

本书是武汉测绘学院高等数学函授讲义的第三册（全书共三册），本书主要包括级数、复变函数大意、微分方程和微分几何等四部分。除去课程正文外，书中尚附有一定数量的练习题和自我检查题。本书除作为函授教材外，还可作为从事测量工作以及其它技术工程工作者自学用书。

为了节约纸张，正文前部分作了一些调整，所以页码是从5开始的。

高等数学

（函授讲义）

第三册

武汉测绘学院高等数学函授小组编

（根据测绘出版社纸型重印）

※

国家测绘总局测绘书刊编辑部编辑（北京三里河国家测绘总局）

中国工业出版社出版（北京修门路丙10号）

（北京市书刊出版事业许可证出字第110号）

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行，各地新华书店经售

※

开本 $787 \times 1092^{1/4}$ ，印张 $15^{1/2}$ ，字数362,000

1961年4月北京第一版

1962年9月北京新版，1962年9月北京第一次印刷

印数0001—1,092，定价（10—5）1.85元

※

统一书号：K15165·1655（测绘-28）

高等学校教学用书

高等数学

(函授讲义)

第三册

武汉测绘学院高等数学函授小组编



中国工业出版社

原
书
缺
页

原
书
缺
页

高等数学 (函授讲义)

第三册

目 录

第六编 级数

第一章 数项级数 7

§ 6-1-1 级数的概念 8

§ 6-1-2 正项级数 14

习题 6-1-甲 21

§ 6-1-3 任意项级数 22

习题 6-1-乙 26

本章自我检查题 27

第二章 幂级数 28

§ 6-2-1 函数项级数 28

§ 6-2-2 幂级数及其收敛域 30

习题 6-2-甲 36

§ 6-2-3 函数的幂级数展开式 37

§ 6-2-4 幂级数的应用 46

习题 6-2-乙 51

本章自我检查题 53

第三章 傅立叶级数 54

§ 6-3-1 傅立叶级数 54

§ 6-3-2 函数的傅立叶级数展开式 59

§ 6-3-3 偶函数与奇函数的傅立叶级数 63

§ 6-3-4 函数 $f(x)$ 在半区间 $[0, \pi]$ 上的

正弦级数与余弦级数 66

§ 6-3-5 函数 $f(x)$ 在任意区间上的傅立叶

级数 69

习题 6-3-甲 72

本章自我检查题 73

第七编 复变函数论

第一章 复变函数大意 75

§ 7-1-1 复数及其运算 76

§ 7-1-2 复数项级数 81

§ 7-1-3 复变函数的定义及其极限与

连续的概念 83

§ 7-1-4 复变函数的导数 87

习题 7-1-甲 92

§ 7-1-5 平面映射 93

§ 7-1-6 保角映射 104

习题 7-1-乙 108

本章自我检查题 108

第八编 微分方程

第一章 一阶微分方程 108

§ 8-1-1 引出微分方程的几个问题 108

§ 8-1-2 一般概念 111

§ 8-1-3 可分离变量的方程 116

§ 8-1-4 可化为可分离变量方程的方程

..... 118

习题 8-1-甲 123

§ 8-1-5 线性微分方程 124

§ 8-1-6 全微分方程 130

习题 8-1-乙 134

§ 8-1-7 一阶微分方程的近似解 135

习题 8-1-丙 140

本章自我检查题 141

第二章 二阶微分方程及高阶微分方程

..... 142

§ 8-2-1 基本概念 142

§ 8-2-2 几种特殊类型的方程 144

习题 8-2-甲 149

§ 8-2-3 线性微分方程 150

习题 8-2-乙 159

§ 8-2-4 常系数线性微分方程 160

习题 8-2-丙 171

§ 8-2-5 微分方程的級数解法	172
习题 8-2-丁	175
本章自我检查题	175

第九編 微分几何

本編附录 向量分析的基本知識	177
第一章 空间曲线	183
§ 9-1-1 空間曲线的方程	183
§ 9-1-2 单位切綫与法平面	187
§ 9-1-3 单位主法綫与单位副法綫	190
§ 9-1-4 密切平面与化直平面	194
习题 9-1-甲	196
§ 9-1-5 曲率	197
§ 9-1-6 挠率	199
§ 9-1-7 伏雷納公式与规范展式	202
§ 9-1-8 曲率圓	206
习题 9-1-乙	208

本章自我检查题	208
第二章 曲面	209
§ 9-2-1 曲面方程与曲线坐标	209
§ 9-2-2 曲面的切平面与单位法綫 曲面的面积	218
§ 9-2-3 曲面上的曲线的弧长 一阶基本量	221
§ 9-2-4 曲面上曲线的方向 曲线間的夹角	223
习题 9-2-甲	227
§ 9-2-5 曲面上曲线的法曲率和测地曲率 麦尼尔定理	228
§ 9-2-6 曲率綫和欧拉定理	234
§ 9-2-7 测地曲线和克萊洛定理	240
§ 9-2-8 保角映射	246
习题 9-2-乙	251
本章自我检查题	251

第六編 級 数

本編前言 研究級数的目的，是要給予函数另一种表示式（不严格地說，就是要把函数复杂的表示式换成简单表示式），这种表达函数的方法更便于我們进一步地研究函数，这不論是在数学理論本身还是在实用上都具有重大的意义。近百年来，由于科学技术发展的需要，特别是計算技术发展的需要，对于級数这个数学工具的要求更是日益广泛了，这样也就使得級数理論在現代数学方法的宝庫中占据一个非常重要的位置。

在本編里，我們要建立級数的概念和介紹它的基本理論，并且我們把全部注意力放在常数項級数、幂級数以及傅立叶級数上；本編的內容也正是按照这个次序分为三章。常数項級数是最简单的級数，但它是級数理論的基础部份，在这个基础上建立函数項級数的概念。幂級数和傅立叶級数是函数項級数中两种最简单和最常用的級数，它們是实现把函数复杂的表示式换成简单的表示式最基本的工具。

和数学分析里其它的基本概念一样，級数的概念也是建立在极限理論的基础上。我們將以极限理論来建立級数的“和”的概念，这一概念是級数的基本概念。一般說来，具有“和”的級数也就是“收斂級数”對我們是有用的，并且对于級数的一些主要性質的研究，也是在收斂的条件下才有意义；因而我們研究的对象主要是收斂的級数，并且根据这一点，就把建立对一个級数的审斂法則做为第一章的中心內容。

第一章 数 項 級 数

本章內容提要与学习要求 本章含有三节，在第一节里，我們建立了級数以及級数的和的概念，讀者要特別注意級数的和与級数的部份和之間的关系，在后面的一些重要法則一般是根据这个关系而建立起来的。在第一节里，我們还介紹了級数的一些基本性質，讀者也要記住这些性質。后两节的内容是介紹对級数的各种审斂法則。对于这些法則，要求讀者能掌握它們的建立过程、記住法則的內容并且要会使用它們；另外还要注意，对第二节中的三个法則来講，它們只适用于正項級数；不能拿到一个級数，不管它是否正項級数，就立刻用这些法則来审查它的斂性；比方說对于級数 $\sum \frac{1}{n!} \sin n\alpha$ ，就不能用比較法来审斂，这是因为它不是正項級数。对于第三节里的交錯級数，讀者不仅要記住它的审斂准則（萊布尼茲准則），还必须記住它的余和 r_n 的性質，以后我們常常要用这个性質来进行近似計算中的誤差估計。

§ 6-1-1 級数的概念

讀者在初等数学課程里面，就已經接触到級数，比方說当我们用十进位分数来表示一般分数或小数时，就有了級数的概念。例如用十进位分数来表示 $\frac{5}{8}$ 及 $\frac{5}{9}$ 这两个分数，第一个分数 $\frac{5}{8}$ 的分母可以除尽分子，它等于“有尽”小数 0.625，当然我們也可以把它看做三个小数 0.6、0.02 以及 0.005 之和，于是 $\frac{5}{8}$ 可以表示为下面三个十进位分数之和，

$$\frac{5}{8} = 0.625 = \frac{6}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3}.$$

对于第二个分数 $\frac{5}{9}$ ，它的分母不能除尽分子，它等于“不尽”小数 0.555……（或写作循环小数 0.5）。但是，如果给出数列

$$0.5, 0.05, 0.005, \dots$$

我們自然会直觉地想到不尽小数可以表示为这个数列之“和”，也就是写做

$$\frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \dots + \frac{5}{10^n} + \dots \quad (1)$$

的形式，这一表达式正引出无穷級数的概念。对表达式（1），讀者在中学代数里已見過它，并且知道它叫做无穷等比級数（或几何級数）。对于这个級数，我們可以按一定

的法則而算出一个数，即 $\frac{\frac{5}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$ （它显然等于 $\frac{5}{9}$ ），我們把这个数叫做級数（1）

之“和”。

对于一般的无穷等比級数，讀者也已經在中学代数中見過，那就是把数列

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots$$

的各项用加号连接起来而形成的表达式：

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots \quad (2)$$

这里 a 是任意的一个数叫做等比級数的首项， q 叫做級数的公比，讀者已經知道当公比的绝对值小于一时，我們可按一定法則算出一个数即 $\frac{a}{1-q}$ 与級数相当并把它叫做級数（2）之“和”。

上面所講的“将一个数列的各项用加号连接起来”这一事实是很重要的，它不仅在于

理論上而且在實用上都有很大的價值。現在我們對它下一般的定義：

設給定一個數列

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

把數列的各項用加號連接起來而得到表达式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (3)$$

或寫做

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (3')$$

我們把這一表达式叫做無窮級數或簡單地叫做級數。

級數(3)中的數 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 等叫做級數的項，而一般把第 n 項 a_n 叫做級數的通項^①，由於我們現在討論的級數(3)的項暫時地限為常數，因而就叫它是常數項級數或簡稱為數項級數。例如級數。

$$\frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \dots + \frac{5}{10^n} + \dots \quad (4)$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad (5)$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots \quad (6)$$

都是數項級數，它們的通項依次是 $\frac{5}{10^n}$ 、 $\frac{1}{n!}$ 與 $(-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ 。

現在我們要介紹一個重要的概念就是級數的和的概念：

對於級數(4)，我們已經知道它能表示數 $\frac{5}{9}$ ，我們把 $\frac{5}{9}$ 叫做級數的和；後面

我們將指出級數(5)與(6)分別能“表示”數 e 與 $\ln 2$ ，我們也把數 e 和 $\ln 2$ 分別叫做級數(5)與(6)的和。那末對於一般的數項級數來講，應該如何來定義它的和呢？是否能說：如果級數能表示某一個數，就把這個數叫做級數的和呢？我們說這樣來一般地定義級數的和並不妥當，因為嚴格地講，“級數表示一個數”這句話的涵義並不明確，並且從這句話也絲毫看不出級數的項與級數的和之間有什麼關係。因此，下面我們要進

一步來分析級數(4)與數 $\frac{5}{9}$ 之間的關係，並從而引出級數的和的一般定義。

我們把級數(4)的前 n 項加起來，得到

$$\frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \dots + \frac{5}{10^n} = \frac{5}{9} - \frac{5}{9} \left(\frac{1}{10} \right)^n.$$

我們看出，當 n 愈大，等號右邊的第二項就愈小，當 $n \rightarrow \infty$ 時這一項就趨於零，這就是

^①通項顯然有這樣的意義，即看到這一項就可以知道級數每一項的形狀。實際上，級數的第 $n+1$ 項或 $n-1$ 項也能有這樣的作用，因此，有時為了方便起見，我們也可以取第 $n+1$ 項或 $n-1$ 項等作為級數的通項。

說，当 $n \rightarrow \infty$ 时，級数 (4) 的前 n 項之和就趋于 $\frac{5}{9}$ ，換句話說，就是級数 (4) 之和 $\frac{5}{9}$ ，是級数 (4) 前 n 項之和 (当 $n \rightarrow \infty$ 时) 的极限。

現在我們就从这个例子推广到一般情形，而定义什么是級数的和：

对于級数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

我們把它的前 n 項加起来叫做級数的部份和并用 S_n 来表示，即

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \quad (7)$$

显然，級数的部份和 S_n 是項数 n 的函数，例如

当

$$n=1, \text{ 則 } S_1 = a_1$$

$$n=2, \text{ 則 } S_2 = a_1 + a_2$$

$$n=5, \text{ 則 } S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \text{ 等等；}$$

如果当項数 n 无限增大时，部份和 S_n 的极限存在，把这一极限用 S 来表示，我們就把 S 叫做級数的和。于是有

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \quad (8)$$

如果部份和 S_n 的极限不存在，我們就說級数沒有和。

如果級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 具有和 S ，我們就說这一級数收敛，或說 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛級数，并且写做

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S. \quad (9)$$

这就是說，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 表示着数 S 。相反的情形，如果級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 沒有和，我們就說这一

級数发散，或說 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是发散級数，发散的級数不表示什么数。

我們把一收敛級数的和 S 与部份和 S_n 之差叫做級数的余和，并用 r_n 来表示余和，即

$$r_n = S - S_n. \quad (10)$$

显然，当項数 n 无限增大时， r_n 的极限是零，这就是說，余和 r_n 是 (在 $n \rightarrow \infty$ 时的) 一个无限小，根据这一点，我們就可以按一定的精度要求，用部份和 S_n 来代替和 S ，这就是我們用級数来进行近似計算的理論根据。

〔例 1〕 等比級数

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

当公比 q 的绝对值小于一时收敛、大于一及等于一时发散。这是由于級数的部份和

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} q^n,$$

显然, 如果 $|q| < 1$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q} = S,$$

相反, 如果 $|q| \geq 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在。

因此我們可以知道, 对于任意一个等比級数的敛散性 (收敛或发散) 的判断, 只要观察它的公比就可以了。

〔例 2〕 級数

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$$

是发散級数。事实上, 它是一个以 -1 为首项、公比 $q = -1$ 的等比級数, 由例一, 可知它发散。

〔例 3〕 判断級数

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

的敛散性

解: 由于
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

于是我們可以把級数的部份和写为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

因此, 这一級数是收敛的 (并且它的和 $S=1$)。

〔例 4〕 判断級数

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

的敛散性。

解: 級数的部份和为

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sqrt{n} \rightarrow \infty$, 于是有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

因此級数是发散的。

以上的几个例子, 都是根据級数和的定义, 而直接来判断它的敛散性的; 这样做有一个好处, 就是我們不仅能知道級数的敛散性, 而且还能求出級数的和来。但是, 在一般的情形下, 这样做是不方便的, 也就是說, 部份和 S_n 的极限不易求出。因此, 我們在后两节中, 要建立一些审查級数敛散性的法則 (簡称为审敛法則)。下面我們首先来介紹級数的几个基本性質, 我們在后面常要用到它們, 特別是第四个性質做为級数收敛的必要条件, 更是非常有用的。

性質一 以常数 $K (K \neq 0)$ 乘級数的各項, 不改变級数的敛散性, 詳細地說这性質可以分为两部份, 即 (i) 如果級数 (a) ,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad (a)$$

收敛, 那么級数 (Ka) ,

$$Ka_1 + Ka_2 + Ka_3 + \cdots + Ka_n + \cdots \quad (Ka)$$

也收敛。(ii) 如果級数 (a) 发散, 那么級数 (Ka) 也发散, 这里 K 不等于零。

我們可以根据定义来証明性質的第一部份, 事实上, 設級数 (a) 的部份和为 S_n , 級数 (Ka) 的部份和为 σ_n , 那末, 显然有

$$\sigma_n = KS_n.$$

对上式两边取极限, 令 $n \rightarrow \infty$, 并假設級数 (a) 的和为 S , 就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} KS_n = K \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = KS$$

这就說明了級数 (Ka) 的部份和有极限, 于是級数 (Ka) 收敛。在証明的过程中, 我們还看出級数 (Ka) 的和就等于 KS 。

对于性質一的第二部份, 我們可以用反証法来証明, 就是說如果級数 (Ka) 收敛, 我們若用数 $\frac{1}{K}$ 来乘 (Ka) 的每一項就得到級数 (a) , 根据性質的第一部份, 級数 (a) 应该收敛, 而这与假設不合, 这是由于在第二部份中, 已知的事实是級数 (a) 发散; 这就說明了当級数 (a) 发散的时候, 級数 (Ka) 也一定发散。

根据这一性質, 當我們檢驗一个級数的敛散性的时候, 我們可以任意地用一个不等于零的常数来乘級数的每一項, 当然也可以提出每一項的公因子来。

性質二 收敛級数可以逐項相加或相減。就是說, 如果

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S \quad (a)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots = \sigma \quad (b)$$

則級數

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) + \cdots \quad (a \pm b)$$

也收斂，並且它的和等於 $S \pm \sigma$ 。

我們仍根據定義來證明這一性質，設級數 (a) 與 (b) 的部份和分別為 S_n 與 σ_n ，那麼級數 $(a \pm b)$ 的部份和顯然是 $S_n \pm \sigma_n$ ，已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 與 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$ ，于是有 $\lim_{n \rightarrow \infty}$

$(S_n \pm \sigma_n) = S \pm \sigma$ 。這就証實了本性質。

由性質二可以得到一個重要推論，即改變一個收斂級數的任何有限項的數值而得到的新級數仍然收斂，但是新級數的和，一般說來與原級數的和是不相同的。這一推論的正確性建議讀者自己來証實它。

這裡還要提醒讀者注意，對於發散級數是沒有這種性質的。兩個發散級數或一個收斂級數與一個發散級數相加或相減的結果有時發散，有時也可收斂。

性質三 去掉級數前面的有限項或加上有限項，不會改變級數的斂散性。

為了方便起見，我們就去掉兩項的情形來證明這一性質，（對於一般的情形可以完全仿照來証）。對於兩個級數

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots \\ a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots \end{aligned}$$

第二個是由第一個去掉前兩項而得到的，我們用 S_n 與 σ_n 依次來表示這兩個級數的部份和，顯然有

$$\sigma_{n-2} = S_n - (a_1 + a_2) \text{ 與 } S_n = \sigma_{n-2} + (a_1 + a_2)$$

由這兩個等式就可以看出，當 $n \rightarrow \infty$ 時， σ_{n-2} 與 S_n 或同時具有極限 σ ， s 或同時沒有極限，也就是說這兩個級數具有相同的斂散性，並且附帶地看出，它們的和有關係

$$\sigma = s - (a_1 + a_2).$$

性質四（級數收斂的必要條件）如果級數

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

收斂，那麼級數的通項 a_n 當 $n \rightarrow \infty$ 時的極限為

零，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

或者換一種說法，就是當項數 $n \rightarrow \infty$ 時，如果級數的通項 a_n 的極限不是零，那麼級數一定發散。這就是說，級數的通項的極限是零為級數收斂的必要條件。下面是這一性質的證明：

通項 a_n 可以表示為 $S_n - S_{n-1}$ ，另一方面，由於假定了級數收斂，就可以得到下面兩個等式：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0.$$

根据这一性质，当我们拿到一个级数的时候，就首先看看它的通项是否以零为极限，如果不是的话，那就可以断定它是一个发散级数。

〔例 5〕 级数

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots$$

是一个发散级数。事实上，这一级数的通项是 $\frac{n}{n+1}$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时它的极限等于一，因

此级数发散。但是，读者必须注意，这一条件不是级数收敛的充分条件，这就是说，如果只看到 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，我们不能肯定级数是收敛的。关于这一点，我们可以通过本节的

例 3 与例 4 来说明，事实上，例 3 与例 4 的通项分别是 $\frac{1}{n(n+1)}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ，它们都以 0 为极限，但是一个收敛而另一个却发散，因此，通项以零为极限仅是级数收敛的必要条件而非收敛的充分条件，读者必须牢牢地记住它。

§ 6-1-2 正项级数

判断一个“每一项都不是负值”的级数敛散性的问题，是比较容易得到解决的；而许多其他类型的级数敛散性的问题，又大部份可以借助于这种级数而得到解决。因此，我们首先来研究这种级数。而且我们把这种级数叫做正项级数，也就是说，如果级数

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad (a)$$

的项有 $a_n \geq 0$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)，那么级数 (a) 就叫做正项级数。

对于一个正项级数，有一个很明显的事实，那就是它的部份和 S_n 随着项数 n 的增大而单调地增大，用式子来表示，就是

$$S_n \leq S_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

S_n 既然是单调地增大，那么当 $n \rightarrow \infty$ 时就有两种可能的情形，一种情形是 S_n 无限地增大，

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ，在这种情形下，级数发散；另一种情形是 S_n 虽然单调地增大但却有上

界，在这种情形下，根据 § 3-3-5 里所讲的第二个极限存在准则，就知道部份和 S_n 的极限存在，因而级数是收敛的。这样一来，我们便得到下面的定理。

定理 正项级数收敛的必要与充分的条件是部份和有上界。

这个定理很重要，根据它就可以建立一些关于正项级数的审敛法则，我们在这里要介绍三种审敛法则，在数学分析以及它的应用中所碰到的级数，绝大多数都可以直接或间接运用这些法则来判断它们的敛散性。下面我们依次地介绍这三种法则

I. 比较法 给定两个正项级数

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad (a)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots \quad (b)$$

(1) 如果級數 (a) 的每一項，都不大於級數 (b) 的對應項，也就是說，有

$$a_n \leq b_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

那末，若級數 (b) 收斂，則級數 (a) 一定也收斂。

(2) 如果級數 (a) 的每一項，不小於級數 (b) 的對應項，即

$$a_n \geq b_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

那末，若級數 (b) 發散，則級數 (a) 一定也發散。

下面我們來證明這個法則，先證第一部份：

(1) 用 S_n 和 σ_n 分別表示級數 (a) 與 (b) 的部份和，則根據條件 $a_n \leq b_n$ ，便知道有 $S_n \leq \sigma_n$ ；如果級數 (b) 收斂，根據上面的定理可知 σ_n 有上界，這時 S_n 顯然也就有上界，再由上面的定理而知級數 (a) 是收斂的。

(2) 第二部份的證法和 (1) 相似，事實上，由條件 $a_n \geq b_n$ 便知道有 $S_n \geq \sigma_n$ ；如果級數 (b) 發散，則 σ_n 無上界，這時 S_n 顯然也無上界，於是級數 (a) 發散。

根據比較法，當我們拿到一個級數而要判斷它的斂散性的時候，就可以把這一級數做為法則里的級數 (a) ，然後再適當地選擇一個已知斂散性的級數 (b) ，把級數 (b) 與 (a) 進行比較，那麼就可以分別按法則中的情形 (1) 或 (2) 而判定級數 (a) 的斂散性了。

〔例 1〕 判斷級數

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots$$

的斂散性。

解：取級數

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

這是一個收斂的等比級數。把這一級數與所給出的級數進行比較，由

$$\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n} \quad (n=2, 3, \cdots)$$

故知所給的級數是收斂的。

〔例 2〕 級數

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \cdots$$

是發散的，這是因為把它與發散級數

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

比較，而有 $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$ 的緣故。

在使用比較法時，我們可以根据上節中講的級數的第三個性質而丟掉級數前面某一

些項再來比較，這就是說，當我們把級數 (a) 與級數 (b) 進行比較時，如果前面的有限項不滿足法則中的條件，我們就把這些項去掉然後再使用比較法。

〔例 3〕 級數

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

是收斂的。事實上，去掉級數的首項就得到

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots$$

把它和收斂級數

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)n} + \cdots$$

比較，而有 $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{(n+1)n} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$ 。

比較法的優點，是在使用時只是進行數值的比較，而無複雜的運算；它的缺點是對於用來和所給的級數進行比較的級數 (b)（即已知收斂的級數），卻沒有一定的選擇方法。在實用上，我們一般選取等比級數與將在下面介紹的 P 級數做為級數 (b)；如果這兩種級數失效的話，那我們就使用其它的審斂法則，其中常用的是下面講的比值法。

I. 比值法（達朗貝爾比值法） 如果正項級數

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad (a)$$

的通項 a_n 與 a_{n+1} （也就是 a_n 後面的一項）之比 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ，當 $n \rightarrow \infty$ 時，有極限 l ，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

那末，（1）當 $l < 1$ 時，級數 (a) 收斂；（2）當 $l > 1$ （或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ ）時，級數發散；（3）如果 $l = 1$ ，級數 (a) 可能收斂也可能發散；也就是說，這時我們不能用比值法來判定級數的收斂性。

對於這一法則，我們可以根据極限理論並結合上面所講的比較法來証實它：

如果 $l < 1$ ，那末總可以取得一個正數 ε ，使得 $r = l + \varepsilon < 1$ ；再由極限的定義

可以知道，在 n 無限增大的過程中總有這樣一個時刻，在這時刻以後，永遠有 $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon$ ；由於 n 是通過自然數而逐漸增大的，所以這個時刻就是從某一個第 N 項開始，換句話說，就是當 $n \geq N$ 時，有

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon \text{ 或}$$