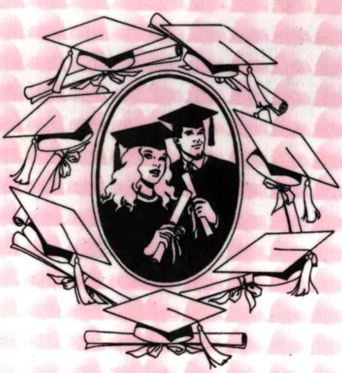
高等学校数学教材配套辅导书

线性代数复习指导

主 编 北京大学数学科学学院
马 杰
总策划 胡东华



科学技术文献出版社

线性代数复习指导

主　编　北京大学数学科学学院

马　杰

总策划　胡东华

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北　京

前　　言

本书是《高等数学辅导》的姊妹篇。其体例为：

基础知识导学：详细叙述了每章、节的基本概念，基本定理和基本方法，便于读者复习。

重点难点突破：针对每一章节的重点难点加以详细分析，用具体的例子帮助读者学习掌握。

典型题型解析：本书对每一章节的典型题型进行了分类，解答评析。不仅指出同类题的解题思路和程序，并且指出了在应用方法和运算过程中常犯的错误，读者可以举一反三，触类旁通。

同步强化训练：在所附的习题中，既有一般教科书和习题集中的典型题目，也有选自全国高教自考、全国研究生统考和全国 MBA 联考中的考题，读者可以有选择的进行训练，以增强自己解决问题的能力，并检验自己对所学知识的掌握程度。对有难度的习题，在答案中予以适当的提示，以帮助读者更好地训练。

考研试题讲析：每章最后对近十年来全国研究生考试高等数学(一)、(二)、(三)、(四)线性代数部分的考题进行了归类、讲解和分析，以便对报考研究生的读者有所帮助。

全书选题覆盖面广，重点类型突出，题型丰富，既是学习的良师，也是复习的益友，对参加全国研究生统考和高教自考的读者而言都是一本有价值的参考书。

(京)新登字130号

科学技术文献出版社
向广大读者致意

科学技术文献出版社成立于1973年,国家科学技术部主管,主要出版科技政策、科技管理、信息科学、农业、医学、电子技术、实用技术、培训教材、教辅读物等图书。

我们的所有努力,都是为了使您增长知识和才干。

目录

第一章 行列式

第二章 矩阵

第三章 线性方程组

第四章　向量空间

第五章　矩阵的特征值与特征向量

第六章　二次型

第一章　行列式

§1　n 阶行列式的定义

【基础知识导学】

1. n 阶行列式的归纳定义

对由 n^2 个数组成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $n=1$ 时，$|a_{11}|=a_{11}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$D=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

其中 $M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为 a_{1j} 的余子式，

$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$ 为 a_{1j} 的代数余子式.

2. n 阶行列式的“排列逆序”定义

(1)排列

由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列. n 级排列的总数是 $n!$ 个.

(2)逆序和逆序数

在一个排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,若 $i_t>i_s$,则称这两个数 i_ti_s 组成一个逆序.一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数,记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.若 τ 为奇数,则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为奇排列;若 τ 为偶数,称此排列为偶排列.

(3)对换

在排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,交换任意两数 i_t 和 i_s 的位置,称为一次对换.对换改变排列的奇偶性.任意一个 n 排列与排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变,并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

(4)n 阶行列式的"排列逆序"定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和,故 n 级行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,每一项的符号取决于组成该项的 n 个元素的列下标排列的逆序数(行下标按自然顺序排列),即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时取正号,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时取负号.

应该指出的是,行列式采用上述两种方式的定义是等价的.通常如果用"排列逆序"定义行列式,则归纳定义就成为行列式按一行展开的性质.

【重点难点突破】

行列式是研究线性方程组、矩阵、特征多项式等问题的重要工具.对初学者而言,其定义也是一个难点.掌握行列式的"排列逆序"定义必须抓住三个特点,即:

(i)由于 n 级排列的总数是 $n!$ 个,故展开式中共有 $n!$ 项;

(ii)每项必须是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积;

(iii)每项前的符号取决于 n 个元素列下标所组成排列的奇偶性.

行列式的计算有许多技巧,但灵活掌握其定义是计算行列式的基础.

【典型题型解析】

1. 一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n$ 的逆序数 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_1$ 后比 i_1 小的数的个数 $+\ i_2$ 后比 i_2 小的数的个数 $+\cdots+\ i_{n-1}$后比 i_{n-1}小的数的个数 $=i_n$ 前比 i_n 大的数的个数 $+\ i_{n-1}$前比 i_{n-2}大的数的个数 $+\cdots+\ i_2$ 前比 i_2 大的数的个数.

例 1.1 求下列排列的逆序数,从而决定它们的奇偶性:

(1)1347265;　　(2)$n(n-1)\cdots21$;

(3)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解:(1)$\tau(1347265)=0+1+1+3+0+1=6$,故 1347265 为偶排列.

(2)
$$\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots1=\frac{n(n-1)}{2}$$

易知,当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}$为偶数,故此时排列为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}$为奇数,故此时排列为奇排列.

(3)该排列中前 n 个数 $135\cdots(2n-1)$不构成逆序,后 n 个数 $246\cdots(2n)$也不构成逆序,只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序.

$$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

故奇偶性与排列(2)一致.

例 1.2 如果排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为I,排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少?

解:设原排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中x_1后比 x_1 小的数的个数为 k_1,则比 x_1 大的数的个数为$(n-1)-k_1$,于是新排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中 x_1 前比 x_1 大的数为$(n-1)-k_1$ 个;同理,设原排列中 x_2 后比 x_2 小的数为 k_2 个,则新排列中 x_2 前比 x_2 大的数为$(n-2)-k_2$ 个;……依此类推,原排列 x_{n-1}后比 x_{n-1}小的数为 k_{n-1}个,则新排列中 x_{n-1}前比 x_{n-1}大的数为$[n-(n-1)]-k_{n-1}$个,而 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}=I$,故新排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为

$$\begin{aligned}&\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)\\&=[(n-1)-k_1]+[(n-2)-k_2]+\cdots\\&\quad+\{[n-(n-1)]-k_{n-1}\}\\&=(n-1)+(n-2)+\cdots+1-I=\frac{n(n-1)}{2}-I.\end{aligned}$$

2. 灵活运用行列式的定义,判断行列式展开项的性质.

例 1.3 (1)在 6 阶行列式中,项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$应带什么符号?

(2)写出 4 阶行列式中,带负号且包含因子 a_{23}和 a_{31}的项.

(3)在函数 $f(x)=\begin{vmatrix}x&x&1&0\\1&x&2&3\\2&3&x&2\\1&1&2&x\end{vmatrix}$ 中,求 x^3 的系数.

解:(1)适当调整该项元素位置,使 6 个元素的行下标(即第一个下标)按自然顺序排列,则列下标排列为 431265,其逆序数 $\tau(431265)=6$,故取正号.

(2)由行列式的定义可知,包含因子 a_{23}和 a_{31}的项必为 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$和 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$,其列下标排列的逆序数分别为 $\tau(2314)=2$ 和 $\tau(4312)=5$. 已知所求项带负号,故取列下标为奇排列的 $a_{14}a_{23}$

$a_{31}a_{42}$.

(3)根据行列式的定义，仅当 $a_{12}, a_{21}, a_{33}, a_{44}$ 四个元素相乘才会出现 x^3 项，这时该项列下标的排列的逆序数为 $\tau(2134)=1$，故含 x^3 的项的系数为 -1.

3. 对于含零元素较多的行列式，可直接用定义计算.

由定义知，n 阶行列式共有 $n!$ 项，每一项的一般形式为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，若某一项 n 个元素的乘积中有零因子，则该项为零，若行列式中零元素较多，则为零的项就较多，故只须找出那些不为零的项就可求出行列式的值.

例 1.4 计算

$$(1)D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2)D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解：(1)在 D 中只有 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个元素不为零，且恰处于不同行不同列，所以 D 中不为零的项为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=1\cdot 2\cdot 3\cdots n=n!$$

由于 $a_{1j_1}=1$，它位于第 1 行第 2 列，故 $j_1=2$，又 $a_{2j_2}=2$ 位于第 2 行第 3 列，故 $j_2=3$，同理 $j_3=4,\cdots,j_{n-1}=n, j_n=1$，从而

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=\tau(23\cdots n1)=n-1$$

而行列式的其余各项中都至少有一个元素为零，所以其余各项均为零，故

$$D=(-1)^{n-1}n!$$

(2)与(1)完全类似,由于行列式中不为零的项只有 $1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n$ 这一项,而把这 n 个元素行下标按自然顺序排列时,列下标的排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 21n$,而 $\tau(n-1,n-2,\cdots,2,1,n)=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ 所以

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 1n)}1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n \\ &= (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}n! \end{aligned}$$

例 1.5 证明行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

证明:由 D_5 中第 1,2,3,4,5 行的非零元素分别得到 $j_1=1,2,3,4,5$;$j_2=1,2,3,4,5$;$j_3=1,2$;$j_4=1,2$;$j_5=1,2$.

因为 $j_1j_2j_3j_4j_5$ 在上述可能取的数值中,不能组成一个 5 级排列,故由行列式定义得 $D_5=0$.

例 1.6 利用

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \cdots\cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0$$

证明 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列中,奇偶排列各半.

证明:根据行列式的定义有

$$D_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的某一排列,该和式中共有 $n!$ 项,且每项的绝对值都是 1. 由已知 $D_n=0$,知上面和式中 1 和 -1 的

个数相等,均为$\frac{n!}{2}$个,这说明 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列中,奇偶排列各占一半.

例 1.7 证明:

(1)上、下三角形行列式等于主对角线(从左上角到右下角这条对角线)上的元素的乘积.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2)对角行列式也等于主对角线上的元素的乘积.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3)
$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

证明:(1)先考察上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据行列式的定义,展开项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

在行列式中第 n 行的元素除去 a_{nn} 以外全为零,因之,只要考虑 $j_n = n$ 的那些项.在第 $n-1$ 行中,除去 $a_{n-1,n-1}, a_{n-1,n}$ 外,其余的项全为零,因之 j_{n-1} 只有 $n-1, n$ 这两个可能.由于 $j_n = n$,所以 j_{n-1} 就不能等于 n 了,从而 $j_{n-1} = n-1$.这样逐步推上去,不难看出,除去

$$a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

这一项外,其余的项全是零.而这一项的列下标所成的排列是一个偶排列,所以这一项带正号.于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

对下三角形行列式,完全类似地有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

(2)作为 D 的特殊情形,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$