\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_r & r\boldsymbol{a}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{a}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$

$\nabla\times[f(r)\boldsymbol{r}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_r & r\boldsymbol{a}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{a}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & 0 & 0\\ rf(r) & 0 & 0\end{vmatrix}=0$

(2) $\nabla\times(\boldsymbol{k}/r)=\dfrac{1}{r}\nabla\times\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}\times\nabla\dfrac{1}{r}=0+\boldsymbol{k}\times(-\boldsymbol{r}/r^3)$

$=\dfrac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{k}$

$\nabla\times(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\nabla\times\boldsymbol{E}_0-\boldsymbol{E}_0\times\nabla\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$

$=0-\boldsymbol{E}_0\times[\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]=-\boldsymbol{E}_0\times(\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$