高等学校教材

工程数学

线性代数

（第四版）

上海交通大学数学系 编

高等教育出版社

高等学校教材

工程数学
线性代数
（第四版）

上海交通大学数学系　编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学 线性代数/上海交通大学数学系编.—4版.—北京:高等教育出版社,2005.1
ISBN 7-04-015561-3

Ⅰ.工… Ⅱ.上… Ⅲ.①工程数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 134979 号

策划编辑 李艳馥 **责任编辑** 李 蕊 **封面设计** 于 涛
责任绘图 黄建英 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 王 雨
责任印制 孔 源

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
排　　版	高等教育出版社照排中心		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	湖河印业有限公司		
		版　　次	1978年10月第1版
开　　本	850×1168 1/32		2005年1月第4版
印　　张	7.625	**印　　次**	2005年1月第1次印刷
字　　数	190 000	**定　　价**	10.00元

物料号:15561-00

内容提要

线性代数是高等学校大部分专业的重要数学基础课程之一.本书第四版是根据最新颁布的本科数学基础课程教学基本要求(工科类和经管类)中线性代数部分的要求对第三版作了修改而成的.本版保持第三版篇幅不大、内容适当、概念清楚、条理分明的特点,而在内容的结构安排上作了调整,使之更利于教学.

本书共七章,分别是行列式及其计算、矩阵、n 维向量、向量组的秩与线性方程组、线性空间与线性变换、矩阵与对角矩阵的相似和二次型,包含了线性代数的基本知识.

本书可作为高等学校非数学类专业“线性代数”课程的教材,也可供教师、学生和科技人员作参考所用.

第三版前言

自 1982 年第二版以来,高等工业院校的线性代数课程经历了较大的变化.主要表现在线性代数的教学内容在深度与广度都有较大的提高.针对这种情况,我们再次查阅了 1987 年高等学校工科数学课程教学指导委员会制订的《线性代数课程教学基本要求》,在这版中相应作了下面几处修改:

一、特征值与特征向量是线性代数最重要的概念之一.原书的处理显得较为薄弱.这次特辟“矩阵与对角矩阵相似问题”一章,主要是讨论特征值与特征向量的初步性质.

二、矩阵的乘法是矩阵的重要运算.它有多种含义,我们认为下面两种是主要的:一种是线性变换的相继施行;另一种便是由向量的线性组合去理解矩阵的乘法.它对于线性代数一些基本定理的理解与计算常带来方便.这次我们增加一节专谈这方面的内容.

三、加强初等变换的应用.矩阵的初等变换是线性代数最基础的方法.不仅计算需要它,而且在一些定理的证明中亦要用到它.这次增加了矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的求解,求生成子空间的基,以及坐标计算.这样做,希望能帮助学生了解矩阵初等变换的重要性.

除了以上三点较重要的修改外,对第二版某些简略的地方,习题、例题都有些修改,目的是为了教师和学生使用起来更方便.但教材的工作是很细致的,甚至可说是无止境的,虽经反复讨论修改,但总有不足之处,望使用的同志继续向我们提出宝贵的意见.

上海交通大学应用数学系

线性代数编写组

一九八九年七月

第四版前言

本书是大学数学基础课程“线性代数”的教材，自 1978 年面世以来已出三版，教材以线性空间和变换的观点贯穿始终，篇幅不大，内容紧凑，在读者中有一定影响.

此次再版我们对原书作了较大的修改，主要是从利于教学的角度出发，将内容次序加以调整，把矩阵概念和运算提前，而把线性空间和线性变换的概念和理论适当后移.这样使矩阵初等变换的方法较早引进，从而可以用初等变换来处理课程中各种相关的问题.根据我们多年的教学经验，这样安排比较符合学生的认知过程，易于接受，使这一门较抽象的数学课程内容能够逐渐被理解和掌握，而教师在使用教材时也会更觉顺畅和方便.

本版保留了第三版绝大多数的例题和习题，另外还增加了一些题目.这些题目的类型大多数是较为典型的，对学生学习掌握相关知识是有益的.

本版修订时我们参照了教育部高等学校非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最近制定的工科类和经管类“本科数学基础课程教学基本要求”.

本版由乐经良、李世栋和王纪林修订编写.由于笔者水平所限，且编写时间仓促，不妥甚至谬误之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

于上海交通大学

2004 年 11 月

目　　录

第一章 行列式及其计算

行列式是线性代数中最常用的工具之一.本章通过求解二元线性方程组引入二阶行列式,并在二阶和三阶行列式的基础上引入 n 阶行列式的概念,然后利用行列式建立求解线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1 二阶与三阶行列式

在初等代数中,二阶行列式是由二元线性方程的求解引入的.

设二元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

将(1)式中第一个方程的等式两端乘以 a_{22},第二个方程的等式两端乘以 a_{12},然后两式相减,可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

类似可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组(1)有惟一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{2}$$

引入二阶行列式

$$|a_{ij}|_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{3}$$

其中 a_{ij} 为二阶行列式中位于第 i 行和第 j 列交叉处的元素,(3)式的右端称为二阶行列式的**展开式**,可由**对角线法则**求得,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D \neq 0$ 时,方程组(1)的解(2)式可表为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例 1 已知线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - ax_2 = 3, \\ \ \ x_1 + 3x_2 = 2, \end{cases}$$

试问常数 a 为何值时方程组有解,并求其解.

解 由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -a \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - (-a) \times 1 = 6 + a,$$

可见当 $a \neq -6$ 时,$D \neq 0$,方程组有解.又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -a \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2a, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

故其解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{9+2a}{6+a}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{6+a}.$$

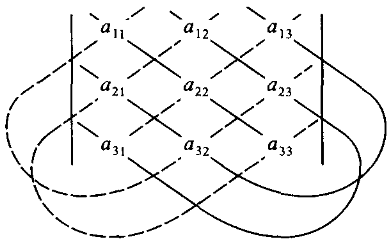
同样,我们引入**三阶行列式**

$$|a_{ij}|_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

其展开式为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

这个展开式可由以下的对角线法则求得



例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 5\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}.$$

解 由对角线法则，

$$D=1\times0\times2+2\times5\times0+3\times4\times(-1)-3\times0\times0-$$
$$2\times4\times2-1\times5\times(-1)=-23.$$

例 3 设方程为

$$f(x)=\begin{vmatrix}x+1 & 3 & 0\\ -1 & x & -3\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

试求其根.

解 由三阶行列式的展开式

$$f(x)=(x+1)x+0+0-0+3-3(x+1)$$
$$=x^2-2x=0,$$

所以 $f(x)=0$ 的根为 $x=0$ 和 $x=2$.

设三元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{4}$$

记三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

如同二元线性方程组那样,可以验证:当**系数行列式** $D\neq 0$ 时,方程组(4)有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}. \tag{5}$$

以上所给出的利用行列式求解二元和三元线性方程组的方法就是**克拉默法则**.

利用二阶和三阶行列式的展开式,容易得到以下性质.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

行列式 D 的**转置行列式**是指将 D 的行与列互换所得的行列式,D 的转置行列式记作 D^{T}.

例如,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

则其转置行列式

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 1 表明 $D^{\mathrm{T}}=D$.

性质 2 交换行列式的任意两行,行列式改变符号.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

由性质 2 可知,若行列式 D 中有两行元素对应相等,则 $D=0$.

性质 3 将行列式的某行的所有元素都乘以常数 k,等于用 k 乘以这个行列式.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

由性质 3 可知,若行列式 D 中有一行元素全为零或有两行对应元素成比例,则 $D=0$.

性质 4 若行列式的某行的各元素都是两项之和,则其可表为两个行列式的和.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{1}+b_{1} & a_{2}+b_{2} & a_{3}+b_{3} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{1} & a_{2} & a_{3} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{1} & b_{2} & b_{3} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 5 将行列式的某一行元素都乘以同一个数后,分别加到另一行的对应元素上,行列式的值不变.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

为介绍性质 6,我们引入

定义 1 在行列式中,去掉元素 a_{ij} 所在的行和列上的元素,余下的元素按原来的次序构成的行列式,称为行列式中元素 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij},又称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**,记作 A_{ij}.

例如,行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

的第二行各元素的代数余子式分别为

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=5.$$

性质 6 行列式等于其任一行中各元素与它们的代数余子式乘积的和.

对三阶行列式 $D=|a_{ij}|_3$,取 D 的第 $i(i=1,2,3)$ 行,则有

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij}=D.$$

例 4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 取 D 的第二行.因其第二行元素为 2,3,1,它们对应的

代数余子式分别为 $-1,-7,5$,故

$$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$$
$$=2\times(-1)+3\times(-7)+1\times5=-18.$$

在三阶行列式 $D=|a_{ij}|_3$ 中,由性质 6 易知

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=0.$$

结合性质 6,就有以下结论.

性质 7 设 $D=|a_{ij}|_3$,则有

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+a_{i3}A_{k3}$$
$$=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=k,\\0, & i\neq k.\end{cases}$$

注意,由性质 1 可知,上述行列式关于其行的性质对于行列式的列也成立.

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}x^2+1&xy&xz\\xy&y^2+1&yz\\xz&yz&z^2+1\end{vmatrix}.$$

解 利用行列式的性质 4,有

$$D=\begin{vmatrix}x^2+1&xy&xz\\xy+0&y^2+1&yz\\xz+0&yz&z^2+1\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}x^2&xy&xz\\xy&y^2+1&yz\\xz&yz&z^2+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&xy&xz\\0&y^2+1&yz\\0&yz&z^2+1\end{vmatrix},$$

对上式右端第一个行列式利用性质 3,分别从第一行和第一列提取公因数 x;对第二个行列式的第一列运用性质 6,可得