解 / 活 / 题 / 解 / 活 / 题 / 解 / 活 / 题

中華書局 ZHBC

JIEHUOTI

解活题

中考·数学

主　编/马宝昌

中華書局

ZHONGHUASHUJU

zK

解 / 活 / 题 / 解 / 活 / 题 / 解 / 活 / 题

JIE[illegible]TI

解活题

中考·数学

中華書局

《解活题》中考·数学

□选题策划:李　静
□本册主编:马宝昌
□责任编辑:李　静
□封面设计:REC 电脑制作中心
□版式设计:REC 电脑制作中心

□出　　版:中华书局(北京市丰台区太平桥西里 38 号　100073)
□发　　行:中华书局(北京市丰台区太平桥西里 38 号　100073)
□咨询热线:010 - 63431746;63473673
□订货热线:010 - 63409294(北方);63458244(东方);
63407445(南方);63405727(西方)
□传　　真:010 - 63458239
□E - mail :zhsj_xd @ 163 .com
□印　　刷:北京冠中印刷厂
□开　　本:787×960　16 开　□印　张:15 1/4
□字　　数:269 千字
□版　　次:2003 年 6 月第 1 版
□印　　次:2003 年 6 月北京第 1 次印刷
□印　　数:1 - 12000 册
□书　　号:ISBN 7 - 101 - 02511 - 0/G · 286
□定　　价:17.00 元

"做题的质量比做题的数量更重要"

——编者

聚焦《解活题》

基础教育课程改革的逐步深化,对学生的学习提出了更高的要求,全国各地教材版本越来越多,中考、高考的模式也不尽相同,但课程标准只有一个。为了更好地服务于莘莘学子,我们依据新的课程标准,认真研究中考、高考的命题趋势,以人教版教材为主,兼顾沪版、苏版等教材,组织全国重点中学一线任课的特级、高级教师,精心编写了《解活题》丛书。

■本书如何体现新的《课程标准》和《考试说明》的内容?

新课程的核心理念是"一切为了每一位学生的发展"。学生的学习过程不仅是一个接受知识的过程,而且也是一个发现问题、分析问题、解决问题的过程。《解活题》丛书很好地体现了学生学习的需要,在体例安排、题型设计上鼓励学生提高创新思维能力和灵活应用能力。重视方法的点拨,不受定势思维和已有条条框框的限制,独辟蹊径,从新的角度提升学生的学习兴趣,在面对千变万化的试题题面时,不被表象所迷惑,能抓住问题的核心,解题的关键。本书从中考和高考的角度上把握全局,从考点的角度上仔细审视,从知识的内涵上进行深刻剖析,关注热点内容,预测中考、高考的命题趋势和导向。

■什么是活题? 为什么要选择活题?

考试制度的改革是基础教育课程改革的重要组成部分,要建立全面发展的评体系,要在评价中发现和发展学生的多方面潜能,近几年的中考、高考试卷突出体现了这方面的要求。试题与科技、生产、生活实际紧密联系,突出考查运用知

识解决实际问题的能力，强调试题的开放性和一题多解，重视不同学科知识的交叉、渗透，重视科学精神与人文精神的结合，加强对学生实验能力的考查。《解活题》丛书针对上述命题导向，以敏锐的眼光进行选题，用科学的方法进行训练，对考点进行了详尽的说明、讲解，使学生能够很好地归纳、概括、领悟和运用知识要点，切实掌握解题的思想方法，达到举一反三的目的。从而有效地提高学生解决实际问题的能力和创新能力。

■本书在体例上有什么特点?

书中每节(单元)设有以下五个板块：

关键点击 直接指出重点、难点、考点，明确学习目标。

活题精解 通过对例题的分析解答解说，重点、难点、考点。

挑战活题 通过对习题的演练掌握重点、难点、考点。

话说题外 总结规律和方法，拓展知识视野。

参考答案 对训练题目全析全解。

本书在例题的讲解上，不仅展示解题过程，而且提供了切入点的选择方法和解题的思考过程。在习题的选择上关注学科知识与科学、技术和社会发展的关系，密切联系材料、能源、环境等当代社会问题，体现了科学精神与人文精神的紧密结合。本书注重对规律和方法的总结，因为任何一门科学都不仅包括知识体系，也包括过程和方法体系，过程和方法比知识本身更重要，这已经成为当代理科教育的共识。所以我们说：做题的质量比做题的数量更重要。

学生的全面发展始终是我们所追求的理想，为了实现这一理想，广大教育工作者和全社会都在不懈地探索着。相信，我们正一步一步地朝着这一理想迈近。

中华书局学生读物中心

2003 年 6 月

CONTENTS

目　录

第一章 方 程

高频考点

1. 解一元一次方程、二元一次方程组、一元二次方程、分式方程、二元二次方程组．

2. 用一元二次方程根的判别式、根与系数的关系解决有关问题．

3. 发现、提出日常生活或生产中可以利用方程或方程组来解决的实际问题，通过列方程或方程组解决这些问题．现在的考试题中解方程或方程组的问题多数通过应用问题来考查．

名题精解

例1 (1)据2001年中国环境状况公报，我国由水蚀和风蚀造或的水土流失面积达356万平方公里，其中风蚀造成的水土流失面积比水蚀造成的水土流失面积多26万平方公里．问水蚀与风蚀造成的水土流失面积各多少万平方公里？

(2)某省重视治理水土流失问题，2001年治理了水土面积400平方公里，该省逐年加大治理力度，计划今明两年每年治理水土流失面积都比前一年增长一个相同的百分数，到2003年底，使这三年治理的水土流失面积达到1324平方公里．求该省今明两年治理水土流失面积每年增长的百分数．

〔**精析**〕 本题(1)中，若设水蚀造成水土流失面积为 x 万平方公里，那么风蚀土地为 $(x+26)$ 万平方公里，则很容易列出一元一次方程．

本题(2)中，若设每年治理水土流失面积增加 x，由于2001年治理了400平方公里，则2002年治理了 $400(1+x)$ 平方公里，2003年治理了 $400(1+x)^2$ 平方公里，再由这三年共治理1324平方公里，可以列出一个一元二次方程．

〔**精解**〕 (1)设水蚀造成的水土流失面积为 x 万平方公里，则风蚀造成的水土流失面积为 $(x+26)$ 万平方公里．

依题意，得 $x+(x+26)=356$，解这个方程，得 $x=165$，$\therefore x+26=191$．

答：水蚀与风蚀造成的水土流失面积分别为165万平方公里和191万平方公里．

(2)设该省今明两年治理水土流失面积每年增长的百分数为 x，

依题意，得 $400+400(1+x)+400(1+x)^2=1324$，

整理，得 $100x^2+300x-31=0$，

解得 $x_1=0.1, x_2=-3.1$，$x_2=-3.1$ 不合题意，所以只能取 $x_1=0.1=10\%$．

答：平均每年增长的百分数为10%．

〔**解后语**〕 环保问题是近年来人们普遍关注的问题．

例2 某音乐厅五月初决定在暑假期间举办学生专场音乐会，入场券分为团体票和零售票，其中团体票占总票数的 $\frac{2}{3}$．若提前购票，则给予不同程度的优惠．在五月份内，团体票每张12

元,共售出团体票数的$\frac{3}{5}$;零售票每张16元,共售出零售票数的一半．如果在六月份内,团体票按每张16元出售,并计划在六月份内售出全部余票,那么零售票应按每张多少元定价才能使这两个月的票款收入持平?

〔精析〕 本题是现实生活中常见的应用问题,由于在整个问题的讨论过程中都要考虑"一共有多少张票"这样一个问题,因此就可以设总票数为 a 张,则可知团体票共有$\frac{2}{3}a$张,零售票有$\frac{1}{3}a$张,而五月份售出团体票$\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}a$张,零售票$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}a$张,六月份的团体票有$\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}a$张,零售票有$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}a$张．这样就可根据题意列出方程了．

〔精解〕 设总票数为 a 张,六月份零售票价按每张 x 元定价．则

五月份团体票票款收入为 $12\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}a=\frac{24}{5}a$(元),

五月份零售票票款收入为 $16\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}a=\frac{8}{3}a$(元),

六月份团体票票款收入为 $16\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}a=\frac{64}{15}a$(元),

六月份零售票票款收入为 $\frac{1}{6}ax$(元).

根据题意,可得方程$\frac{24}{5}a+\frac{8}{3}a=\frac{64}{15}a+\frac{1}{6}ax$.

解得 $x=19.2$(元).

答:六月份零售票应按每张19.2元定价．

〔解后语〕 本题中设了总票数 a 张这个未知数,使得在列代数式及方程时非常方便,而实际上 a 并没有参予运算,在解方程时,两边除以 a 则消去了 $a(a\neq0)$. 这类问题也可以设总票数为1,解决问题的方法相同,思考时要求对数的感知更强些．

例3 某初一学生在做作业时,不慎将墨水瓶打翻,使得一道作业题只看到如下字样:"甲、乙两地相距40千米,摩托车的速度为45千米/时,运货汽车的速度为35千米/时,________?"(横线部分的一些文字被墨水覆盖而无法看清)请将这道题补充完整,并列方程解答．

〔精析〕 本题是一道缺少问题的开放性试题,同学们可以根据已知条件编拟出许多答案,如:两车从甲、乙两地同时出发,相向而行,多少时间相遇? 或者:两车从甲、乙两地不同时(给出时间差)出发相向而行,多少时间相遇? 两人从甲、乙两地同时出发,同向而行,货车在前,摩托车几小时可追上货车? 等等．如果深入研究,可以编拟出许多有趣的结论．下面介绍一种最简单的做法,其他的做法请同学们自行完成．

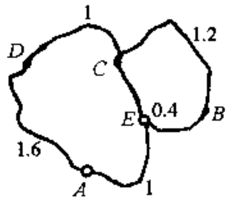
〔精解〕 补充的问题为:若两车分别从两地同时开出,相向而行,经过几小时相遇?

设经过 x 小时两车相遇,则 $45x+35x=40$, $\therefore x=\frac{1}{2}$.

答:经过半小时两车相遇．

〔解后语〕 平时练习时,同学们可多设不同的情况补充结论,这样有助于深刻理解问题的含义.在考试时遇见这类问题,可选择一个简单的、明晰的结论作为问题的解.

例4 如图,这是某风景区的旅游路线示意图,其中 B、C、D 为风景点,E 为两条路的交叉点,图中的数据为相应两点间的路程(单位:千米),一学生从 A 点出发,以2千米/时的速度步行游览,每个景点逗留时间均为0.5小时.



(1)当他沿着路线 $A-D-C-E-A$ 游览回到 A 处时,共用了3小时,求 CE 的长.

(2)若此学生打算从 A 处出发后,步行速度与在景点逗留时间保持不变,且在最短时间内看完三个景点返回到 A 处,请你为他设计一条步行路线,并说明这样设计的理由(不考虑其他因素).

〔精解〕 (1)设 CE 的长为 x 千米,根据题意,得

$1.6+1+x+1=2\times(3-2\times0.5)$,

解得 $x=0.4$.

答:CE 的长为0.4千米.

(2)若步行路线为 $A-D-C-B-E-A$(或 $A-E-B-C-D-A$),

则所用时间为:$\frac{1}{2}(1.6+1+1.2+0.4+1)+3\times0.5=4.1$(小时).

若步行路线为 $A-D-C-E-B-E-A$(或 $A-E-B-E-C-D-A$),

则所用时间为:$\frac{1}{2}(1.6+1+0.4+0.4\times2+1)+3\times0.5=3.9$(小时).

因此,步行路程应为:$A-D-C-E-B-E-A$(或 $A-E-B-E-C-D-A$).

〔解后语〕 这是一类比较新颖的应用问题,与原来的应用问题不同,它需要设计旅游路线,从中找出最短行程,这里渗透了最优化的统筹思想.

例5 先根据要求编写应用题,再解答你所编写的应用题.

编写要求:

(1)编写一道行程问题的应用题,使得根据其题意列出的方程为:$\frac{120}{x}-\frac{120}{x+10}=1$;

(2)所编应用题完整,题意清楚,联系生活实际且其解符合实际.

〔精析〕 编写应用题这类题目在近年中考试题中常见到,在编写题目的过程中有助于同学们分析试题中的数量关系,更有助于学会分析问题的方法.

本题编写方法很多,下面仅举一例.

〔精解〕 所编题目为:

一汽车从甲地到相距120千米的乙地送货,从乙地返回时,每小时速度增加了10千米,结果比去时少用1小时,汽车从甲地往乙地去时速度是多少?

解:设汽车从甲地往乙地去时速度为 x 千米/时,根据题意,得

$\frac{120}{x}-\frac{120}{x+10}=1$.

解得 $x_1=30, x_2=-40$.

经检验 $x_1=30, x_2=-40$ 都是原方程的解,但 $x=-40$ 不合题意,舍去.

答:汽车从甲地往乙地去时速度为 30 千米/时.

〔解后语〕 本题的编写要求中指出编写的是行程问题,因此在$\frac{s}{v}$或$\frac{s}{t}$中,120 应为两地的距离,x 与 $x+10$ 编写为速度比编写为时间更好些.

如果本题不要求编写行程问题,那么还有更广阔的思维空间,如 120 为购物金额,x 与 $x+10$ 为购物件数,1 为单价之差,或 x 与 $x+10$ 为两种物品的单价,1 为件数之差等.因此,自编应用问题有助于活跃思维.

例 6 某市向民族地区的某县赠送一批计算机.首批 270 台将于近期启运.经与某物流公司联系,得知用 A 型汽车若干辆刚好装完;用 B 型汽车不仅可少用 1 辆,而且有一辆车差 30 台计算机才装满.

(1)已知 B 型汽车比 A 型汽车每辆车可多装 15 台,求 A、B 两种型号的汽车各能装计算机多少台?

(2)已知 A 型汽车的运费是每辆 350 元,B 型汽车的运费是每辆 400 元.若运送这批计算机同时用这两种型号的汽车,其中 B 型汽车比 A 型汽车多用 1 辆,所用运费比单独用任何一种型号的汽车都要节省,按这种方案需 A、B 两种型号的汽车各多少辆?运费多少元?

〔精析〕 (1)分析题意可知,若设 A 型汽车每辆可装 x 台计算机,则 B 型汽车每辆可装$(x+15)$台计算机.可用$\frac{270}{x}$辆 A 型汽车,而"用 B 型汽车不仅可少用 1 辆,而且有一辆车差 30 台计算机装满"可以理解为:如果有$(270+30)$台计算机装在 B 型汽车中,那么就比所用的$\frac{270}{x}$辆 A 型汽车少一辆,因此可以列出方程.

(2)由(1)可知若都用 A 型汽车需要多少辆,并可知所需运费,同样可求出用 B 型车所需运费,那么同时用这两种车的运费要少于单独使用 A 型或 B 型车的运费,这样就可以列出一个不等式求出安排运输的最佳方案.

〔精解〕 (1)设 A 型汽车每辆可装计算机 x 台,则 B 型汽车每辆可装计算机$(x+15)$台.依题意,得

$$\frac{270}{x}=\frac{270+30}{x+15}+1.$$

解这个方程,得 $x_1=45, x_2=-90$(舍去).

经检验,$x=45$ 是原方程和应用问题的解.

$\therefore x=45$(台),$x+15=60$(台).

答:A 型汽车每辆可装计算机 45 台,B 型汽车每辆可装计算机 60 台.

(2)由(1)知,若单独用 A 型汽车运送,需车 6 辆,运费为 2100 元;若单独用 B 型汽车运送,需车 5 辆,运费为 2000 元.

若按题设要求同时用 A、B 两种型号的汽车运送,设需用 A 型汽车 y 辆,则需 B 型汽车$(y$

+1)辆.

根据题意得不等式

$350y+400(y+1)<2000$.

解这个不等式,得 $y<\frac{32}{15}$. 因汽车辆数应为正整数,$\therefore y=1$ 或 2.

当 $y=1$ 时,$y+1=2$,则 $45\times1+60\times2=165$(台)<270(台),不合题意;

当 $y=2$ 时,$y+1=3$,则 $45\times2+60\times3=270$(台),符合题意,

此时运费为 $350\times2+400\times3=1900$(元).

答:按这种方案运送计算机需用 A 型汽车 2 辆,B 型汽车 3 辆,运费为 1900 元.

〔解后语〕 分析题意时要抓住实质,并把它转化为数学问题.如车题中"用 B 型汽车不仅可少用 1 辆,而且有一辆车差 30 台计算机装满"的含义是 $\frac{270+30}{x+15}+1=A$ 型车的数量,只要把这一点理解好,本题就容易解了.

例 7 商场销售某种商品,今年四月份销售了若干件,共获毛利润 3 万元.五月份商场在成本价格不变的情况下,把这种商品的每件销售价降低了 4 元,但销售量比四月份增加了 500 件,从而所获毛利润比四月份增加了 2 千元,问调价前,销售每件商品的毛利润是多少元?

〔精析〕 若设调价前销售这种商品每件的毛利润为 x 元,则四月份共售出 $\frac{30000}{x}$ 件,五月份毛利润为 $(x-4)$ 元,则五月份共售出 $\frac{30000+2000}{x-4}$ 件,由五月份的销售量比四月份增加 500 件可列出方程.

〔精解〕 设调价前销售每件这种商品的毛利润为 x 元.依题意,得

$\frac{30000+2000}{x-4}-\frac{30000}{x}=500$.

解这个方程,得 $x_1=20$,$x_2=-12$(舍去),

经检验,$x=20$ 是原方程和应用问题的解.$\therefore x=20$

答:调价前销售这种商品每件的毛利润是 20 元.

〔解后语〕 与销售利润有关的问题中应注意:

每件商品的毛利润 = 每件商品的销售价格 − 每件商品的成本价格.

例 8 近几年我省高速公路的建设有了较大的发展,有力地促进了我省的经济建设.正在修建中的某段高速公路要招标,现有甲、乙两个工程队,若甲、乙两队合作,24 天可以完成,需费用 120 万元;若甲单独做 20 天后,剩下的工程由乙做,还需 40 天才能完成,这样需费用 110 万元,问:(1)甲、乙两队单独完成此项工程,各需多少天? (2)甲、乙两队单独完成此项工程,各需要费用多少万元?

〔精析〕 根据"甲、乙两队合作,24 天可以完成","甲单独做 20 天后,剩下的工程乙做 40 天完成",可求出甲、乙单独完成各需要多少天,然后分别计算甲、乙需要多少费用.

〔精解〕 设甲、乙单独完成此项工程分别需 x 天、y 天,根据题意,得

$$\begin{cases}\dfrac{24}{x}+\dfrac{24}{y}=1,\\ \dfrac{20}{x}+\dfrac{40}{y}=1.\end{cases}$$

解这个方程组,得 $x=30, y=120$. 经检验,$x=30, y=120$ 是方程组的解.

(2)设单独完成此项工程,甲需费用 m 万元,乙需费用 n 万元,根据题意,得

$$\begin{cases}(\dfrac{m}{30}+\dfrac{m}{120})\times 24=120,\\ \dfrac{m}{30}\times 20+\dfrac{n}{120}\times 40=110.\end{cases}$$

解这个方程组,得 $m=135, n=60$.

答:甲单独完成此项工程需 30 天,乙单独完成此项工程需 120 天. 甲、乙单独完成此项工程分别需要费用 135 万元、60 万元.

〔解活语〕 解第(1)问时,“需费用 120 万元”,“需费用 110 万元”是没有用的,在解决问题时要从众多的数据、条件中选择出有用的,而不要受一些与此题无关的数据的干扰.

例 9　已知关于 x 的方程 $k^2x^2+(2k-1)x+1=0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2.

(1)求 k 的取值范围.

(2)是否存在实数 k,使方程的两实数根互为相反数?如果存在,求出 k 的值;如果不存在,请说明理由.

解　(1)根据题意,得 $\Delta=(2k-1)^2-4k>0$,

解得 $k<\dfrac{1}{4}$,

$\therefore$ 当 $k<\dfrac{1}{4}$ 时,方程有两个不相等的实数根.

(2)存在. 如果方程的两实数根 x_1、x_2 互为相反数,则

$$x_1+x_2=-\frac{2k-1}{k^2}=0. \qquad ①$$

解得 $k=\dfrac{1}{2}$. 经检验 $k=\dfrac{1}{2}$ 是方程①的解.

$\therefore$ 当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时,方程的两实数根 x_1 与 x_2 互为相反数.

读了上面的解答过程,请判断是否有错误、如果有,请指出错误之处,并直接写出正确答案.

〔精析〕 (1)由于题设中所说关于 x 的方程有两个不相等的实数根,因此这个方程是关于 x 的一元二次方程,要考虑二次项系数不为 0 的条件.

(2)在使用根与系数的关系时,还要注意由于方程有实数根,因此判别式必须大于或等于 0.

〔精解〕 (1)有错误,没有考虑二次项的系数 $k^2\neq 0$.

正确答案为 $k<\dfrac{1}{4}$ 且 $k\neq 0$.

(2)有错误,两根互为相反数应在 $\Delta>0$ 且 $k\neq 0$ 的条件下,

由$\begin{cases} k<\dfrac{1}{4}\text{且 } k\neq 0, \\ k=\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 得 k 不存在.

〔解后语〕 在解本题的过程中使我们更注意到一元二次方程中二次项系数不为0,方程有实根时判别式大于等于0这两个问题.

例10 已知方程组$\begin{cases} kx^2-x-y+\dfrac{1}{2}=0, \\ y=k(2x-1). \end{cases}$($x$、$y$ 为未知数,有两个不同的实数解$\begin{cases} x=x_1, \\ y=y_1, \end{cases}\begin{cases} x=x_2, \\ y=y_2. \end{cases}$)

(1)求实数 k 的取值范围;

(2)如果 $y_1y_2+\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=3$,求实数 k 的值.

〔精析〕 (1)对于本题中方程组的解的情况的讨论可以借助于一元二次方程的解的情况的讨论.只要把方程组中第二个方程代入第一个方程中,就可以得到一个关于 x 的一元二次方程,讨论这个方程的解的情况就可以得到方程组的解的情况.

(2)由于 $y_1=k(2x_1-1)$,$y_2=k(2x_2-1)$,可以把 y_1y_2 转化为 x_1x_2 与 x_1+x_2 的关系式去讨论.

〔精解〕 (1)$y=k(2x-1)$代入 $kx^2-x-y+\dfrac{1}{2}=0$,

整理,得 $kx^2-(2k+1)x+k+\dfrac{1}{2}=0.$

由 $\Delta=(2k+1)^2-4k(k+\dfrac{1}{2})>0$,

又 $k\neq 0$ 得实数 k 的取值范围是 $k>-\dfrac{1}{2}$ 且 $k\neq 0$.

(2)由(1)得 $x_1x_2=\dfrac{k+\dfrac{1}{2}}{k}$,$x_1+x_2=\dfrac{2k+1}{k}$,

$\therefore \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2.$

$$\begin{aligned} y_1y_2 &= k^2(2x_1-1)(2x_2-1) \\ &= k^2[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1]=k^2, \end{aligned}$$

则 $k^2+2=3$,$k^2=1$,$\therefore k=\pm 1$.

又$\because k>-\dfrac{1}{2}$且 $k\neq 0$,$\therefore k=1$.

〔解后语〕 关于二元二次方程组是否有解的问题要转化成一元二次方程是否有解的问题去讨论.

例11 已知:关于 x 的方程$(n-1)x^2+mx+1=0$①有两个相等的实数根.

(1)求证:关于 y 的方程$m^2y^2-2my-m^2-2n^2+3=0$②必有两个不相等的实数根;

(2)若方程①的一根的相反数恰好是方程②的一个根,求代数式 m^2n+12n 的值.

〔精析〕 (1)由已知条件"方程①有两个相等的实数根"可知 $\Delta_1=0$,从而得到一个关于 m、n 的等式.

要证方程②必有两个不相等的实数根,实质就是在上述条件下证明 $\Delta_2>0$.

(2)求出方程①的根,用 m 或 n 表示,把它的相反数代入方程②中再去寻求代数式 m^2n+12n 的值.

〔精解〕 (1)证明:$\because$方程①有两个相等的实数根,

$$\therefore\begin{cases}n-1\neq0,\\ \Delta_1=m^2-4(n-1)=0.\end{cases}$$

$\therefore m^2=4(n-1)$且 $m\neq0$,则 $n-1>0$.

由方程②,有

$$\begin{aligned}\Delta_2&=4m^2-4m^2(-m^2-2n^2+3)\\&=4m^2(1+m^2+2n^2-3)\\&=4m^2(1+4n-4+2n^2-3)\\&=4m^2(2n^2+4n-6)\\&=8m^2(n+3)(n-1).\end{aligned}$$

$\because n-1>0$ 且 $m\neq0$, $\therefore 8m^2>0$, $n+3>0$.

$\therefore 8m^2(n+3)(n-1)>0$, $\therefore \Delta_2>0$. $\therefore$方程②必有两个不相等的实数根.

(2)解法一:由 $m^2=4(n-1)$可得 $n-1=\frac{m^2}{4}$,将 $n-1=\frac{m^2}{4}$代入方程①得$\frac{m^2}{4}x^2+mx+1=0$.

解得 $x_1=x_2=-\frac{2}{m}$.

$\because$方程①的一根的相反数是方程②的一个根,

由根的定义,得 $m^2\cdot(\frac{2}{m})^2-2m\cdot\frac{2}{m}-m^2-2n^2+3=0$,

整理,得 $-m^2-2n^2+3=0$,即 $-2n^2-4(n-1)+3=0$. $\therefore 2n^2+4n=7$.

$\therefore m^2n+12n=n(m^2+12)=n(4n-4+12)=4n^2+8n=2(2n^2+4n)=14$.

解法二:由解法一得$\frac{2}{m}$是方程②的一个根,

设方程②的另一根为 y_0,由根与系数的关系可得 $y_0+\frac{2}{m}=\frac{2}{m}$,

$\therefore y_0=0$. $\therefore -m^2-2n^2+3=0$.

以下同解法一.

解法三:$\because m^2=4(n-1)$,

$\therefore$方程②为 $4(n-1)y^2-2my-4(n-1)-2n^2+3=0$ ③.

∵方程①的一根的相反数是方程②的一个根，设方程②的此根为 y_1，

∴ $-y_1$ 为方程①的根， ∴ $(n-1)y_1^2-my_1+1=0$.

由方程③变形，得 $4[(n-1)y_1^2-my_1+1]+2my_1-4n-2n^2+3=0$.

∴ $2my_1-4n-2n^2+3=0$.

又由解法一可知 $y_1=\dfrac{2}{m}$，∴ $2n^2+4n=7$.

以下同解法一.

〔解后语〕 注意本题中求出 $2n^2+4n=7$，不要再求出 n 的值，而要把 $2n^2+4n=7$ 整体代入代数式中求值，比较方便.

例 12 已知 x_1、x_2 是关于 x 的一元二次方程 $4x^2+4(m-1)x+m^2=0$ 的两个非零实数根. 问 x_1 与 x_2 能否同号？若能同号，请求出相应的 m 的取值范围；若不能同号，请说明理由.

〔精析〕 分析 x_1、x_2 能否同号时，首先要考虑 $\Delta\geqslant0$，在此条件下，再讨论 $x_1>0, x_2>0$ 或 $x_1<0, x_2<0$.

〔精解〕 关于 x 的一元二次方程 $4x^2+4(m-1)x+m^2=0$ 有两个非零实数根，则有

$\Delta=[4(m-1)]^2-4\times4m^2=-32m+16\geqslant0$. ∴ $m\leqslant\dfrac{1}{2}$.

又 x_1, x_2 是方程 $4x^2+4(m-1)x+m^2=0$ 的两个实数根，

∴ $x_1+x_2=-(m-1), x_1x_2=\dfrac{1}{4}m^2$.

假设 x_1、x_2 同号，则有两种可能：

①若 $x_1>0, x_2>0$，则有 $\begin{cases}x_1+x_2>0,\\x_1x_2>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-(m-1)>0,\\\dfrac{1}{4}m^2>0.\end{cases}$

∴ $m<1$ 且 $m\neq0$.

此时 m 的取值范围是 $m\leqslant\dfrac{1}{2}$ 且 $m\neq0$.

②若 $x_1<0, x_2<0$，则有 $\begin{cases}x_1+x_2<0,\\x_1x_2>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-(m-1)<0,\\\dfrac{1}{4}m^2>0.\end{cases}$

∴ $m>1$. 而 $m\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时方程才有实数根.

∴此种情况不可能.

综上所述，当 m 的取值范围 $m\leqslant\dfrac{1}{2}$ 且 $m\neq0$ 时，方程的两实根同号.

〔解后语〕 x_1、x_2 同号包括两层意义：同为正号、同为负号，因此解此类问题必须分两种情况讨论，在数学中分类讨论的思想很重要.

例 13 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+2-m=0$ ①.

(1)若方程有两个不相等的实数根，求实数 m 的取值范围；

(2)请你利用(1)的结论，任取 m 的一个数值代入方程①，并用配方法求出此方程的两个实数根．

〔精解〕 (1)$\because$方程有两个不相等的实数根，

$\therefore \Delta = 4 - 4(2 - m) = 4m - 4 > 0$，　$\therefore m > 1$．

(2)例如，取 $m = 2$，则方程①即为 $x^2 + 2x = 0$，配方，得 $(x+1)^2 = 1$，　$\therefore x + 1 = \pm 1$，

$\therefore x_1 = -2, x_2 = 0$．

〔解后语〕 像本题这样写出一个满足条件的方程，一般应在 m 的取值范围内，即在 $m > 1$ 的范围内选取一个简单的数值代入求解．另外，配方法是一种重要的解题方法，应注意配方的过程．

挑战活题

1. A、B 两地间的路程为 360km，甲车从 A 地出发开往 B 地，每小时行驶 72km；甲车出发 25 分钟后，乙车从 B 地出发开往 A 地，每小时行驶 48km，两车相遇后，各自仍按原速度、原方向继续行驶，那么相遇以后两车相距 100km 时，甲车从出发开始共行驶了多少小时？
2. 甲、乙两列火车每列各长 180 米，如果两列车相对行驶，从车头相遇到车尾离开共需 12 秒钟；如果两列车同向行驶，那么从甲的车头遇到乙的车尾，直到甲的车尾超过乙的车头共需 60 秒钟．假定列车的速度不变，试求甲、乙两列车的速度．
3. 某河上游的 A 地，为改善流域环境，把一部分牧场改为林场，改变后，林场与牧场共有 162 公顷，牧场面积是林场面积的 20%，那么退牧还林后林场的面积为多少公顷？
4. 某商店为促销 G 牌空调机，规定 2000 年元旦购买该机可分两期付款，在购买时先付一笔款，余下部分及它的利息(年利率为 5.6%)，在 2001 年元旦付清，该空调机售价每台 8224 元，若两次付款数相同，问每次应付款多少元？
5. 甲步行上午 6 时从 A 地出发于下午 5 时到达 B 地，乙骑自行车上午 10 时从 A 地出发于下午 3 时到达 B 地，问乙在什么时间追上甲的？
6. 小明去年 2 月在小卖店买 3 本练习本和 5 包食盐正好用去 5 元钱．今年 3 月，他又带 5 元钱去该店买同样的练习本和食盐，因为练习本每本比去年 2 月涨价 1 角，食盐每包涨价 5 分，小明只好买 3 本练习本和 4 包食盐，结果找回 2 角钱．试问去年 2 月每本练习本多少元？每包食盐多少元？
7. 李明以两种形式分别储蓄了 2000 元和 1000 元，一年后全部取出，扣除利息所得税后可得利息 43.92 元，已知这两种储蓄年利率的和为 3.24%，问这两种储蓄的年利率各是百分之几？(注：公民应交利息所得税 = 利息全额 × 20%．)
8. 某公司向银行贷款 40 万元，用来生产某种产品，已知该贷款的年利率为 15%(不计复利，即还贷前每年利息不重复计息)，每个新产品的成本是 2.3 元，售价是 4 元，应纳税款为销售额的 10%．如果每年生产该种产品 20 万个，并把所得利润(利润 = 销售额 − 成本 − 应纳税款)用来归还贷款，问需几年后才能一次性还清？
9. “华联”商厦进货员在苏州发现一种应季衬衫，预料能畅销市场，就用 80000 元购进所有

衬衫，还急需2倍这种衬衫，经人介绍又在上海用176000元购进所需衬衫，只是单价比苏州贵4元．商厦按每件58元销售，销路很好，最后剩下的150件按八折销售，很快售完．问商厦这笔生意盈利多少元？

10. 某企业2001年初投资100万元生产适销对路的产品，2001年底将获得利润与年初的投资的和作为2002年初的投资，到2002年底，两年共获利润56万元．已知2002年的年获利率比2001年的年获利率多10个百分点（即：2002年的年获利率是2001年的年获利率与10%的和），求2001年和2002年的年获利率各是多少？

11. 某乡良种场有120亩地，由于引进和使用先进耕作农具，每天比原计划多耕地10亩，结果提前2天完成任务，问原计划多少天完成任务？实际每天耕地多少？

12. 某人要加工252个零件，计划若干天完成，加工两天后，由于改进了技术，每天多加工9个零件，因此提前一天完成任务，求原计划完成任务的天数。

13. 某校初三学生参加"献爱心，为希望小学捐款"活动，已知甲班捐款200元，乙班30名同学也捐200元，若两个班人均捐款比甲班人均捐款多1元，问甲班有多少名同学参加了这次捐款活动？（已知甲班人数不超过60人．）

14. 某车间加工150个零件，加工完40个后，改进了操作方法，每天多加工15个，一共用了3天完成了任务，求改进操作方法后每天加工的零件数．

15. 某农场计划用若干时间挖一条11千米长的水渠，挖了1小时30分钟后，又增加了力量，比原计划每小时多挖了1千米，结果不但比原计划少用了1小时，而且多挖了1千米，问原计划每小时挖多少千米？

16. 某项工作甲、乙两人合作了3天后，因甲另有任务，乙再单独做5天才完成，如果甲单独完成这项工作所需时间比乙单独完成这项工作所需时间的2倍少5天，问甲、乙两人单独完成此项工作各需要多少天？

17. 甲、乙两人分别从相距20千米的A、B两地以相同的速度同时相向而行，相遇后，两人继续前进，乙的速度不变，甲每小时比原来多走1千米，结果甲到达B地后乙还需30分钟才能到达A地，求乙每小时走多少千米？

18. 某校学生为"希望工程"捐款，甲、乙两班的捐款都是360元，已知甲班比乙班多5人，乙班比甲班平均每人多捐1元，乙班平均每人捐款多少元？

19. 商场销售某种商品，一月份销售了若干件，共获利润30000元，二月份把这种商品的单价降低了0.4元，但销售量比一月份增加了5000件，从而所获利润比一月份多2000元，调价前每件商品的利润为多少元？

20. 在相距98千米的A、B两地修建一条公路，A地工程队由A向B筑路，B地工程队由B向A筑路，两地的工程队所筑的路在离B地50千米的地方相接，若A地工程队比B地工程队多工作了2个月，而B地的工程队平均每月比A地工程队多筑路1千米，A、B两地工程队平均每月各筑多少千米？

21. 甲、乙两水管同时向一水池灌水，12小时可以灌满，现甲、乙两水管同时开放9小时后关掉乙管，甲水管再继续开放5小时，水池灌满，问单独开放甲、乙水管灌满水池各需几小