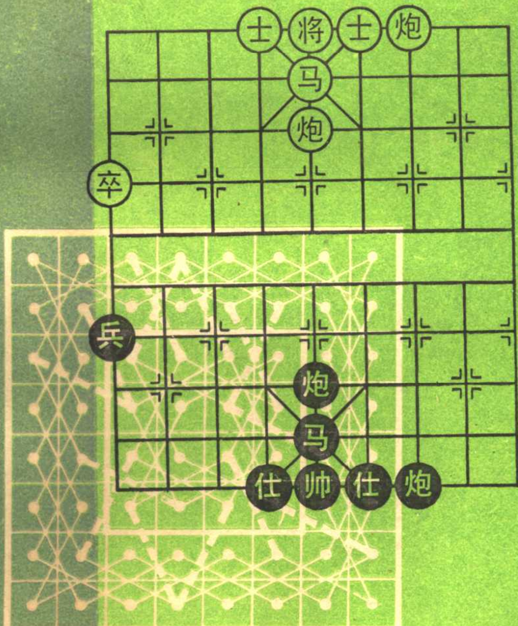
# 棋盘上的数学

中学生文库

SHENG WENKU




上海教育出版社

中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU

# 棋盘上的数学

单墫 程龙

上海教育出版社

责任编辑　冯　贤
封面设计　范一辛

中学生文库　棋盘上的数学
单墫　程龙

上海教育出版社出版发行
(上海永福路123号)
各地新华书店经销　上海市印刷十二厂印刷
开本787×1092 1/32 印张3.375 插页2 字数61,000
1987年11月第1版　1987年11月第1次印刷
印数1—17,800本

统一书号：7150·3992　定价：0.59元
ISBN 7-5820-0002-8/G6·3

# 前言

“纹枰对座，

从容谈兵.”

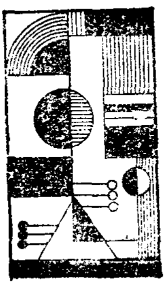
这是著名军事家陈毅元帅咏颂弈棋的诗句. 你看：俩人“纹枰对座”，在一方小小的棋盘上摆开了战场. 这里虽听不见炮车轰隆、战马嘶鸣，但是，他们都象真正的“军事统帅”那样，运筹帷幄，指挥着“千军万马”，进行着智力的拚搏！对于棋界高手，不论是象棋、围棋还是国际象棋，不仅要具有军事家的机敏与善断，还需要有数学家的思维与推理.

作为智力拚搏的战场，即棋盘本身还可以提供许许多多形形色色的数学问题. 这些问题不但饶有趣味，而且蕴含着深刻的数学理论背景，这或许是大部分下棋爱好者所始料未及的吧！

这本小册子，就是向你介绍这些问题，希望能引起你的兴趣.

# 目录





# 一 棋　　盘

象棋、围棋和国际象棋的棋盘都是长方形，由一些横线与纵线组成。

图 1 是象棋的棋盘，它由 10 条横线与 9 条纵线组成，棋子放在横线与纵线的交叉点上。

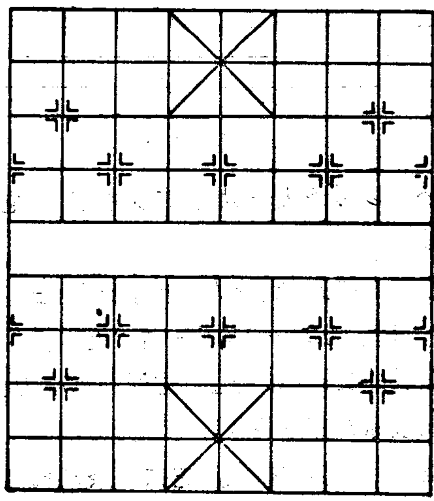


图 1

图 2 是围棋的棋盘，它由 19 条横线和 19 条纵线组成，棋子也是放在横线与纵线的交叉点上。

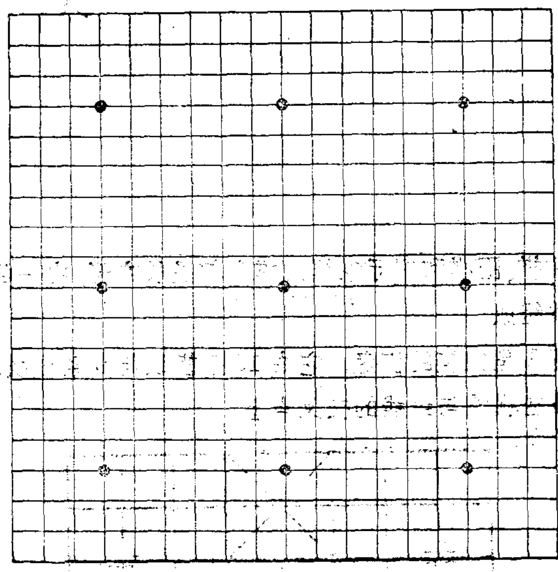


图 2

我们还可以考虑更一般的“广义棋盘”，它由 $m$ 条横线与 $n$ 条纵线组成。

坐标平面上的直线 $y=k(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 与直线 $x=h(h=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 构成一个“无限棋盘”。棋子放在横线与纵线的交点 $(h, k)$ 上，这样的点称为整点（因为横坐标 $h$ 与纵坐标 $k$ 都是整数），也称为格点。

图 3 是国际象棋的棋盘，它由 9 条横线与 9 条纵线组成，纵线之间的距离与横线之间的距离都是相等的，因此截

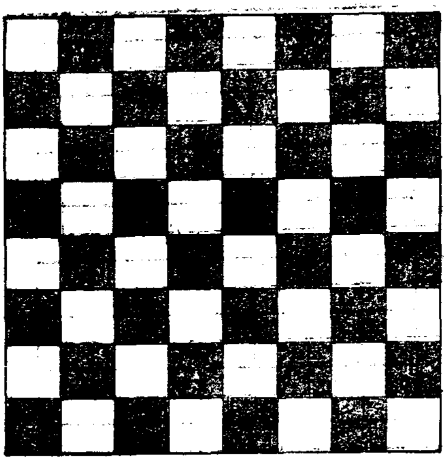


图 3

得 $8\times8=64$ 个相等的正方形的小方格. 这种棋盘称为 $8\times8$ 的棋盘. 类似地, 如果每行有 $m$ 个小方格, 每列有 $n$ 个小方格, 这种棋盘称为 $m\times n$ 的(广义)棋盘或 $m\times n$ 的矩形.

国际象棋的棋子是放在方格中的, 这与中国象棋、围棋不同.

但这种不同只是表面上的. 如果在国际象棋盘上, 取每个小方格的中心, 将这些中心(64 个)用横线与纵线连接起来, 而将原来的横线、纵线擦去, 就得到一个由 8 条横线与 8 条纵线组成的新棋盘, 棋子恰好放在新棋盘的横线与纵线的交叉点上.

这样得到的新棋盘称为原棋盘的对偶图或对偶棋盘(图 4).

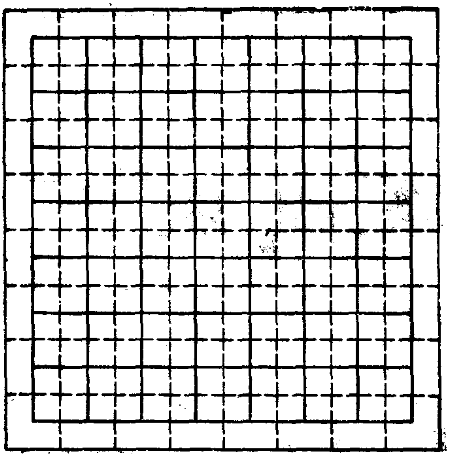


图 4

关于棋盘，流传着一个脍炙人口的古老故事，故事的大意是这样：

传说一位印度皇帝正为宫庭生活的单调而烦倦苦恼的时候，学会了国际象棋，他立即被这种有趣的游戏所吸引，从中得到了无穷的乐趣．皇帝一高兴，决定给国际象棋发明者以重赏．

于是国际象棋发明者锡塔被召进宫．

“我要给你奖赏，”皇帝说：“你提出要求吧，我将满足你的愿望．”

“陛下，请赏给我一棋盘麦子吧．”锡塔指着棋盘说：“请在棋盘的第一个方格赏我一粒麦子，第二个方格赏我二粒麦子，第三个方格赏四粒，第四格赏八粒，第五格赏十六粒……”

“我懂了，”皇帝打断他的话，“你是要在棋盘上的六十四个格子上都得到麦子，每一个格子上得到两倍于前面一格的麦粒．可是，你不认为这点要求太微不足道吗？你应该知道我的财富有多么巨大！”

“是的，我只需要棋盘上的这些麦粒．”锡塔笑了笑．

“好吧，我一定满足你的要求，下午就给你如数领取”．

可是，锡塔并没有按时领到这笔奖赏．原因是皇帝和他的财政大臣紧张地算了一个下午，还没有算出这“一棋盘”的麦粒数．

其实，这个问题很简单．国际象棋盘上有 64 个小方格（见图 3），锡塔所要的麦粒数是

$$S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}.$$

假设皇帝多赏一粒麦子给锡塔，即

$$S+1=1+1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}.$$

将上式右边前两项相加 $1+1=2$，再加第三项 $2+2=2^2$，逐步加下去，即 $2^2+2^2=2\cdot 2^2=2^3$，$2^3+2^3=2\cdot 2^3=2^4$，$\cdots$，直至最后，得到

$$S+1=\cdots=2^{63}+2^{63}=2^{64}.$$

将皇帝“多赏”的一粒拿回去，即锡塔所要的麦粒数是

$$S=2^{64}-1=18,446,744,073,709,551,615.$$

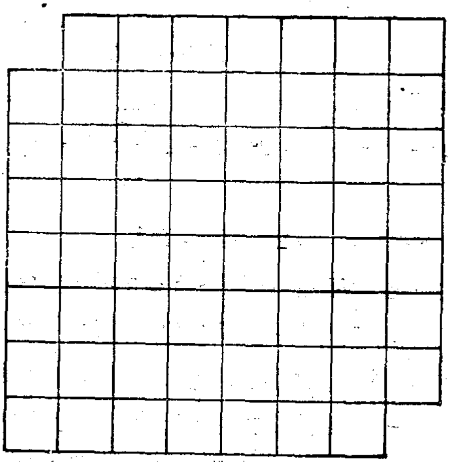
这个数后来被称为“国际象棋数”，它是个惊人的大数．有人计算过：如果造一个粮仓来放这些麦子，粮仓高 4 公尺，宽 10 公尺，那么粮仓的长度就等于地球到太阳的距离的两倍！

由此看来，皇帝所应允的给国际象棋发明者的奖赏，是世界上最高的"发明奖"，但也是永远无法兑现的发明奖！如果皇帝稍微懂一点数学的话，就不会留下这千古笑柄！

在这本小册子里，我们将要向读者介绍棋盘中所蕴藏着的许许多多有趣的问题，以及解决这些问题所用到的一些重要的数学方法与技巧．下面的三则问题都是涉及棋盘的，虽然问题都不难，但是，如不会用一点数学，即使是棋界大师对它们也可能是束手无策哩！

问题1是一个著名问题，曾被用作中国科技大学少年班的招生试题．

[问题1]　（剪残了的棋盘）剪去国际象棋棋盘的左上



(1)

(2)

图　5

角与右下角的两个小方格[图 5(1)]. 能否用 31 个 $2\times1$ 的矩形[图 5(2)]将这个剪残了的棋盘盖住?

中国象棋盘上也有许多有趣的问题.

[问题 2] 图 6 中, 甲方一只小卒已经过了河, 它可以向前移动一步, 即走到 $B$, 也可以横移一步, 即走到 $A$, 要使这个小卒沿最短的路线走到对方帅的位置(假定在前进的路上不受任何阻难), 问有多少种不同的走法?

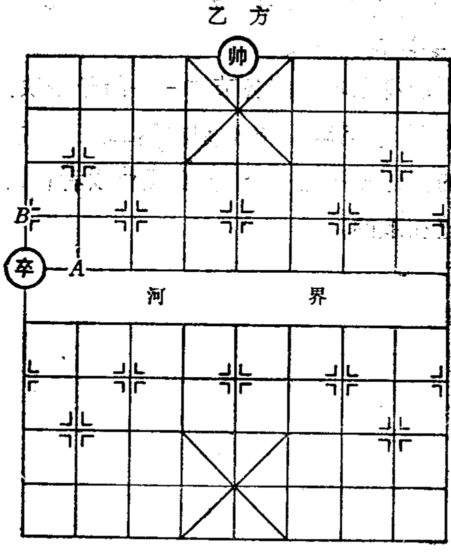



图 6

[问题 3] 无论是中国象棋还是国际象棋, 马的走法都是一直一斜, 所以棋谚曰:"马走日字相飞田". 从图 7 中的 $A$ 点出发, 一只马能否不重复、也不遗漏地跳遍半个棋

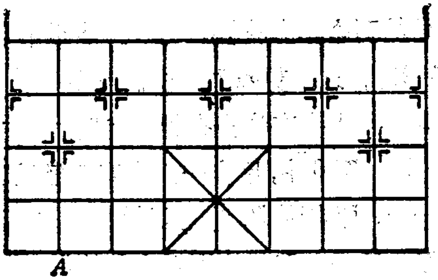



图 7

盘(即棋盘上的每一点都跳到并且只跳到一次)? 从哪些点出发, 可以实现这样的要求?

上述问题将在本书的各节中一一给予解决. 问题2即是第八节的例1, 问题1、3分别在第二、三节中. 建议读者对上面的问题先考虑一下(我们相信读者在阅读本书时, 随身带着笔和纸的).

# 二 覆　　盖

首先讨论上节末的问题1(剪残了的棋盘).

[例1]　图8中的棋盘能否用31个2×1的矩形恰好覆盖?

并非所有问题的答案都必须是肯定的. 这个问题的答案就是不能.

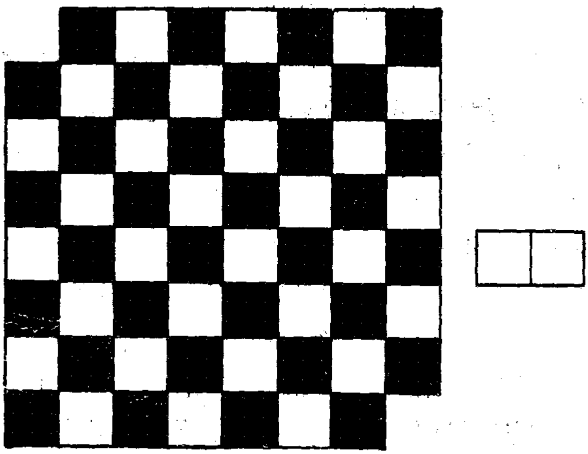


图 8

为了证明这一点，我们将棋盘的方格涂上白色或黑色，使得每两个相邻的方格(即有公共边的两个方格)颜色不同．通常的国际象棋上正是这样涂色的，我们称之为“自然涂色”．

如果 31 个 $2\times1$ 的矩形恰好覆盖这剪残了的棋盘，由于每个 $2\times1$ 的矩形盖住 1 个白格与 1 个黑格，所以棋盘中白格与黑格的个数应当相等，都是 31 个．

但图 8 中的棋盘却有 30 个白格，32 个黑格，所以 31 个 $2\times1$ 的矩形不能覆盖这个棋盘．

从这个简单的问题，可以看出涂色这一方法的作用．

同样的道理可以证明从 $8\times8$ 的国际象棋盘上剪去两个同色的方格，剩下的棋盘一定不能用 31 个 $2\times1$ 的矩形覆盖．

如果剪去一个黑格一个白格呢？

[例 2]　在 $8\times8$ 的国际象棋盘上剪去一个黑格与一个白格后，能否用 31 个 $2\times1$ 的矩形将它覆盖？

答案是肯定的，一定能用 31 个 $2\times1$ 的矩形将这棋盘覆盖．事实上，如图 9，用一些粗线将棋盘隔成宽为 1 的长条路线．从任一个方格出发，沿着这路线前进，可以不重复也不遗漏地走遍棋盘并回到出发点．现在从剪去的方格 $A$ 出发，沿着这条路线，每经过两个方格就放上一个 $2\times1$ 的矩形．由于剪去的两个方格 $A$、$B$ 异色，所以 $A$、$B$ 之间(沿着这条路线)有偶数个方格，恰好能放整数个 $2\times1$ 的矩形．然后继续沿着这条路线从 $B$ 走到 $A$，每经过两个方

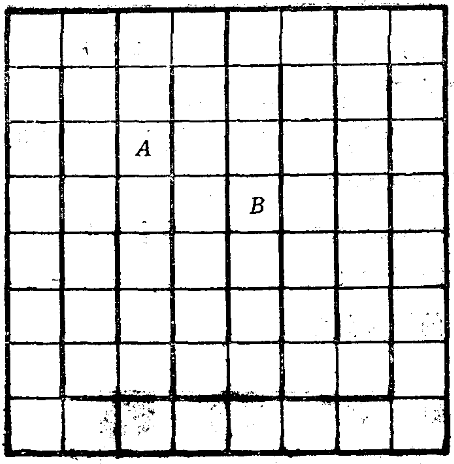
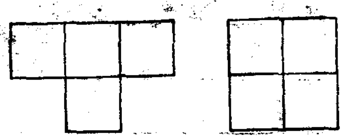



图 9

格放上一个 $2\times1$ 的矩形. 这样就可以用(31 个)$2\times1$ 的矩形覆盖整个棋盘($A$、$B$ 两方格已被剪去).

[例 3] 用 15 个 T 字形及 1 个田字形(图 10), 能否覆盖 $8\times8$ 的棋盘?



T 字形　　田字形

图 10

答案是不能. 为了证明这点, 我们利用棋盘的自然涂色.

如果 15 个 T 字形与 1 个田字形能够覆盖这个棋盘, 那么每个 T 字形覆盖奇数个(1 个或 3 个)白格, 从而 15 个 T 字形覆盖奇数个白格(因为 15 个奇数的和是奇数). 1 个田字形覆盖 2 个白格. 因而, 15 个 T 字形与 1

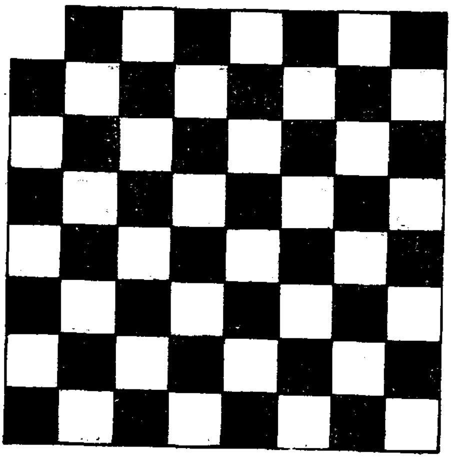
个田字形所覆盖的白格数必定是奇数.

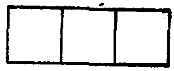
但棋盘中,白格的个数为偶数(32个),因此15个T字形与1个田字形不能覆盖整个棋盘.

在这个问题中,涂色与奇偶性都发挥了作用.

下面是更巧妙的覆盖问题.

[例4] 8×8的国际象棋盘剪去左上角的一个方格后,能否用21个3×1的矩形覆盖?剪去哪一个方格才能用21个3×1的矩形覆盖?





3×1矩形

图 11

剪去左上角的方格后,棋盘不能用21个3×1的矩形覆盖.

为了证明这一点,我们将棋盘涂上三种颜色(这一次,采用自然涂色不能奏效),涂法如图12,其中数字1、2、3分