高等代数习题课讲义

李玉文　王大同　主编

石油大学出版社

前　言

本书是依据国家教委1987年制定的师专二年制数学专业《高等代数》教学大纲和中学教师进修高等师范专科《数学专业教学大纲（试用本）》编写而成的，与叶伯诚主编的《高等代数》教材配套使用，亦可作为师专、教育学院、各种函授、电大、高教自学等数学专业的辅导用书。

本书在编写过程中，根据高师数学专业的培养目标，考虑到《高等代数》教材的特点，还注意到学员在学习中的主要困难，将习题课的内容进行了合理编排，既适于习题课讲授，也便于学员自学使用。在编写方法上，每节都分为基本要求、典型例题、练习题简答，每章还附有小结和部分复习题解答；在编写指导思想上，注意了联系中学实际，加强对基础知识和基本理论的教学，注意了将高度的抽象与严密的逻辑融会到具体问题的阐述中，让学员从中受到启迪，从而得以要领。本书还遵循由浅入深、循序渐进和少而精的原则，力求通俗易懂，便于自学。

山东数学学会代数教学研究会1990年常务理事会确定了编写此书的基本意见，除了正副主编外，参加此书编写的（以姓氏笔划为序）还有：仇永平、王延明、孔德芳、白振兰、孙杰、朱文秀、伊秀枝、衣春林、仲昭序、刘树堂、闫桂芝、李彩锐、张静、周宏连、赵娥、苑文章、贾冠军、董立华等同志。另外，董立华同志参加了统稿工作，并校对了全部习

题。

本书在编写过程中，得到了著名学者青岛大学邵品琮教授、山东师范大学李师正教授的热情关怀和积极支持，仔细审阅了全稿，并提出许多宝贵意见，在此一并表示衷心地感谢。

限于编者水平，书中疏漏与不妥之处，诚恳地希望读者批评指正。

编　者

1991年7月

目　　录

第一章　预备知识

作为本课程的开始，首先必须介绍以后要用到的一些最基本的概念和方法，并讨论整数的有关整除性质。这些内容也是其它一些学科的预备知识，同时在中学期间也多少接触过。

本章主要讲以下五方面的问题：

1．关于集合的一些概念和符号；

2．关于映射的一些基本概念；

3．数学归纳法；

4．数环、数域；

5．整数的一些整除性质。

§1.1　集合与映射

一、主要内容

1．集合

根据大家的经验和直观认识，作为不定义的概念，我们给出如下的约定：

集合：任何一些确定的事物作为整体来考察时，这一整体就叫做集合，简称为集。

组成一个集合的事物叫做该集合的元素。

不含有任何元素的集合叫空集。记作Φ。

通常用小写英文字母a，b，c，…表示元素；用大写英文字母A，B，C，…表示集合.

$a\in A$表示元素a属于集合A；$a\overline{\in}A$表示元素a不属于集合A。

子集：如果集A的元素都是集B的元素，则称A是B的子集，记作$A\subseteq B$；

相等：$A=B\Longleftrightarrow A\subseteq B$且$B\subseteq A$；

交集：$A\cap B=\{x|\ x\in A且x\in B\}$；

并集：$A\cup B=\{x|\ x\in A或x\in B\}$；

积集：$A\times B=\{(a,\ b)|\ a\in A,\ b\in B\}$；

交集、并集、积集都可推广到任意有限个集的情形。

2．映射

映射是近代数学中的一个基本概念．在中学数学里，已经引入映射的概念．在这里，主要介绍这个概念和它的一些简单性质．

定义1　设A、B是两个非空集合，f是一种法则，如果通过法则f对A中每一个元素x都在B中确定唯一的一个元素y，则称法则f是A到B的一个映射．集A叫做f的定义域，集B叫做f的值域。

通常用符号f：$A\to B$或者$A\to B$表示f是A到B的映射。

对于元素$x\in A$，通过f在B中确定的元素是y时，就说y是x在f之下的象，同时说x是y在f之下的一个原象，并用如下符号表示：

$$f:\ x\longmapsto Y或者f(x)=Y$$

注　任何一个映射都是由三个基本条件构成的，即定义域、值域

及合乎要求的法则，不妨称这三条为映射的三要素.这三要素可说是三位一体，缺一不可. 但法则f有其突出的重要地位.事实上，为了得到一个A到B的映射，基本上只需给出一个合乎要求的法则就足够了. 习惯上人们为了简便常常把“A到B的一个映射f”简称为“映射f”或者“映射$f(x)$”，在符号$f(x)$上面既突出了法则f，同时又体现出法则f所依存的条件——定义域和值域.

定义2 设f_1与f_2都是A到B的映射，如果对A中每一个元素x，都有$f_1(x)=f_2(x)$，则称f_1与f_2是相等的映射，记作$f_1=f_2$。

注 表示映射相等的符号$f_1=f_2$，它是“定义域相同、值域相同、法则效果相同”这三个“相同”的高度概括.

定义3 设f：$A\to B$,若对B中每一个元素y都有A中的元素x，使$y=f(x)$，则称f为A到B的一个满射，满射可归纳为“B的每元有原象”。

定义4 设f：$A\to B$，若对A中的任意两个元素x_1、x_2，只要$x_1\neq x_2$，就有$f(x_1)\neq f(x_2)$，换言之，对x_1、$x_2\in A$，若$f(x_1)=f(x_2)$，必有$x_1=x_2$，则称f是A到B的单射，单射可归纳为“异元异象”。

定义5 设f：$A\to B$，若f既是满射又是单射，则称f是A到B的双射。

A到B的双射也叫A到B的一一对应。

定义6 设f：$A\to B$；g：$B\to C$。若存在映射h：$A\to C$，使对A中每一个元素x，总有$h(x)=g(f(x))$，则称h为f与g的合成，记作$h=g\circ f$。

两个映射f与g可以合成一个映射当且仅当f的值域是g的定义域的子集。

映射的合成满足结合律，即设 f: $A\to B$; g: $B\to C$; h: $C\to D$，则

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h.$$

对任一非空集合A，总有一个特殊映射，即 j_A: $A\to A$, $x\longmapsto x$，我们称j_A是A的恒等映射，且对任意映射

$$f:\ A\to B$$

有以下等式成立：

$$f\circ j_A=f;\qquad j_B\circ f=f.$$

定义7 设f: $A\to B$，若存在映射 g: $B\to A$，使 $g\circ f=j_A$，$f\circ g=j_B$，则称g是f的逆映射，f称为可逆映射.

定理 设f是A到B的一个映射，f是可逆的$\Leftrightarrow f$是双射.

当f是可逆映射时，其逆映射是唯一的，记作f^{-1}.

定义8 设$A=A_1\times A_2$，f: $A\to B$，我们称映射f是从A_1与A_2到B的一个代数运算. 当$A_1=A_2=B=A$时，则称f是A的一个代数运算.

二、基本要求

1. 掌握集合、集合的相等、子集、空集、并集、交集、集合的积等概念及集合的简单运算和性质.

2. 记住并理解映射概念的定义，明确满射、单射、双射、可逆映射、逆映射、代数运算之间的关系和差别.

3. 掌握一些典型而简明的例子.

三、典型例题

例1 设$A=\{0,1,2\}$，$B=\{x\in Z\mid -1\leqslant x<1\}$，求$A\cap B$，$A\cup B$，$A\times B$.

解 由$B=\{x\in Z\mid -1\leqslant x<1\}=\{-1,0\}$，

故由定义可得$A\cap B=\{0\}$，$A\cup B=\{-1,0,1,2\}$，

$A\times B=\{(0,\ -1),\ (0,\ 0),\ (1,-1),\ (1,\ 0),\ (2,-1),$
$(2,\ 0)\}$.

例2 证明：$A\cup(A\cap B)=A$。

证 $\forall x\in A$，则$x\in A\cup(A\cap B)$，故$A\subseteq A\cup(A\cap B)$；反之，$\forall x\in A\cup(A\cap B)$，则$x\in A$或$x\in A\cap B$，从而$x\in A$，故$A\cup(A\cap B)\subseteq A$。

从而$A\cup(A\cap B)=A$。

例3 设f：$A\to B$，证明：

(i) f是单射$\Longleftrightarrow$存在g：$B\to A$，使得

$$g\circ f=j_A;$$

(ii) f是满射$\Longleftrightarrow$存在g：$B\to A$，使得

$$f\circ g=j_B.$$

证 先证 (i)：

"$\Leftarrow$" 假设存在g：$B\to A$，使得

$$g\circ f=j_A,$$

那么对$\forall x_1$、$x_2\in A$，如果有$f(x_1)=f(x_2)$，则有

$$g(f(x_1))=g(f(x_2)),$$
$$g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2),$$
$$j_A(x_1)=j_A(x_2),$$
$$x_1=x_2,$$

故得f是单射。

"$\Rightarrow$" 设f是单射，则有f是A到$f(A)$的双射，这时取B到A的一个映射如下：

$$g(y)=f^{-1}(y),\quad \forall y\in f(A).$$

当f不是满射时，补充规定：

$$g(z)=x_0,\qquad \forall z\in B-f(A),$$

x_0为A中任意取定的一个元素。

这样，g是B到A的一个映射，而且

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g(y)=x,\quad \forall x\in A.$$

即 $g\circ f=j_A$。

其次证明（ii）：

“$\Leftarrow$” 假设存在g：$B\to A$，使得

$$f\circ g=j_B,$$

那么对任意元素$y\in B$，则有

$$y=j_B(y)=f\circ g(y)=f(g(y)),\qquad g(y)\in A,$$

这表明y在f之下有原象$g(y)$，即f是满射。

“$\Rightarrow$” 设f是满射，从而对任意一个元素$y\in B$，在f之下都有原象，在y的这些原象之中随便取定一个，记作y'，即有$y'\in A$，

$$f(y')=y.$$

现在我们规定一个从B到A的映射如下：

g：$y\longmapsto y'$，　$\forall y\in B$。

因为对每一个y都已指定了A中唯一的一个元素y'，所以g确是B到A的一个映射，并且

$$f\circ g(y)=f(g(y))=f(y')=y,\quad \forall y\in B,$$

即 $f\circ g=j_B$。

例4 设N是自然数集，试给出N到N的两个具体的映射f与g，使得

$$g\circ f=j_N,\qquad f\circ g\neq j_N,$$

能否有这样的双射g，为什么？

解　令　$f: m \longmapsto m+1, \quad \forall m \in N$。

g；$m \longmapsto m-1$，　当$m>1$时；

$1 \longmapsto 1$。

显然，f与g都是N到自身的映射，并且使得

$$g \circ f(m) = g(f(m)) = g(m+1) = m \Rightarrow g \circ f = j_N,$$

$$f \circ g(1) = f(g(1)) = f(1) = 2 \neq j_N \Rightarrow f \circ g \neq j_N.$$

如果g是双射，则有

$$g^{-1} = g^{-1} \cdot j_N = g^{-1}(g \circ f) = (g^{-1} \circ g) \circ f = j_N \circ f = f$$

$$\Rightarrow f \circ g = g^{-1} \circ g = j_N.$$

即当g为双射时，由$g \circ f = j_N \Rightarrow f \circ g = j_N$。故满足题设条件的双射$g$不存在。

四、习题解答

习题1.1

1. 写出下列集合的表示式：

(1) 方程$x^2+x+1=0$的所有实数根的集合；

(2) 直角坐标系的抛物线$y=x^2$上的所有的点的集合；

(3) 能被3整除的整数集合。

答　(1) $\{x \mid x^2+x+1=0,\ x \in R\}$，

(2) $\{(x,\ y) \mid y=x^2,\ x,\ y \in R\}$；

(3) $\{x \mid x=3n,\ n \in Z\}$。

2. 略。

3. 设$A = \{x \mid x \in R,\ -1 \leqslant x \leqslant 1\}$；

$B = \{x \mid x \in R,\ x>0\}$；

$C = \{x \mid x \in R,\ -1<x<2\}$。

写出$A \cap (B \cup C)$和$A \cup (B \cap C)$。

答　$A \cap (B \cup C) = \{x \mid -1<x \leqslant 1,\ x \in R\}$；

$A\cup(B\cap C)=\{x|-1\leqslant x<2,\ x\in R\}$.

4．写出集合(1,2,3)的所有子集,并指出哪些是真子集。

答　{1}，{2}，{3}，{1,2}，{1,3}，{2,3}，

Φ，{1，2，3}，前面七个是真子集。

5．设$A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$，$B=\{b,\ d,\ e,\ f\}$，试求$A\cup B$，$A\cap B$，$A\times B$。

解　$A\cup B=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$，$A\cap B=\{b,\ d\}$，$A\times B=\{(a,\ b),\ (a,d),\ (a,e),\ (a,f),\ (b,\ b),\ (b,d),\ (b,\ e),\ (b,\ f),\ (c,b),\ (c,d),\ (c,e),\ (c,f),\ (d,\ b),\ (d,\ d),\ (d,\ e),\ (d,\ f)\}$.

6．略。

7．写出$R\times R$的表示式，并说明其几何意义。

解　$R\times R=\{(a,\ b)|a,\ b\in R\}$，其几何意义是：平面上所有点的坐标的集合。

习题1.2

1．设A是前100个自然数所成的集，找一个A到自身的映射，但不是满射。

解　f：$x\longmapsto 100$，$\forall x\in A$.

2．f：$x\longmapsto\dfrac{1}{x}$是不是全体实数集到自身的映射？

答　不是，因$f(0)$无意义。

3．设f定义如下：

$$f(x)=\begin{cases}x, & 若x<0;\\ 1, & 若0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2x-1, & 若x\geqslant 1.\end{cases}$$

f是不是R的映射？是不是单射？是不是满射？

答　是映射但不是单射和满射。

4。令$A=\{1, 2, 3\}$，写出A到自身的一切映射，在这些映射中哪些是双射？

解　记$1\longmapsto i_1$，$2\longmapsto i_2$，$3\longmapsto i_3$，为$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ i_1 & i_2 & i_3\end{pmatrix}$映射的总数是1，2，3三个数允许重复排列的总数$3^3=27$个。其中仅当$i_1$，$i_2$，$i_3$互不相同的映射是双射，共$3!=6$个。

5。设a，b是任意两个实数且$a<b$，试找出一个〔0，1〕到〔a，b〕的双射。

解　f：$x\longmapsto a+(b-a)x$，　$\forall x\in$〔0，1〕，显然f是〔0，1〕到〔a，b〕的映射，若$y\in$〔a，b〕，则

$0\leqslant x=\dfrac{y-a}{b-a}\leqslant 1$，$f(x)=y$，$f$是满射；若$a+(b-a)x_1=a+(b-a)x_2$，则$x_1=x_2$，$f$是单射，因而$f$是双射。

6。略。

7。设A是全体正实数所成的集合，令

$$f: x\longmapsto x,\quad g: x\longmapsto \frac{1}{x},\ x\in A.$$

（1）g是不是A到A的双射？

（2）g是不是f的逆映射？

（3）如果g有逆映射，g的逆映射是什么？

解　（1）g是双射，因若$x\neq y$，则$\dfrac{1}{x}\neq\dfrac{1}{y}$；$\forall x\in A$，$g\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$。

（2）因$f\circ g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$，所以$g$不是$f$的逆映射。

（3）因$\forall x\in A$，$g\circ g(x)=g\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$，故$g$的逆映射是$g$。

8．判断下列规则是不是所给集合A的代数运算：

	集合A	规　　则
(1)	全体整数	$(a,b)\longmapsto a^b$
(2)	全体整数	$(a,b)\longmapsto -ab$
(3)	全体有理数	$(a,b)\longmapsto -1$
(4)	全体实数	$(a,b)\longmapsto \frac{a}{b}$

答　(1) 不是；(2) 是；(3) 是；(4) 不是。

§1.2　数学归纳法与数环和数域

一、主要内容

1．数学归纳法

数学归纳法是一种重要的数学证明方法，常用的有两种形式，用于与自然数集有关的命题的证明。数学归纳法的基本依据是自然数集的一个最基本的性质——最小数原理。

最小数原理　自然数集N的任意一个非空子集S必含有一个最小数，即存在$a\in S$，使任意的$c\in S$，都有$a\leqslant c$。

第一数学归纳法　设$P(n)$是一个与自然数n有关的命题。如果

1) 当$n=1$时命题$P(1)$成立；

2) 假设$n=k$时命题$P(k)$成立，可推出$n=k+1$时命题$P(k+1)$成立，那么命题$P(n)$对一切自然数n都成立。

为了方便，我们把1) 叫做归纳基础，2) 叫做归纳过程，2) 中的假设叫做归纳假设。

第二数学归纳法　设$P(n)$是一个与自然数n有关的命题，如果

1）当$n=1$时命题$P(1)$成立；

2）假设对$\leqslant k$的自然数m，命题$P(m)$都成立时可推出命题$P(k+1)$也成立，那么命题$P(n)$对一切自然数n都成立。

注　第一数学归纳法与自然数集N如下的性质等价：

设M是N的一个子集，具有以下性质：

1）$1\in M$；

2）如果$k\in M$，则$k+1\in M$，那么$M=N$。

第二数学归纳法与自然数集N如下的性质等价：

设M是N的一个子集，具有以下性质：

1）$1\in M$；

2）如果一切$\leqslant k$的自然数都在M里，则$k+1\in M$，那么$M=N$。

自然数集N的上述两个性质分别叫做第一归纳原理和第二归纳原理。

有时在归纳基础中，$n=1$改为$n=2$或$n=3$等归纳过程不变，可推出$P(n)$对$n\geqslant 2$或$n\geqslant 3$等成立。

2．数环和数域

定义1　设S为一非空数集，如果S关于加法、减法和乘法是封闭的，即对于S中任意两个数a、b来说，$a+b$，$a-b$，ab都在S中，则称S是一个数环。

定义2　设F是一个数集，至少含有一个不等于零的数，如果F关于加、减、乘、除四则运算是封闭的，即对F中任意两个数a、b来说，$a+b$，$a-b$，ab都在F中，而且当$b\neq 0$时，$\frac{a}{b}$也在F中，则称F是一个数域。

$S=\{0\}$是数环，而且任意数环中都含有0，这样，可