教育部高职高专规划教材

高等应用数学

阎章杭　李月清　杨惟建　主编

化学工业出版社
教材出版中心

教育部高职高专规划教材

高等应用数学

阎章杭　李月清　杨惟建　主编

化学工业出版社
教材出版中心
·北京·

（京）新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学/阎章杭，李月清，杨惟建主编．—北京：化学工业出版社，2005.4

教育部高职高专规划教材

ISBN 7-5025-6808-5

Ⅰ．高…　Ⅱ．①阎…②李…③杨…　Ⅲ．应用数学-高等学校：技术学院-教材　Ⅳ．O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 023369 号

教育部高职高专规划教材

高等应用数学

阎章杭　李月清　杨惟建　主编

责任编辑：[illegible]

责任校对：王素芹

封面设计：[illegible]小红

化学工业出版社
教 材 出 版 中 心 出版发行

（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）

发行电话：（010）64982530

http://www.cip.com.cn

*

新华书店北京发行所经销

北京市昌平振南印刷厂印刷

三河市东柳装订厂装订

开本 787mm×1092mm　1/16　印张 $20\frac{3}{4}$　字数 509 千字

2005 年 5 月第 1 版　　2005 年 5 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-6808-5/G·1743

定　价：30.00 元

高职高专立体化数学系列规划教材

编审委员会

出版说明

高职高专教材建设工作是整个高职高专教学工作中的重要组成部分。改革开放以来，在各级教育行政部门、有关学校和出版社的共同努力下，各地先后出版了一些高职高专教育教材。但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设落后于高职高专教育的发展需要。为此，1999年教育部组织制定了《高职高专教育专门课课程基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种，用5年左右时间完成。这500种教材中，专门课（专业基础课、专业理论与专业能力课）教材将占很高的比例。专门课教材建设在很大程度上影响着高职高专教学质量。专门课教材是按照《培养规格》的要求，在对有关专业的人才培养模式和教学内容体系改革进行充分调查研究和论证的基础上，充分吸取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用型专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的。这套教材充分体现了高等职业教育的应用特色和能力本位，调整了新世纪人才必须具备的文化基础和技术基础，突出了人才的创新素质和创新能力的培养。在有关课程开发委员会组织下，专门课教材建设得到了举办高职高专教育的广大院校的积极支持。我们计划先用2～3年的时间，在继承原有高职高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用2～3年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专规划教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

本套教材适用于各级各类举办高职高专教育的院校使用。希望各用书学校积极选用这批经过系统论证、严格审查、正式出版的规划教材，并组织本校教师以对事业的责任感对教材教学开展研究工作，不断推动规划教材建设工作的发展与提高。

教育部高等教育司

2001年4月3日

前　言

当前，我国高职高专教育成为社会关注的热点，面临大好的发展机遇．同时，国家的经济、科技和社会发展也对高职高专教育人才的培养提出了许多更高要求．然而，随着我国高职高专教育的深入发展，改革的力度加大（如高职的学制逐步由“三年制”改为“二年制”），教学的内容与学时数已经或者将要逐步压缩．为了适应这种新形势发展的需要，为了进一步推动全国的高职高专教材的改革，开封大学、河南大学、洛阳大学、北京工业职业技术学院、包头职业技术学院、石家庄职业技术学院、漯河职业技术学院、南阳理工学院、商丘职业技术学院、三门峡职业技术学院、徐州建筑职业技术学院、天津渤海职业技术学院、石家庄铁路职业技术学院、黄河水利职业技术学院、吉林交通职业技术学院、无锡职业技术学院、邵阳职业技术学院、漳州职业技术学院、济源职业技术学院、鹤壁职业技术学院、雅安职业技术学院等院校的优秀教师和专家，经过长时间的酝酿和研究，于近两年联合编写并成功出版了《高等数学与工程数学》，《高等数学与经济数学》，《应用数学基础》（上）、（下）．现在我们又针对当前教学改革的新形势，认真整理改编出两套新教材——《高等数学》、《高等应用数学》，从而形成了一套完整的大学数学系列教材．该系列教材涵盖了高职高专三年制、两年制、五年制各工程类、经济类、管理类专业大学数学的教学内容．

为了使该系列教材更上一个台阶和层次，我们还将该系列教材进一步完善成为“立体化教材”．除了出版了每套教材的辅助教材——习题课指导外，还编写出版了该系列教材的电子教案，同时还建有专门的网站，提供相应的网上服务．

《高等应用数学》教材的内容包括为：一元函数微积分学，多元函数微积分初步，概率论与数理统计基础，线性代数基础．

该教材所用的学时数约为70～140左右，比较贴近各学校相关专业的教学实际．该教材作为高职高专三年制或两年制的工程类及经济管理类的相关专业的学生用书．

这套教材将充分吸收当前我国现有的高职高专各类数学教材的长处，密切结合当前高职高专教学改革的实际，努力编出具有自身特色的高水平的高职高专教材，具体反映为：

1. 努力贯彻“拓宽基础、强化能力、立足应用”的原则，突破传统教材体系“精选内容、主次分明、删减枝节、注重实用、讲求实效”．书中“*”号内容为选学内容．

2. 结合高职高专教学特点，淡化数学理论．对一些较繁琐的定理、公式及明显的结论，或者只给出结果，或者以几何直观予以说明．

3. 所选的例题和习题均以帮助学生理解概念，掌握方法为目的，删掉单纯性的技巧和难度较大的习题，增加富有启发性、应用性、为工程类专业服务的题目．

4. 本教材还以数学实验的形式加入了“Mathematica”软件介绍及应用，以供有条件的学院选学．

5. 同时出版了与该教材配套的电子教案，并且免费赠送使用院校的教师．

6. 建有该系列教材的专门网站，提供相应网上服务，如：教材介绍，教材分析，教学建议，典型教案，网上下载数学工具软件，网上教学研究，网上辅导等．

7. 出版有配套《高等应用数学习题课指导》教材，内容包括：本章内容小结，常见问

题分类及解法，典型习题解答与提示，自我测验等．

该书由阎章杭总策划、负责组织实施。

主　编：阎章杭　李月清　杨惟建；副主编：程传蕊　马幼梅　夏　兰　朱正光

参加本书编审工作的有（按章节顺序排名）

第一篇：李媛媛　马幼梅　拜云胜　郭建萍　韩成标　朱正光　任树华　杨建法　敦冬梅

第二篇：牛　铭　李月清　刘青桂　张卫华

第三篇：杨惟建　程传蕊　夏　兰　阎章杭

第四篇：李朝霞　许鹊君　路世英　辛自力

在本书编写过程中，曾得到有关学校领导、系部领导和有关专家的大力支持和帮助，杜跃鹏老师积极参与了利用 Mathematica 软件进行数学实验内容的编写，河南大学教授、专家阎育华、王国胜曾对本书进行了认真的审核，并提出许多宝贵的建议，在此一并表示衷心的谢意！

由于编者水平有限，错误和不当之处在所难免，恳请广大读者批评指正！

数学系列规划教材编委会

内 容 提 要

本书融高等数学与应用数学于一体．全书分一元函数微积分学、多元函数微积分初步、概率论与数理统计基础、线性代数基础等四篇共十一章．其内容涵盖了高职高专院校工程类及财经、管理类相关专业所必需的数学知识以及如何利用这些知识解决实际问题的方法．另外，本书还以数学实验的形式，增设了利用数学软件解决实际计算的内容，以供有条件的院校选学．

该教材突破传统教材体系，精选内容，主次分明，删减枝节，注重实用，讲求实效．

本教材可根据高职高专不同专业、不同的学生类别选学不同的内容，供选学的面宽．

所选的例题和习题均以帮助学生理解概念掌握方法为目的，删除单纯性技巧和难度较大的习题，增加富有启发性、应用性，为专业服务的题目．

该书为立体化教材，在出版该教材同时，还编写并出版了与该教材配套的辅助教材《高等应用数学习题课指导》，内容包括本章小结、常见问题分类及解法、习题答案及典型习题解答、自我测验等．

另外，还出版了与该教材配套的电子教案，免费赠送教师使用，同时还建有专门的网站（网页），为师生提供网上服务．

本书可作为三年制或两年制高职高专院校，成人高校和本科院校开办的二级院校工程及经济、管理类相关专业的数学教材，同时对各类工程技术人员也有较高的参考价值．

目　　录

第一篇　一元函数微积分学

第一章　函数、极限与连续 …… 2
第一节　函数 …… 2
第二节　数列及其极限 …… 15
第三节　函数的极限 …… 20
第四节　无穷小与无穷大 …… 24
第五节　极限的运算法则 …… 27
第六节　两个重要的极限 …… 30
第七节　无穷小的比较 …… 33
第八节　函数的连续性与间断性 …… 35
第九节　初等函数的连续性 …… 40
*第十节　数学实验一　Mathematica 入门和求一元函数的极限 …… 44
*第十一节　无穷级数简介 …… 50
复习题一 …… 56

第二章　导数与微分 …… 60
第一节　导数的概念 …… 60
第二节　函数的和、差、积、商的求导法则 …… 66
第三节　复合函数的求导法则 …… 67
第四节　初等函数的求导法 …… 69
第五节　隐函数及参数方程所确定函数的求导法 …… 72
第六节　高阶导数 …… 74
第七节　函数的微分 …… 76
*第八节　数学实验二　用 Mathematica 求一元函数的导数 …… 80
复习题二 …… 82

第三章　导数应用 …… 84
第一节　拉格朗日中值定理与函数单调性判定法 …… 84
第二节　函数的极值及判定 …… 87
第三节　函数的最大值和最小值 …… 90
*第四节　曲线的凸凹性与拐点 …… 93
*第五节　函数图形的描绘 …… 95
*第六节　洛必达法则 …… 98
*第七节　导数在经济问题中的应用 …… 101

复习题三…… 107

第四章　一元函数积分学…… 109
第一节　不定积分的概念与性质…… 109
第二节　不定积分法…… 113
第三节　定积分的概念与性质…… 120
第四节　牛顿-莱布尼兹公式…… 127
第五节　定积分的换元法与分部积分法…… 130
第六节　广义积分…… 134
*第七节　数学实验三　用 Mathematica 计算积分…… 136
复习题四…… 137

第五章　积分的应用…… 139
第一节　定积分的微元法…… 139
第二节　定积分在几何中的应用…… 140
*第三节　定积分在物理中的应用…… 146
*第四节　定积分在经济问题中的简单应用…… 150
*第五节　常微分方程简介…… 153
复习题五…… 164

第二篇　多元函数微积分初步

第六章　多元函数微分学初步…… 165
第一节　空间解析几何简介…… 165
第二节　多元函数的概念…… 171
第三节　偏导数与全微分…… 176
第四节　复合函数与隐函数微分法…… 180
第五节　多元函数的极值…… 185
复习题六…… 188

第七章　多元函数积分学初步…… 190
第一节　二重积分的概念与性质…… 190
第二节　二重积分的计算…… 194
第三节　二重积分的应用…… 201
*第四节　数学实验四　用 Mathematica 求偏导和计算二重积分…… 204
复习题七…… 206

第三篇　概率论与数理统计基础

第八章　概率论基础…… 207
第一节　随机事件…… 207
第二节　事件的概率…… 211

第三节　条件概率与乘法公式…………………………………………………… 215
第四节　事件的相互独立性及独立重复试验……………………………………… 218
第五节　随机变量及其分布……………………………………………………… 221
第六节　随机变量的数字特征…………………………………………………… 235
复习题八…………………………………………………………………………… 242

*第九章　数理统计基础…………………………………………………………… 244
第一节　简单随机样本…………………………………………………………… 244
第二节　参数估计………………………………………………………………… 247
第三节　假设检验………………………………………………………………… 253
复习题九…………………………………………………………………………… 257

第四篇　线性代数基础

第十章　行列式…………………………………………………………………… 259
第一节　二阶、三阶行列式……………………………………………………… 259
第二节　n 阶行列式 …………………………………………………………… 266
第三节　克莱姆法则……………………………………………………………… 272

第十一章　矩阵与线性方程组……………………………………………………… 276
第一节　矩阵的概念及运算……………………………………………………… 276
第二节　逆矩阵…………………………………………………………………… 287
第三节　矩阵的秩与初等变换…………………………………………………… 290
第四节　线性方程组的矩阵求解………………………………………………… 295
*第五节　数学实验五　用 Mathematica 进行矩阵运算和解线性方程组 ………… 306
复习题十一………………………………………………………………………… 309

附录………………………………………………………………………………… 313
附表一　泊松分布表……………………………………………………………… 313
附表二　标准正态分布表………………………………………………………… 313
附表三　χ^2 分布表 …………………………………………………………… 314
附表四　T 分布表……………………………………………………………… 315
附表五　F 分布表……………………………………………………………… 316

参考文献…………………………………………………………………………… 318

第一篇　一元函数微积分学

主要内容

- 函数极限和连续
- 导数与微分
- 导数的应用
- 一元函数积分学
- 积分的应用

引子

人类文明史上灿烂的一页

在 17 世纪，一代科学巨人牛顿、莱布尼兹创立了微积分．微积分的创立是人类历史上伟大的数学发现，它为近代科学的发展开辟了崭新的道路，在人类的文明史上写下了极其灿烂的一页．微积分的伟大意义可以从以下四个方面理解．

1. 对数学自身影响

自从有了微积分就开始了变量数学的时代，因而数学开始描述变化，描述运动．微积分改变了整个数学世界．数学家们在微积分提供的思维和工具的基础上阔步前进，迅速创立了许多数学分支，诸如：微分方程、无穷级数和变分法等，可以说，有了微积分之后的两三百年期间，数学获得了极大的发展，获得了空前的繁荣．

2. 对其他自然科学和工程技术的影响

有了微积分，整个力学、物理学都得到了全面的改造，微积分成为了物理学的基本语言，而且许多物理学的问题要依靠微积分寻求答案，离开了微积分不可能有现代物理，无论是力学、电学还是光学、热学．

微积分的创立得到了天文学的启示，以后天文学也离不开微积分了．

19 世纪初，可能还认为化学只需要简单的代数知识，而生物学基本上与数学没有联系，现在化学、生物学、地理学等都必须深入的同微积分打交道了．

3. 对物质文明的影响

工程技术是最直接影响人类物质生活的，然而工程技术的基础是数学科学，也可以说，现代工程技术少不了微积分的支撑．从机械到材料力学，从大坝到电站的建设，都要利用微积分的思想和方法．

如果说在落后的生产方式之下，只需要少量的几何、三角知识就可以工作的话，那么如今，任何一个未学过微积分的人都不可能从事科学技术工作．

在今天人类广泛的经济活动、金融活动中，微积分也成了必不可少的工具．微积分诞生之初的主要背景是物理学和几何学，而今，它几乎为一切领域所运用．它对人类物质生活的影响是越来越大．

4. 对人类文化的影响

只要研究变化规律就要用上微积分，在人文、社会科学领域亦如此，因而微积分也渗透于人文、社会科学，并用它来描述和研究规律性的东西．

第一章　函数、极限与连续

微积分是数学中的重要分支，是高等数学的核心．而函数和极限分别是微积分的研究对象和工具，因此本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，着重讨论函数的极限和函数的连续性等问题．

第一节　函　　数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1　设 D 是一个数集，如果对属于 D 的每一个数 x，按照某个对应关系 f，都有确定的数值 y 与之对应，则称 y 是定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，x 叫作**自变量**，数集 D 叫作函数的**定义域**，当 x 取遍 D 中的一切数时，与它对应的函数值的集合 M 叫作函数的**值域**．当自变量取某一数值 x_0 时，函数 y 具有确定的对应值，则称函数在 x_0 处有定义．

如果对于每一个 $x\in D$，都有惟一的 $y\in M$ 与之对应，那么称这种函数为**单值函数**，否则为**多值函数**．(?你能举出一个多值函数的例子吗?)

本书所研究的函数若无特殊说明均指单值函数．

在函数定义中，并没有要求自变量变化时，其函数值一定要变，只要求对于每一个自变量 $x\in D$ 都有确定的 y 值与之对应，因此，常量 $y=c$ 也符合函数的定义，即当 $x\in \mathbf{R}$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 c，称这样的函数为**常量函数**．

通过函数定义，可以发现，构成函数的两个重要因素为对应关系与定义域．

显然，两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才认为是相同的．

例如，函数 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$，它们的定义域和对应关系都相同，所以它们是相同的函数．

又如，函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 与 $y=x$，它们的定义域不同，所以它们是不同的函数．

2. 函数的定义域

定义域是构成函数的重要因素之一，因此研究函数，就必须注意函数的定义域．在考虑实际问题时，应根据问题的实际意义确定定义域．例如，匀速直线运动的位移 $s=vt$，t 是时间，故只能取非负数．对于用数学式表示的函数，其定义域由函数表达式本身来确定，即使运算有意义．如：

① 函数中有分式，要求分母不能为零；

② 函数中有根式，要求负数不能开偶次方；

③ 函数中有对数式，要求真数必须大于零；

④ 函数中有三角函数式和反三角函数式，要求符合它们的定义域；

⑤ 若函数式是上述各式的混合式，则应取各部分定义域的交集．

例 1　求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$；(2) $y=\lg\dfrac{x-1}{x-2}$；(3) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{3}+\sqrt{x+1}$.

解　(1) 因为 $4-x^2\neq0$，所以 $x\neq\pm2$. 又因为 $x+2\geqslant0$，所以 $x\geqslant-2$，因此函数定义域为 $(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 因为 $\dfrac{x-1}{x-2}>0$，所以 $x>2$ 或 $x<1$，所以函数定义域为 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

(3) 因为 $-1\leqslant\dfrac{x+1}{3}\leqslant1$，所以 $-3\leqslant x+1\leqslant3$，即 $-4\leqslant x\leqslant2$.

又因为 $x+1\geqslant0$，所以 $x\geqslant-1$，因此函数的定义域为 $[-1,2]$.

3. 函数与函数值的记号

通常，y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，但若同一问题中，需要讨论几个不同的函数，就要使用不同的函数记号，例如，$F(x)$，$\Phi(x)$，$y(x)$，…

函数 $y=f(x)$，当 $x=x_0\in D$ 时，对应的函数值可以记为 $y_0=f(x_0)$.

例 2　若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(a+b)$.

解　$f(2)=0$，$f(-2)=\dfrac{|-4|}{-1}=-4$，$f(0)=\dfrac{|-2|}{1}=2$，$f(a)=\dfrac{|a-2|}{a+1}$，$f(a+b)=\dfrac{|a+b-2|}{a+b+1}$.

4. 函数的表示方法

表示函数的方法，最常用的有以下三种.

(1) 公式法　如 $y=x^a$，$y=\sin x$ 等.

(2) 表格法　如对数表、三角函数表等.

(3) 图像法　用图像表示函数.

有时会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示.

例如，函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant0\\ -x, & x<0\end{cases}$

是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的一个函数. 当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$；当 $x<0$ 时，$f(x)=-x$. 它的图形如图 1-1 所示.

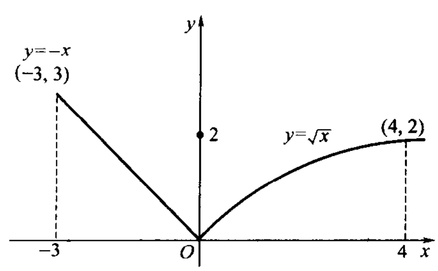

图 1-1　分段函数 $f(x)$ 的图形

在不同的区间内用不同的式子来表示的函数称为**分段函数**，即用几个式子合在一起表示一个函数.（?解释分段函数为什么也满足函数的定义?）

求分段函数的函数值时，应将自变量的值代入相应取值范围的表示式进行计算.

例如，上述分段函数中 $f(4)=\sqrt{4}=2$；$f(-3)=-(-3)=3$.

二、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对任意 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称

$f(x)$为**奇函数**；如果 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对任意 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$ 为**偶函数**．如果函数既非奇函数，也非偶函数，则称 $f(x)$ 为**非奇非偶函数**．

例如，函数 $y=\sin x$，$y=x^3$ 等都是奇函数；又如，函数 $y=\cos x$，$y=x^2$ 等都是偶函数；而函数 $y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数．

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1-2 所示．

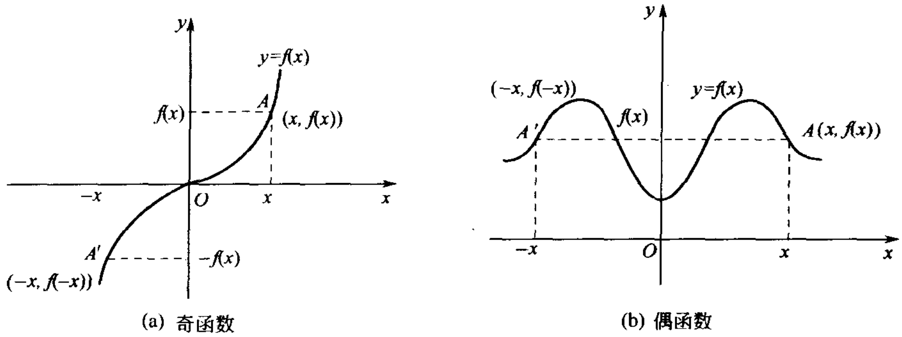

图 1-2　奇函数与偶函数的图形

例 3　判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的奇偶性．

解　因为 $f(-x)=\ln[(-x)+\sqrt{(-x)^2+1}]=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

$$=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$为奇函数．

2. 函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内随着 x 的增大而增大（或减小），即对于 $(a,\ b)$ 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$[或 $f(x_1)>f(x_2)$]，则称函数 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内单调增加（或单调减少）．在定义域内单调增加或单调减少的函数，统称为**单调函数**，其中 $(a,\ b)$ 叫作函数 $f(x)$ 的单调增加（或单调减少）区间，也称**单调区间**．

单调增加（或单调减少）函数的图形沿 x 轴的正向上升（或下降）．

上述定义也适用于其他有限区间和无限区间的情形．

例如，由图 1-3 可知，函数 $y=x^2$ 在区间 $(0,\ +\infty)$ 内是单调增加的，而在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，它在定义域 $(-\infty,\ +\infty)$ 内不是单调函数．

又如，由图 1-4 可知，函数 $y=\log_a x\ (a>1)$ 在定义域 $(0,\ +\infty)$ 内单调增加；函数$y=\log_a x$，$(0<a<1)$ 在定义域 $(0,\ +\infty)$ 内是单调减少的，所以，它们在定义域 $(0,\ +\infty)$ 内都是单调函数．

例 4　证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间 $(0,\ 1)$ 内是单调减少的函数．

证　在区间 $(0,\ 1)$ 内任取两点 x_1，x_2，设 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$. 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0$$

所以
$$f(x_1)>f(x_2)$$

根据函数单调减少的定义，可知 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 (0,1) 内是单调减少的函数．

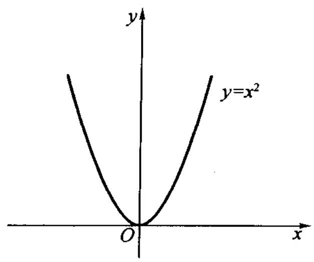

图 1-3　函数 $y=x^2$ 图形

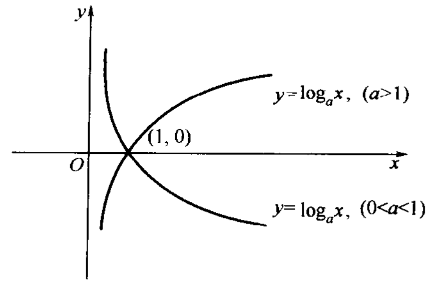

图 1-4　函数 $y=\log_a x$ 图形

3. 函数的周期性

如果有不为零的实数 l 存在，使得 $f(x+l)=f(x)$ 在 $f(x)$ 的定义域内恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**．称 l 是 $f(x)$ 的周期，显然 $\pm l$，$\pm 2l$，$\pm 3l$，…，$\pm nl$ 也是它的周期，通常所说的函数的周期是指最小正周期．(!周期不惟一．)

一个以 l 为周期的函数，它的图形在定义域内每隔长度为 l 的相邻区间上，都有相同的形状，如图1-5所示．

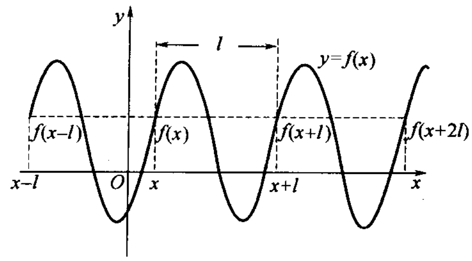

图 1-5　以 l 为周期的函数图形

例如，函数 $\cos x$，$\sin x$ 以 2π 为周期，而 $A\sin(\omega x+\varphi)$，$(\omega>0)$ 以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期．

4. 函数有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于区间 (a, b) 内的一切 x 值，对应的函数值 $f(x)$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界；如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内无界．

上述定义也适用于闭区间和无穷区间．

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，因为对于一切 $x\in\mathbf{R}$，$|\sin x|\leqslant 1$ 都成立，这里 $M=1$.

又如，函数 $f(x)=\arctan x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，因为对于一切 $x\in\mathbf{R}$，$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$ 都成立，这里 $M=\frac{\pi}{2}$.

再如，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内是无界的，因为对于区间 $(0, 1)$ 内一切 x，不存在正数 M，使 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立．但是 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $[1, 2]$ 内是有界的，因为对于区间 $[1, 2]$ 上的一切 x，都有 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 成立，这里 $M=1$（图 1-6）．

显然，如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是有界的，则它的图形在 (a, b) 内必介于两平行线 $y=\pm M$ 之间（图 1-7）．(?有界函数的界是否惟一?)

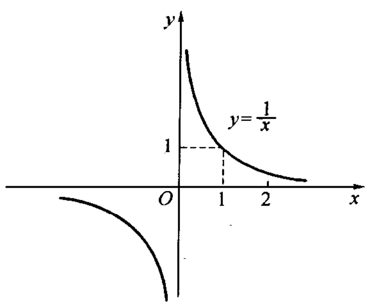

图 1-6　函数 $y=\frac{1}{x}$图形

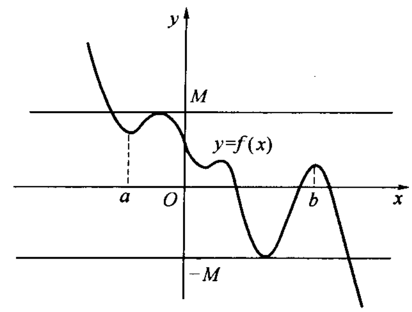

图 1-7　函数 $y=f(x)$的有界性

三、复合函数

在很多实际问题中，变量间的函数关系往往是复杂的．

例如，设有边长为 1 的正方形金属薄片，受热后膨胀，边长膨胀了 x，求受热膨胀以后的面积 y.

由于面积 $y=u^2$，u 表示边长，而 $u=1+x$，因此 $y=u^2=(1+x)^2$.

不难看出，这个函数的值不是直接由自变量 x 来确定的，是通过 $u=1+x$ 来确定的，也就是说对于每一个 x，经过中间变量 u，都有一个 y 的值与之对应，所以 y 是 x 的函数，而且这个函数可以看作是由函数 $u=1+x$ 与函数 $y=u^2$ 复合而成的．

定义 2　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，通过 u 将 y 表示成 x 的函数，即 $y=f[\varphi(x)]$，那么 y 就叫作 x 的**复合函数**，其中 u 叫作**中间变量**．

但要注意，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域，应该与函数 $y=f(u)$ 的定义域有非空交集，否则复合函数将失去意义．（?是否 $u=\varphi(x)$ 的值域必包含在 $y=f(u)$ 定义域之内?）

例如，复合函数 $y=\lg u$，$u=x-1$. 由于 $y=\lg u$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以中间变量 $u=x-1$的值域必须在 $(0,+\infty)$ 内，即 x 应在 $(1,+\infty)$ 内．

由此可知复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域应为函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的子集．

当然，也可以由两个以上的函数经过复合构成一个复合函数．例 $y=\lg u$，$u=\sin v$，$v=\frac{x}{2}$，则 $y=\lg\sin\frac{x}{2}$，其中 u，v 为中间变量．

下面举例分析复合函数的复合过程．正确熟练地掌握这个方法，有利于今后微积分的学习．

例 5　指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$；　(2) $y=\sin^2 x$；　(3) $y=\arcsin(\ln x)$；　(4) $y=2\cos\sqrt{1-x^2}$.

解　(1) 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$是由函数 $y=\sqrt{u}$和 $u=1-x^2$ 复合而成的；

(2) 函数 $y=\sin^2 x$ 是由函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的；

(3) 函数 $y=\arcsin(\ln x)$ 是由函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=\ln x$ 复合而成的；

(4) 函数 $y=2\cos\sqrt{1-x^2}$是由函数 $y=2\cos u$，$u=\sqrt{v}$和 $v=1-x^2$ 复合而成的．

四、反函数

定义 3　设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，则当变量 y 在 M 中每取一个