大学生数学竞赛试题 研究生入学数学考试难题 解析选编

李心灿　季文铎　余仁胜
邵鸿飞　张后扬　编

高等教育出版社

大学生数学竞赛试题
研究生入学数学考试难题
解析选编

李心灿　季文铎　余仁胜
邵鸿飞　张后扬
编

高等教育出版社

(京)112 号

图书在版编目(CIP)数据

大学生数学竞赛试题　研究生入学数学考试难题解析选编/李心灿等编．—北京：高等教育出版社，1997.7

ISBN 7-04-006278-X

Ⅰ.大…　Ⅱ.李…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-试题：竞赛题-解题②高等数学-研究生-入学考试-试题-解题

Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 12365 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码：100009　传真：64014048　电话：64054588

高等教育出版社发行

北京印刷三厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 14.25　字数 370 000

1997 年 7 月第 1 版　　1997 年 7 月第 1 次印刷

印数 0 001—8 085

定价 15.00 元

内容提要

本书共有两部分内容.

第一部分,汇集了北京市大学生(非数学专业)第一届至第八届数学竞赛的全部试题及分析和解答;选编了我国自改革开放以来,部分省市及部分高校的大学生数学竞赛试题,并对其中大部分给出了分析及参考解答;选编了国外一些大学生数学竞赛的试题及分析和解答.

第二部分,选编了10多年来,全国工学、经济学硕士研究生入学统考的数学试题中,相对较难或综合性较强的部分试题及分析和解答.

本书既可以作为大学生、数学爱好者提高数学素质(特别是解题能力),参加数学竞赛或报考研究生之前的有益读物;也是一本颇具特色的数学教学参考书.

责任编辑　丁鹤龄
封面设计　张　楠
责任绘图　孟庆祥
版式设计　周顺银
责任校对　许月萍
责任印制　马朝阳

序

姜伯驹　叶其孝

数学科学(简称数学)是研究现实世界中空间形式和数量关系的一门科学,它也是关于模式和秩序的科学.数学为人们提供了科学的语言.数学的思考方式具有根本的重要性,因为数学为组织和构造知识提供方法,以致当用于技术时就能使科学家和工程师产生系统的、能复制并且是可以传播的知识,从而有可能转化成生产力,创造巨大的经济和社会效益.因此,数学始终是科学、技术、工程、经济、管理和决策科学的基础.半个世纪以来,科学技术特别是计算机及相应软件技术的发展,促进了数学科学的突飞猛进、充满生机的发展.50 年前,数学虽然也直接为工程提供一些工具,但基本方式是间接的:先促进其它科学的发展,再由这些科学提供工程原理和设计基础.现在不同了,数学和工程、技术、经济、管理之间,在更广阔的范围内和更深刻的程度上,直接地相互作用着.数学科学进一步渗透到一切领域、特别是,数学建模和与之相伴的计算正在成为工程设计中的关键工具,这些领域中的科技进展与数学的结合和融合,产生了大量的专业应用软件,形成了一种强有力的数学技术,在这样的意义下确实可以说:“高技术本质上是一种数学技术”.因而,数学教育不仅是培养现代科技人才的最重要的素质教育之一,也是人才培养竞争的关键之一.高等数学、线性代数、概率统计一直是高等学校最重要的基础课.在学好这些课程的基础上怎样进一步提高学生,特别是提高优秀学生的数学技能和素质,是一项十分迫切、亟待解决的任务.开展数学竞赛就是一种行之有效的方法.

自 1988 年以来,北京数学会大学委员会和北京高校数学研究

会连续组织了八届大学生(非数学专业)数学竞赛并取得极大的成绩,就是上述说法的一个明证.竞赛的组织者和广大教师不仅积累了丰富的经验,为培养优秀人才作出了重要贡献,也为大学数学教育改革作出了贡献.总结并传播他们的经验是一项很有意义的工作.本书的出版不仅总结了北京历届的赛题和参考解答,也包括了一些外省市的赛题和参考解答,还介绍了国外的大学生数学竞赛的有关赛题并给出了参考解答.特别是本书还从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统考 11 年来共使用过的 1181 道试题中,挑选了 100 道较难或综合性较强的试题,并作了解析.因此,本书内容相当丰富,是一本很有特色的教学参考书.

我们相信本书一定会受到广大教师和学生的欢迎.

1997 年春　于北京

编者的话

本书共有两部分内容.

第一部分为大学生数学竞赛试题解析选编.这一部分中分三篇:第一篇,汇集了北京市大学生(非数学专业)数学竞赛第1届至第8届的全部试题,并给出了解题思路及较详细的参考解答;第二篇,选编了我国自改革开放以来,部分省市及部分高校的大学生数学竞赛的试题,对其中绝大部分给出了较详细的参考解答、答案或提示,有的还给出了解题思路.只留下上海市、同济大学、重庆大学、西安交通大学的四份试题未给出解答,我们特意留给读者去试作;第三篇,选编了国外一些大学生数学竞赛的试题,并给出了解题思路及较详细的参考解答.

第二部分为硕士研究生入学数学考试难题解析选编.这部分内容是从1987年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统考11年来共使用过的1181道试题中,挑选出的100道较难或综合性较强的试题,并给出了解题思路及较详细的参考解答.对其中一些试题还指出了考生出现的一些典型错误,并对1991年至1996年的试题给出了题目的难度和区分度.我们把这些试题称为难题,是因为这些试题的全国抽样统计得分率均低于0.5,表示全体考生在这些试题上的平均得分不到这些试题题目分值的一半;但它们所涉及的考试内容均未超出《数学考试大纲》的要求,同时又能较好地体现研究生入学数学考试试题的综合性,具有一定的深度和广度.

我们编写此书,是希望为我国的大学生和数学爱好者,提供一本提高数学素质(特别是解题能力)的有益读物,同时它也是一本高校数学教育的教学参考书.

我们在编写过程中，得到了许多高校数学教师的热忱关心和支持. 特别是北京理工大学杨德保老师、清华大学胡金德老师、北京航空航天大学徐兵老师、北方交通大学龚曼奇老师、北京化工大学黄金坤老师、北京邮电大学杨源淑老师和孙洪祥老师、北京工业大学王中良老师、北京建筑工程学院王崇寿老师和马龙友老师、北京轻工业学院章栋恩老师、北方工业大学金元怀老师、北京信息工程学院吴昌悫老师、解放军防化兵学院孙建建老师、中央民族大学罗小伟老师、浙江大学蔡燧林老师、哈尔滨工业大学富景隆老师、西安交通大学龚冬保老师、上海交通大学景继良老师、同济大学郭镜明老师、天津大学边馥萍老师、汕头大学钱昌本老师、重庆大学赵中时老师等热情地寄来了他们学校或他们所在省市数学竞赛的试题和有关资料；北京数学会理事长姜伯驹院士、副理事长叶其孝老师在百忙中为本书作序；高等教育出版社丁鹤龄、黄小齐、马晓耕等同志为本书的编辑、出版付出了辛勤的劳动. 在此，我们一并致以诚挚的谢意.

由于我们的水平所限，在编写中不当或错误之处，恳请读者批评指正.

1997 年春于北京

目　录

第一部分

大学生数学竞赛试题解析

第一篇 北京市大学生(非数学专业)第一届至第八届数学竞赛试题解析

第一届北京市大学生(非理科)数学竞赛试题及解析

(1988年9月18日上午9:00~11:30)

一、求由曲面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的体积 V 和表面积 S.

[**分析**] 先确定此两曲面围成的空间几何体形状,然后可考虑该几何体的边界曲面在 xOy 平面上的投影域,分别化为二重积分计算.

解: $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=2-\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases} \rightarrow z=2-\sqrt{z} \rightarrow z^2-5z+4=0.$

解得 $z_1=1, z_2=4$(舍去),所以投影区域为 $D: x^2+y^2 \leqslant 1$.

$$V = \iint_D [2-\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 (2-r-r^2) r \mathrm{d}r$$

$$=\frac{5}{6}\pi.$$

因为 $S=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

所以 $S=\iint\limits_D\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$+\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D\left[\sqrt{1+4(x^2+y^2)}+\sqrt{2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\sqrt{1+4r^2}+\sqrt{2})r\mathrm{d}r$$

$$=\left[\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)+\sqrt{2}\right]\pi.$$

二、**解微分方程** $y(y+1)\mathrm{d}x+[x(y+1)+x^2y^2]\mathrm{d}y=0$.

[**分析**] 此非全微分方程,适当分项组合,选择合适的积分因子再凑微分可得通解.

解: 方程变为 $y(y+1)\mathrm{d}x+x(y+1)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}y=0$,两边除以 $(y+1)x^2y^2\rightarrow\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2y^2}+\frac{\mathrm{d}y}{y+1}=0$

$$\rightarrow\mathrm{d}\left(-\frac{1}{xy}\right)+\mathrm{d}\ln|y+1|=0,$$

解出 $\quad -\frac{1}{xy}+\ln|y+1|=C_1$,

或 $\quad \ln|y+1|=C_1+\frac{1}{xy}$ 即 $|y+1|=\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{\frac{1}{xy}}$.

可得微分方程通解: $y+1=C\mathrm{e}^{\frac{1}{xy}}$ (任意常数 $C=\mathrm{e}^{C_1}>0$).

三、**设** $x_1=2, x_2=2+\frac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n},\cdots$ **求证**: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ **存在,并求其值**.

[**分析**] 因为数列 x_n 不具单调性,所以 x_n 极限的存在性可考虑用定义证,同时以先求值后证 x_n 极限的存在性为简便.

解：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$（存在）.

对于 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$，两边令 $n\to\infty$，取极限.

$\to\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=2+\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}$，即有 $A=2+\dfrac{1}{A}\to A^2-2A-1=0$.

解得 $A=1\pm\sqrt{2}$，因为 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}>2$，所以取 $A=1+\sqrt{2}$.

以下证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

对任意 $\varepsilon>0$，

$$
\begin{aligned}
|x_n-A| &= \left|\left(2+\frac{1}{x_{n-1}}\right)-\left(2+\frac{1}{A}\right)\right| = \left|\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{A}\right| \\
&= \frac{|A-x_{n-1}|}{x_{n-1}A} = \frac{|x_{n-1}-A|}{x_{n-1}A} < \frac{|x_{n-1}-A|}{4} \\
&\qquad \left(\because x_{n-1}=2+\frac{1}{x_{n-2}}>2,\ \therefore A=2+\frac{1}{A}>2\right) \\
&< \frac{\frac{|x_{n-2}-A|}{4}}{4} = \frac{|x_{n-2}-A|}{4^2} < \frac{\frac{|x_{n-3}-A|}{4}}{4^2} \\
&= \frac{|x_{n-3}-A|}{4^3} < \cdots < \frac{|x_1-A|}{4^{n-1}} \\
&= \frac{|2-(1+\sqrt{2})|}{4^{n-1}} = \frac{|1-\sqrt{2}|}{4^{n-1}} = \frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

（当 n 足够大时）.

由极限定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-A)=0$.

即有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=1+\sqrt{2}$ （存在）.

四、求 $\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right\}^{\frac{1}{x}}$，$(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$.

［分析］ 属“1^∞”型未定式的极限问题，可取自然对数，然后用洛必达法则直接计算．或利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 来计算.

解法一：设 $y=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right\}^{\frac{1}{x}}$

$$\to \ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}}{x}$$

$$\xlongequal[\text{洛}]{\left(\frac{“0”}{0}\right)}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\cdot\dfrac{1}{n}(a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n)}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^x\ln a_k\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}(a_k^x\ln a_k)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln a_k$$

$$=\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)$$

$$=\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)$$

$$=\ln(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

故原极限式 $=y=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$.

解法二：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^x-1)}{n}\right]^{\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^x-1)}}\right\}^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^x-1)}{x}\cdot\frac{1}{n}}$$

$$=\left\{\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^x-1)}{n}\right]^{\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^x-1)}}\right\}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^x-1)}{x}\cdot\frac{1}{n}}$$